

УДК 532.516

Преимущественно однонаправленное вращение вязкой жидкости со свободной границей

В.Л. Сеницкий

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Рассматривается задача о течении вязкой жидкости, граничащей с твердым телом и газом. Жидкость испытывает колебательные воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве. Обнаружен новый гидромеханический эффект, состоящий в том, что свободные части гидромеханической системы (жидкие слои) на фоне колебаний совершают однонаправленное, стационарное вращательное движение.

Ключевые слова: вязкая жидкость, свободная граница, колебательные воздействия, отсутствие выделенного направления, свободные части системы, стационарное вращение.

Введение. В результате теоретических и экспериментальных исследований динамики гидромеханических систем при колебательных воздействиях был выявлен ряд эффектов среднего движения (см. работы [1–11] и представленную в них литературу). В частности, в [11] была поставлена и решена задача о совместном движении граничащих друг с другом свободного твердого тела и вязкой жидкости. Было найдено, что при колебательных воздействиях, характеризующихся отсутствием выделенного направления в пространстве, свободные части гидромеханической системы на фоне колебаний совершают однонаправленное, стационарное вращательное движение. В настоящей работе установлено, что аналогичный эффект присутствует для вязкой жидкости со свободной границей.

Постановка задачи. Имеются бесконечно длинное твердое тело Ξ , идеальный газ и вязкая несжимаемая жидкость. Тело Ξ ограничено изнутри круговой цилиндрической поверхностью Γ_1 радиусом R_1 . Газ ограничен извне круговой цилиндрической поверхностью Γ_2 радиусом R_2 . В каждый момент времени t оси поверхностей Γ_1 , Γ_2 находятся на оси Z цилиндрической системы координат (R, Θ, Z) ; газ занимает область $R < R_2$ ($0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$); жидкость занимает область $R_2 < R < R_1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$). Тело Ξ вращается и пульсирует; угловая скорость Ω вращения тела Ξ вокруг оси Z и радиус R_1 периодически с периодом T изменяются со временем (среднее значение скорости Ω равно нулю). Ввиду несжимаемости жидкости выполняется условие постоянства разности $R_1^2 - R_2^2$. Требуется определить не зависящее от начальных данных (периодическое по времени) осесимметричное, плоское движение жидкости со свободной границей, обусловленное воздействиями на жидкость со стороны твердого тела.

Пусть $\tau = t/T$; $\omega = \Omega T = \bar{\omega} \sin 2\pi\tau$, $\bar{\omega} > 0$ — постоянная; $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ — соответственно значения R_1 и R_2 в отсутствие пульсаций тела Ξ ; $r = R/\bar{R}_1$, $\kappa = \bar{R}_2/\bar{R}_1$; $f = \sin(2\pi\tau + \varphi)$, φ — постоянная; $r_1 = R_1/\bar{R}_1 = 1 + \varepsilon f$, $0 \leq \varepsilon < 1$ — параметр; $r_2 = R_2/\bar{R}_2$ ($r_1^2 - \kappa^2 r_2^2 = 1 - \kappa^2$); σ , ρ и ν — соответственно коэффициент поверхностного натяжения, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\text{Re} = \bar{R}_1^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\lambda = \sigma T^2/(\rho \bar{R}_1 \bar{R}_2)$; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания соответственно r и θ ; $\mathbf{V} = \bar{R}_1 \mathbf{v}/T$ — скорость жидкости, $\mathbf{v} = v_r(r, \tau) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \tau) \mathbf{e}_\theta$; $P = \rho \bar{R}_1^2 p/T^2$ — давление в жидкости, $p = p(r, \tau)$; $\mathbf{P} = \rho \bar{R}_1^2 \mathbf{p}/T^2$ — тензор напряжений в жидкости; $P' = \rho \bar{R}_1^2 p'/T^2 = \bar{P}' r_2^{-2\gamma}$ — давление в газе, $\bar{P}'$ — значение P' в отсутствие пульсаций тела Ξ , γ — показатель адиабаты.

Уравнения Навье–Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на твердой и свободной границах жидкости, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dr_1}{d\tau} \mathbf{e}_r + \omega r_1 \mathbf{e}_\theta \quad \text{при } r = r_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = \kappa \frac{dr_2}{d\tau}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r = \left(-p' + \frac{\lambda}{r_2} \right) \mathbf{e}_r \quad \text{при } r = \kappa r_2. \quad (4)$$

Решение задачи. Из соотношений (2)–(4) следует

$$v_r = w/r, \quad (5)$$

здесь $w = r_1 (dr_1/d\tau) = \kappa^2 r_2 (dr_2/d\tau)$.

Используя (1), (3)–(5), найдем

$$p = p' - \frac{\lambda}{r_2} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{d}{d\tau} \ln r_2 - \frac{dw}{d\tau} \ln \frac{r}{\kappa r_2} + \frac{w^2}{2} (\kappa^{-2} r_2^{-2} - r^{-2}) + \int_{\kappa r_2}^r \frac{v_\theta^2}{r'} dr', \quad (6)$$

$$\text{Re} r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \tau} = r^2 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + (1 - \text{Re} w) r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - (1 + \text{Re} w) v_\theta, \quad (7)$$

$$v_\theta = \omega r_1 \quad \text{при } r = r_1, \quad (8)$$

$$\partial v_\theta / \partial r - v_\theta / r = 0 \quad \text{при } r = \kappa r_2. \quad (9)$$

Будем рассматривать задачу (7)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε . Применим метод разложения по степеням малого параметра [12]. Предположим, что

$$v_\theta \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Используя (7)–(10), в ε^N -приближении ($N = 0, 1$) получим

$$\text{Re} r^2 \frac{\partial v_N}{\partial \tau} - r^2 \frac{\partial^2 v_N}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_N}{\partial r} + v_N = N \text{Re} \frac{df}{d\tau} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right), \quad (11)$$

$$v_N = (1 - N) \omega + N f (\omega - \partial v_0 / \partial r) \quad \text{при } r = 1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial r} - \frac{v_N}{r} = -N \frac{f}{\kappa r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \quad \text{при } r = \kappa. \quad (13)$$

Пусть $N = 0$. Сделав в задаче (11)–(13) подстановку

$$v_0 = \text{Real}(\hat{v}e^{2\pi i\tau}), \quad (14)$$

где $\hat{v}$ — функция r , определим следующую задачу:

$$r^2 \frac{d^2 \hat{v}}{dr^2} + r \frac{d\hat{v}}{dr} - (2\pi i \text{Re } r^2 + 1)\hat{v} = 0, \quad (15)$$

$$\hat{v} = -i\hat{\omega} \quad \text{при } r = 1, \quad (16)$$

$$d\hat{v}/dr - \hat{v}/r = 0 \quad \text{при } r = \kappa. \quad (17)$$

Используя соотношения (14)–(17), найдем

$$v_0 = \hat{\omega} \text{Imag} \left\{ Q_1^{-1} [K_2(q\kappa)I_1(qr) + I_2(q\kappa)K_1(qr)] e^{2\pi i\tau} \right\}, \quad (18)$$

где $q = (1+i)\sqrt{\pi \text{Re}}$; I_1, I_2, K_1, K_2 — модифицированные функции Бесселя;

$$Q_1 = K_2(q\kappa)I_1(q) + I_2(q\kappa)K_1(q).$$

Пусть $N = 1$. Произведем усреднение (11)–(13) по безразмерному времени τ . В результате получим

$$r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + r \frac{d\bar{v}}{dr} - \bar{v} = \text{Re} \left\langle \frac{df}{d\tau} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \right\rangle, \quad (19)$$

$$\bar{v} = \left\langle f(\omega - \partial v_0 / \partial r) \right\rangle \quad \text{при } r = 1, \quad (20)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{\bar{v}}{r} = -\frac{1}{\kappa} \left\langle f \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r^2} \right) \right\rangle \quad \text{при } r = \kappa, \quad (21)$$

здесь $\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$, $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$. Правые части уравнения (11) и условий (12), (13) представляют собой суммы вида $\alpha + \text{Real}(\beta e^{4\pi i\tau})$, где α, β в (11) — функции r , в (12), (13) — постоянные. В соответствии с этим, согласно (11)–(13), (19)–(21) имеем

$$v_1 = \bar{v} + \text{Real}(\tilde{v}e^{4\pi i\tau}), \quad (22)$$

здесь $\tilde{v}$ функция r . Используя (18)–(21), найдем

$$\bar{v} = \frac{\pi}{2} \hat{\omega} \text{Re Imag} \left\{ Q_1^{-1} [Q_2 r + K_2(q\kappa)(qrh_I - I_1(qr)) - I_2(q\kappa)(qrh_K + K_1(qr))] e^{-i\varphi} \right\}, \quad (23)$$

где
$$Q_2 = \frac{2}{q} \left\{ K_2(q\kappa) \left[\left(\frac{q}{2} - \frac{2}{q} \right) I_1(q) + I_0(q) \right] + I_2(q\kappa) \left[\left(\frac{q}{2} - \frac{2}{q} \right) K_1(q) - K_0(q) \right] \right\},$$

$$h_I = \int_1^r \frac{I_0(qr')}{r'} dr', \quad h_K = \int_1^r \frac{K_0(qr')}{r'} dr'.$$

Формулами

$$v_\theta = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (24)$$

и (5), (6), (18), (22), (23) определяется приближенное решение задачи (1)–(4). Из этого решения, в частности, следует, что жидкость на фоне колебаний совершает стационарное вращательное движение.

Остановимся на вопросе о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях $1-\kappa$. Используя (5), (18), (22)–(24), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim -2\pi\epsilon\omega \operatorname{Re} \left[\eta + (\eta^2 - 1)(1 - \kappa) \right] (\sin \varphi)(1 - \kappa) \mathbf{e}_\theta \quad \text{при } \kappa \rightarrow 1, \quad (25)$$

здесь $\eta = (1/2)(r - \kappa)/(1 - \kappa)$. Отметим, что согласно (25) при $0 < \varphi < \pi$, $\pi < \varphi < 2\pi$ жидкость, занимающая цилиндрический слой $\kappa \leq r < r^*$, вращается в направлении, противоположном направлению вращения смежного жидкого цилиндрического слоя $\left(r^* = \kappa + \sqrt{1 + 4(1 - \kappa)^2} - 1 \approx \kappa + 2(1 - \kappa)^2 \right)$.

Заключение. Проведенное исследование позволяет сделать вывод о наличии следующего эффекта. Гидромеханическая система, подвергающаяся колебательным воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит однонаправленные отклики (реакции на воздействия), выражающиеся в том, что свободные части системы — жидкие слои — на фоне колебаний совершают однонаправленное, стационарное вращательное движение. В частности, преимущественно однонаправленное вращательное движение совершает жидкий слой, граничащий с газом.

Результаты работы могут найти применение в исследованиях нетривиальной динамики гидромеханических систем, использоваться при создании устройств, гидромеханических систем, обладающих заданными свойствами, например, систем, заданным образом реагирующих на колебательные воздействия.

Список литературы

1. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Сенников В.Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1985. № 5. С. 19–23.
3. Сенников В.Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикл. механика и техн. физика. 1986. № 4. С. 31–36.
4. Луговцов Б.А., Сенников В.Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1987. С. 61–71.
6. Сенников В.Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
7. Сенников В.Л. Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1993. № 1. С. 100–101.
8. Sennitskii V.L. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Int. Workshop on G-jitter: Proceedings. Potsdam, USA: Clarkson University, 1993. P. 178–186.
9. Lavrenteva O.M. On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. Vol. 10, No. 3. P. 251–263.
10. Сенников В.Л. О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
11. Сенников В.Л. Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97.
12. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

*Статья поступила в редакцию 13 марта 2019 г.,
после переработки — 13 августа 2019 г.,
принята к публикации 6 ноября 2019 г.*