

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ РЭЛЕЯ — РИТЦА КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОПЕРТОЙ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ И НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Т. Ву, Ч. Чэнь, Ц. Цюй

Харбинский технологический институт, 15000 Харбин, Китай

E-mails: 19B908099@stu.hit.edu.cn, chenzb@hit.edu.cn, qujianjun@hit.edu.cn

С использованием метода Рэлея — Ритца исследуются колебания опертой в углах пластины с присоединенными к ней сосредоточенными массами. Вычислена первая собственная частота колебаний пластины при различных значениях параметров задачи. Проведено сравнение полученных результатов численных расчетов с известными результатами, полученными методом конечных элементов.

Ключевые слова: метод Рэлея — Ритца, прямоугольная пластина, поперечные колебания, присоединенная масса.

DOI: 10.15372/PMTF20220416

Введение. Прямоугольные плиты, опертые в различных точках, широко используются как в строительстве, так и в машиностроении. Исследованию колебаний таких пластин посвящено большое количество работ. Например, в работе [1] получена зависимость между силой и смещением при колебаниях упругой прямоугольной пластины, защемленной по четырем торцам. В [2] с использованием рядов Фурье решена задача о колебаниях прямоугольных пластин с произвольными граничными условиями. Полученное решение сравнивается с точными решениями. В работе [3] с помощью метода граничных интегральных элементов, обладающего быстрой сходимостью и высокой точностью, получено решение задачи о колебаниях прямоугольной пластины. Параметрический резонанс и устойчивость свободно опертых прямоугольных пластин с присоединенными сосредоточенными массами при действии периодических нагрузок численно и экспериментально исследованы в работе [4].

В работе [5] с использованием операторной техники Лагранжа и метода полиномиального приближения определена первая собственная частота колебаний прямоугольной пластины, опертой в четырех углах. В [6] методом конечных элементов вычислена первая частота собственных колебаний прямоугольной пластины, защемленной в четырех углах. Задача о поперечных колебаниях прямоугольных пластин с граничными условиями Кельвина изучена в работе [7]. В [8] получено нелинейное уравнение собственных колебаний ортотропных прямоугольных пластин и методом Рэлея определены собственные частоты

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда научных исследований (код проекта 2018YFB2001500).

© Ву Т., Чэнь Ч., Цюй Ц., 2022

колебаний. В работе [9] предложена модель стержневой прямоугольной решетки Хенки при наличии точечных опор и получена формула для жесткости пружины, моделирующей различные граничные условия в методе конечных элементов. В [10] методом суперпозиции построено решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, и установлено, что теория тонких пластин не применима при вычислении собственных частот колебаний высокого порядка для прямоугольных пластин с точечными опорами. В [11] с использованием двойного тригонометрического ряда и теоремы о взаимности работ Бетти выведено уравнение изгиба прямоугольных пластин с угловыми опорами и изучена устойчивость прямоугольных пластин, находящихся под действием равномерного давления. Для устранения разрывов смещения и частных производных вдоль краев пластин, опертых в отдельных точках, в работе [12] предложено применять обобщенный метод Фурье для решения плоской задачи о колебаниях прямоугольных пластин. В [13] с использованием ортогональных функций решена задача о свободных колебаниях изотропной прямоугольной пластины, опертой в отдельных точках, и проведено сравнение полученного решения с решением, найденным методом конечных элементов.

В данной работе для определения функции прогиба используются метод Рэлея — Ритца и метод средневзвешенных невязок. Вычислены собственные частоты колебаний прямоугольной пластины при различных значениях параметров задачи.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропная однородная прямоугольная пластина длиной a , шириной b и толщиной h (рис. 1). Пластина оперта в четырех углах и нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой q_0 . В точках с координатами x_i, y_i к пластине прикреплены i грузов массой m_i . Поперечный прогиб пластины аппроксимируется функцией

$$w(x, y) = \sum_{m=0,3,6,\dots}^n \left[C_m \sin^{m+1} \left(\frac{\pi x}{a} \right) + C_{m+1} \sin^{m+1} \left(\frac{\pi y}{b} \right) + C_{m+2} \sin^{m+1} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin^{m+1} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right], \quad n \geq 3, \quad (1)$$

где коэффициенты C_m подлежат определению. Функция $w(x, y)$ должна удовлетворять граничным условиям опирания пластины в угловых точках $w(0, 0) = w(a, 0) = w(0, b) = w(a, b) = 0$ [14]. Также должны выполняться условия равенства нулю изгибающих моментов и перерезывающих сил на торцах пластины:

$$x = 0, a: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (2)$$

$$y = 0, b: \quad \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (3)$$

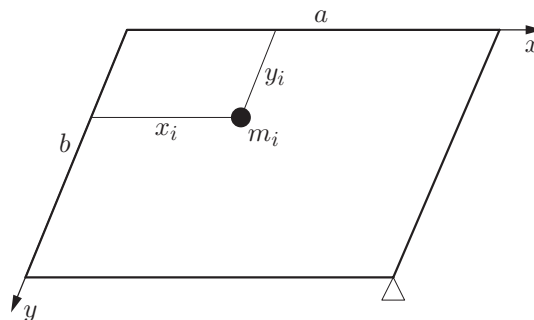


Рис. 1. Модель прямоугольной пластины с присоединенными массами

$$x = 0, a: \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad (4)$$

$$y = 0, b: \quad (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (5)$$

(ν — коэффициент Пуассона материала пластины).

Для определения констант C_m используется метод средневзвешенных невязок. Уравнения (2), (4) умножаются на величину $\sin(\pi y/b)$ и интегрируются по интервалу $[0, b]$, а уравнения (3), (5) умножаются на величину $\sin(\pi x/a)$ и интегрируются по интервалу $[0, a]$. В данной работе принимается $n = 3$. В этом случае получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{a(8C_3 + 3\pi C_1)\nu}{b} - \frac{8b(3C_4 + 2C_5)}{a} &= 0, & \frac{b(8C_4 + 3\pi C_0)\nu}{a} - \frac{8a(3C_3 + 2C_5)}{b} &= 0, \\ \frac{b(4C_0 + \pi C_2)}{a} - \frac{a\pi C_2(\nu - 2)}{b} &= 0, & \frac{a(4C_1 + \pi C_2)}{b} - \frac{b\pi C_2(\nu - 2)}{a} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Потенциальная энергия пластины равна

$$U_1 = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \nu)]$; E — модуль Юнга.

Работа внешней силы равна

$$U_2 = q_0 \int_0^b \int_0^a w dx dy,$$

следовательно, потенциальная энергия всей системы равна

$$U = U_1 - U_2.$$

Кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии пластины и кинетической энергии сосредоточенных масс:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^b \int_0^a w^2 dx dy + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i w^2$$

(ρ — плотность материала пластины; ω — собственная частота колебаний; m_i — масса i -го груза).

Если консервативная система находится в состоянии устойчивого равновесия, то ее потенциальная энергия минимальна. В соответствии с методом Рэля — Ритца должны выполняться равенства

$$\frac{\partial U}{\partial C_0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_5} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_6} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_7} = 0.$$

Далее используются следующие значения геометрических и физических параметров: $h = 0,001$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7850$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $\pi = 3,1416$. При таких значениях параметров получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & a^4 b^2 (1,496\,08 b^4 q_0 - 1709,99 C_0 + 1326,05 C_5) + a^2 b^4 (0,588\,235 b^4 q_0 - 2484,85 C_0 + 988,636 C_5) + \\ & + a^6 (1,431\,58 b^4 q_0 + 318,984 C_5) + b^6 (187,638 C_5 - 1709,99 C_0) = -a^8 b^2 q_0, \\ & a^6 b^2 (16,1401 b^4 q_0 - 6419,47 C_0 + 51\,341,5 C_5) + a^4 b^4 (5,527\,678 b^4 q_0 - 26\,685 C_0 + 59\,758 C_5) + \\ & + a^2 b^6 (0,346\,02 b^4 q_0 - 19\,895,1 C_0 + 30\,778,4 C_5) + a^8 (13,7515 b^4 q_0 + 16\,913,6 C_5) + \\ & + b^6 (5852,47 C_5 - 3775,98 C_0) = -a^{10} b^2 q_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (6), (7) определяются искомые константы:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,000\,787\,904 a^4 q_0, & C_1 &= 0,000\,787\,904 a^4 q_0, & C_2 &= -0,000\,371\,56 a^4 q_0, \\ C_3 &= 0,000\,067\,287 a^4 q_0, & C_4 &= 0,000\,067\,287 a^4 q_0, & C_5 &= 0,000\,048\,396 a^4 q_0. \end{aligned}$$

Согласно принципу сохранения энергии максимальная потенциальная энергия должна быть равна максимальной кинетической энергии:

$$U_{\max} = T_{\max}. \quad (8)$$

Пренебрегая потенциальной энергией присоединенных масс и полагая $U_{\max} = U_1$, $T_{\max} = T$, из (8) получаем выражение для первой собственной частоты свободных колебаний

$$\begin{aligned} \omega &= \left\{ D \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} / \\ & \quad / \left(\rho h \int_0^b \int_0^a w^2 dx dy + \sum_i m_i w^2 \right) \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Результаты численных расчетов и их обсуждение. Ниже проводится сравнение результатов численного решения задач с помощью предложенного метода и результатов, полученных методом конечных элементов с использованием программного обеспечения COMSOL.

2.1. Прогиб пластины под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Рассмотрим задачу о деформировании квадратной пластины ($a = b = 1$ м) под действием равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 1$ Н. На рис. 2 приведены графики прогиба пластины, полученные с использованием предлагаемого метода (см. (1)) и метода конечных элементов. Максимальные значения прогиба в центральной точке пластины $w(0,5; 0,5)$, полученные с помощью предлагаемого метода и метода конечных элементов, равны 0,001 387 23 и 0,001 392 76 соответственно. Различие этих значений составляет 0,397 %.

На рис. 3 приведены зависимости прогиба пластины от координаты x в сечении $y = 0,5$, вычисленные с использованием предлагаемого метода и метода конечных элементов, при различных значениях нагрузки q_0 . Видно, что результаты, полученные с помощью этих методов, хорошо согласуются.

2.2. Собственные частоты колебаний пластины при отсутствии прикрепленных сосредоточенных масс. Полагая в уравнениях (1), (9) $m = 0$, можно определить собственные

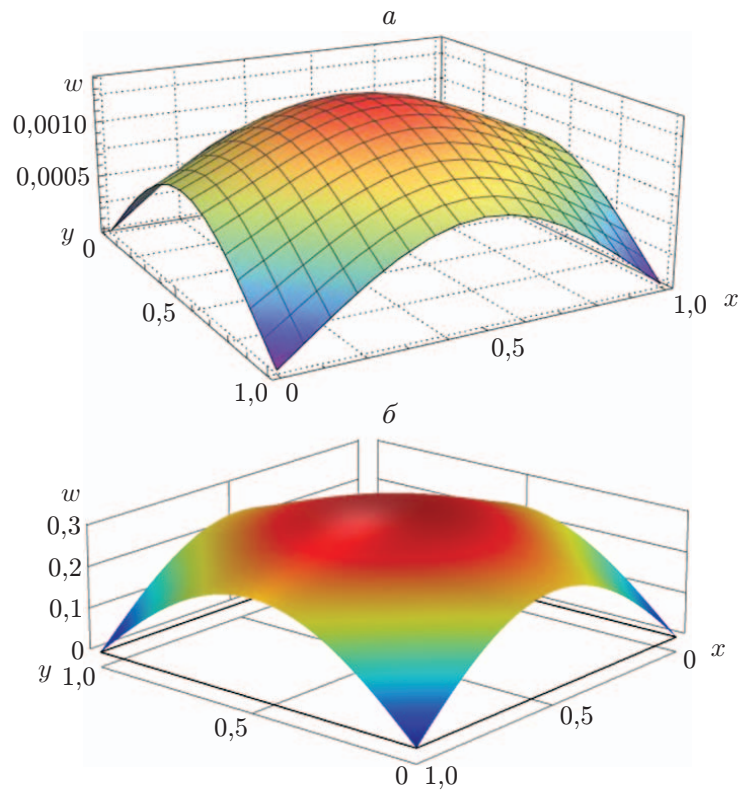


Рис. 2. Прогиб квадратной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки, вычисленный с помощью предлагаемого метода (а) и метода конечных элементов с использованием программного обеспечения COMSOL (б)

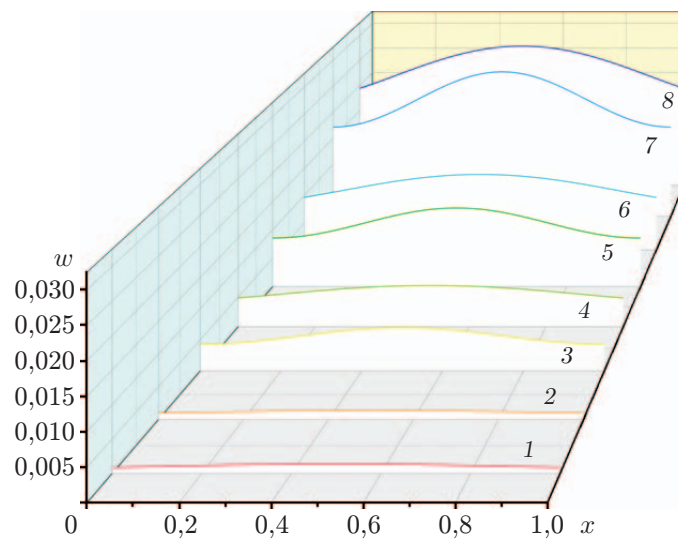


Рис. 3. Зависимости прогиба пластины от координаты x в сечении $y = 0,5$, полученные с использованием метода конечных элементов (1, 3, 5, 7) и предлагаемого метода (2, 4, 6, 8), при различных значениях нагрузки q_0 : 1, 2 — $q_0 = 1$ Н, 3, 4 — $q_0 = 5$ Н, 5, 6 — $q_0 = 10$ Н, 7, 8 — $q_0 = 20$ Н

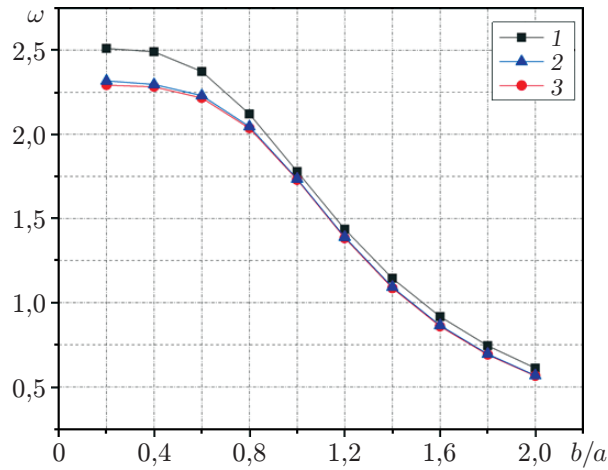


Рис. 4. Зависимости первой собственной частоты ω от параметра b/a при $a = 1$ м, вычисленные с использованием предлагаемого метода (1, 2) и метода конечных элементов (3):

1 — $n = 3$, 2 — $n = 6$

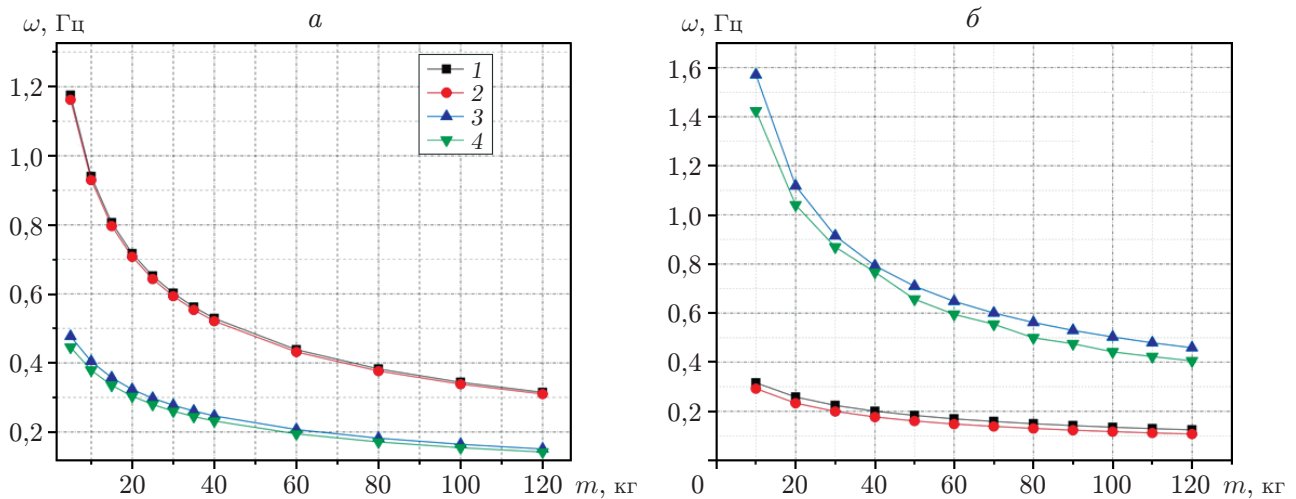


Рис. 5. Зависимости первой собственной частоты колебаний пластины от величины сосредоточенной массы, присоединенной в середине пластины (а), и от величины сосредоточенных масс, присоединенных в центрах четырех торцов пластины (б):

1, 2 — $b/a = 1$, 3, 4 — $b/a = 0,5$; 1, 3 — расчет с использованием предлагаемого метода, 2, 4 — расчет с использованием метода конечных элементов

частоты колебаний прямоугольных пластин в отсутствие присоединенных сосредоточенных масс. На рис. 4 представлены зависимости первой собственной частоты от параметра b/a при $a = 1$ м, вычисленные с помощью предлагаемого метода и метода конечных элементов. Результаты, полученные при $n = 6$ предлагаемым методом, практически совпадают с результатами, полученными методом конечных элементов.

2.3. Собственные частоты колебаний пластины с присоединенными сосредоточенными массами. Собственные частоты колебаний пластины зависят от числа присоединенных масс и их расположения на пластине. На рис. 5 приведены зависимости первой собственной частоты колебаний прямоугольной пластины от величины сосредоточенной массы, присоединенной к пластине, и от величины сосредоточенных масс, присоединенных в центрах четырех торцов пластины.

Видно, что результаты, полученные с использованием предлагаемого метода и метода конечных элементов, хорошо согласуются.

Заключение. Исследована задача о колебаниях прямоугольной пластины с присоединенными сосредоточенными массами, опертой в четырех углах. Вычислены прогиб прямоугольной пластины, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, и первая собственная частота колебаний прямоугольной пластины с присоединенными сосредоточенными массами. Результаты, полученные с использованием предложенного метода, хорошо согласуются с результатами, полученными методом конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Banerjee J. R., Papkov S. O., Liu X., Kennedy D.** Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case // J. Sound Vibrat. 2015. V. 342. P. 177–199.
2. **Li W. L., Zhang X. F., Du J. T., Liu Z. G.** An exact series solution for the transverse vibration of rectangular plates with general elastic boundary supports // J. Sound Vibrat. 2009. V. 321. P. 254–269.
3. **Zhan J., Ullah S., Zhong Y.** Accurate free vibration solutions of orthotropic rectangular thin plates by straightforward finite integral transform method // Arch. Appl. Mech. 2020. V. 90. P. 353–368.
4. **Zhong Z., Liu A., Deng J.** Analytical and experimental studies on dynamic instability of simply supported rectangular plates with arbitrary concentrated masses // Engng Structures. 2019. V. 196. 109288.
5. **Abrate S.** Vibration of point-supported rectangular composite plates // Composites Sci. Technol. 1995. V. 53, N 3. P. 325–332.
6. **Gharaibeh M. A., Obeidat A. M., Obaidat M. H.** Numerical investigation of the free vibration of partially clamped rectangular plates // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2018. V. 23, N 2. P. 385–400.
7. **Kirisik R., Yueksel S.** Free vibration analysis of a rectangular plate with Kelvin type boundary conditions // Shock Vibrat. 2013. V. 14, N 6. P. 447–457.
8. **Gharaibeh M. A., Obeidat A. M.** Vibrations analysis of rectangular plates with clamped corners // Open Engng. 2018. V. 8, N 1. P. 275–283.
9. **Zhang H., Zhang Y. P., Wang C. M.** Hencky bar-net model for vibration of rectangular plates with mixed boundary conditions and point supports // Intern. J. Structur. Stability Dynamics. 2018. V. 18, N 3. 1850046.
10. **Gorman D. J.** Accurate free vibration analysis of point supported mindlin plates by the superposition method // J. Sound Vibrat. 1999. V. 219, N 2. P. 265–277.

11. **Bian Y. H., Zhang C.** The stability analysis of a rectangular plate supported at points of the corners // MATEC Web Conf. 2016. V. 44. 02053.
12. **Du J., Liu Z. G., Li W., et al.** Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically point-supported edges // J. Vibrat. Acoust. 2015. V. 132, N 3. P. 1015–1016.
13. **Cetkin A., Orak S.** The free vibration analysis of point supported rectangular plates using quadrature element method // J. Theor. Appl. Mech. 2017. V. 55, N 3. P. 1041–1053.
14. **Batista M.** New analytical solution for bending problem of uniformly loaded rectangular plate supported on corner points // IES J. Pt A: Civil Structur. Engng. 2010. V. 2, N 3. P. 75–84.

*Поступила в редакцию 13/IX 2021 г.,
после доработки — 12/X 2021 г.
Принята к публикации 29/XI 2021 г.*
