

УДК 536.46+531

ТВЕРДОФАЗНОЕ ГОРЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634021 Томск
E-mail: anna@ispms.tsc.ru

С учетом связанного характера процессов теплопереноса и деформирования, а также возможного изменения скорости реакции под действием внутренних напряжений в отсутствие внешнего механического нагружения исследуется устойчивость плоского фронта реакции в твердой фазе к малым возмущениям в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Задача решается аналитически с использованием метода малых возмущений. Исследованы условия потери устойчивости различных режимов превращения в зависимости от технологических и физических параметров в некоторых предельных случаях.

Ключевые слова: плоский фронт реакции, устойчивость режимов превращения, обобщенное плоское напряженное состояние.

Введение. В [1] предложена модель синтеза покрытия на подложке в самоподдерживающемся режиме. Такой режим синтеза можно реализовать, например, с помощью электронного луча, развернутого в линию. Анализ стационарной задачи показал, что существуют различные режимы превращения, характеризующиеся прежде всего различными температурами продуктов и различными скоростями. При этом возникает вопрос об устойчивости превращения к малым возмущениям. В работах [2, 3] показано, что твердофазное превращение более неустойчиво к двумерным возмущениям. В настоящей работе рассматривается более простой случай — одномерные возмущения типа $\exp(\varphi\tau)$. Такой выбор возмущений объясняется особенностями поведения фронта реакции, описанными в [4] и обусловленными возможной зависимостью скорости реакции в твердой фазе от работы напряжений.

Задача для случая малых возмущений. Для того чтобы сформулировать задачу об устойчивости фронта к малым возмущениям, запишем нестационарную модель без учета тепловыделения в уравнениях теплопроводности и без кинетического уравнения в системе координат, связанной с движущимся фронтом реакции [1]:

$$\begin{aligned}
 c_{\varepsilon}\rho\left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + V_n \frac{\partial T_i}{\partial x}\right) &= \lambda_T \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T_i \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk,i}}{\partial t} + V_n \frac{\partial \varepsilon_{kk,i}}{\partial x}\right), \\
 \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy,i}}{\partial x^2} + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx,i}}{\partial x^2} - 3K\alpha_T \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}\right) + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy,i}}{\partial x^2} &= \\
 &= \rho \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx,i}}{\partial t^2} + 2V_n \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx,i}}{\partial t \partial x} + V_n^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx,i}}{\partial x^2}\right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy,i}}{\partial x^2} = \rho \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy,i}}{\partial t^2} + 2V_n \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy,i}}{\partial t \partial x} + V_n^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy,i}}{\partial x^2} \right).$$

Здесь T — температура; x — пространственная координата; t — время; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; c_ε — теплоемкость при постоянных деформациях; ρ — плотность; λ_T — теплопроводность; λ, μ — коэффициенты Ламе; $K = \lambda + 2\mu/3$ — изотермический модуль всестороннего сжатия; α_T — температурный коэффициент линейного расширения; $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$; V_n — скорость фронта реакции.

В безразмерных переменных

$$\theta_i = \frac{T_i - T_0}{T_{b0} - T_0}, \quad X = \frac{V_{n0}x}{\varkappa_T}, \quad S_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_*}, \quad e_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_*},$$

где T_{b0} — температура продуктов реакции в тепловой модели; V_{n0} — скорость невозмущенной (стационарной) волны; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; T_0 — начальная температура; $\varkappa_T = \lambda_T/(c_\varepsilon \rho)$ — температуропроводность; $\sigma_* = 3K\alpha_T(T_{b0} - T_0)$; $\varepsilon_* = 3K\alpha_T(T_{b0} - T_0)/(\lambda + 2\mu)$, система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta_i}{\partial X} &= \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2} - (\theta_b + \sigma) \omega \left(\frac{\partial e_{kk,i}}{\partial \tau} + U \frac{\partial e_{kk,i}}{\partial X} \right), \\ \gamma_2 \left[\left(\gamma_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 e_{yy,i}}{\partial X^2} + (\gamma_1 + 1) \frac{\partial^2 e_{xx,i}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2} \right] &= \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 e_{xx,i}}{\partial \tau^2} + 2U \frac{\partial^2 e_{xx,i}}{\partial \tau \partial X} + U^2 \frac{\partial^2 e_{xx,i}}{\partial X^2} \right), \quad (2) \\ \frac{\gamma_2}{2} \frac{\partial^2 e_{yy,i}}{\partial X^2} &= \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 e_{yy,i}}{\partial \tau^2} + 2U \frac{\partial^2 e_{yy,i}}{\partial \tau \partial X} + U^2 \frac{\partial^2 e_{yy,i}}{\partial X^2} \right), \\ &i = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь индекс $i = 1$ соответствует реагентам, $i = 2$ — продуктам реакции,

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma_2 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 1, \quad \omega = \frac{(3K\alpha_T)^2}{\lambda + 2\mu} \frac{T_{b0} - T_0}{c_\varepsilon \rho}, \quad \alpha = \frac{V_{n0}^2}{(\lambda + 2\mu)/\rho},$$

$\theta_b = (T_b - T_{b0})/(T_{b0} - T_0)$ — корень уравнения (температура продуктов реакции)

$$\delta_0 \theta_b^2 + (1 + \delta_0 \sigma) \theta_b - 1 = 0; \quad (3)$$

$$\delta_0 = \frac{\omega(2\gamma_2 - \alpha^2)}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2}, \quad \sigma = \frac{T_0}{T_{b0} - T_0}.$$

Соотношения между отличными от нуля компонентами тензоров напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} S_{yy} &= \gamma_2 [\gamma_1 e_{xx} + (1 + \gamma_1) e_{yy} - \theta], \\ S_{xx} &= \gamma_2 [\gamma_1 e_{yy} + (1 + \gamma_1) e_{xx} - \theta], \\ e_{kk} &= \theta_i + \gamma_2 [e_{yy,i} + e_{xx,i}] \end{aligned} \quad (4)$$

справедливы в нестационарной волне как в реагентах, так и в продуктах реакции.

Условия на возмущенной границе $X = \zeta$ в безразмерных переменных можно представить в форме

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_2 = \theta_s, \quad \frac{d\theta_1}{dX} = \frac{d\theta_2}{dX} + U &\equiv \frac{d\theta_2}{dX} + \frac{V_n}{V_{n0}}, \\ e_{xx,1} = e_{xx,2}, \quad \frac{de_{xx,1}}{dX} = \frac{de_{xx,2}}{dX} + \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1(1 + \gamma_1) - \alpha^2}, \\ e_{yy,1} = e_{yy,2}, \quad \frac{de_{yy,1}}{dX} = \frac{de_{yy,2}}{dX}, \\ \frac{d\zeta}{d\tau} = 1 - U. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее равенство есть условие полного потребления вещества в зоне реакции [2, 3].

Решение нестационарной задачи (2), (5) будем искать в виде

$$U = U^0 + U', \quad \theta_i = \theta_i^0 + \theta'_i, \quad \dots, \quad (6)$$

где штрих соответствует малым возмущениям; $U^0 \equiv 1$.

Подставляя (6) в (2) с учетом решения стационарной задачи [1] и пренебрегая малыми слагаемыми, можно показать, что для возмущений выполняется система уравнений, подобная (2), но с $U = 1$. К малым слагаемым относятся также слагаемые вида $U' d\theta_i^0/dX$, поскольку вдали от зоны реакции $d\theta_1^0/dX \ll 1$ и $d\theta_2^0/dX = 0$.

Для того чтобы сформулировать условия для возмущений на границе $X = \zeta$, представим возмущенную скорость фронта в виде ряда в окрестности невозмущенного значения V_{n0} . В физических переменных имеем

$$V_n = V_{n0} + \left(\frac{\partial V_n}{\partial T}\right)_0 (T - T^0) + \left(\frac{\partial V_n}{\partial \Pi}\right)_0 (\Pi - \Pi^0),$$

где $\Pi = -\sum_{(i,j)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$; Π^0, T^0 — работа напряжений и температура в стационарной волне.

Переходя к безразмерным переменным, запишем

$$U = V_n/V_{n0} = 1 + z_1(\theta_s - \theta_s^0) - z_2(\bar{\Pi}_s - \bar{\Pi}_s^0), \quad (7)$$

где $\bar{\Pi} = \Pi/(\sigma_* \varepsilon_*)$; индекс s соответствует значениям величин на поверхности; z_1, z_2 — коэффициенты чувствительности скорости реакции к температуре [2, 3] и работе напряжений [5]:

$$z_1 = \frac{T_{b0} - T_0}{V_{n0}} \left(\frac{\partial V_n}{\partial T}\right)_0, \quad z_2 = -\frac{\sigma_* \varepsilon_*}{V_{n0}} \left(\frac{\partial V_n}{\partial \Pi}\right)_0.$$

Следовательно,

$$\bar{\Pi}' = \bar{\Pi}_s - \bar{\Pi}_s^0 = -\gamma_2 [2\gamma_1 e_{xx}^0 e'_{yy} + 2(1 + \gamma_1) e_{xx}^0 e'_{xx} - \theta_s' e_{xx}^0 - \theta_s^0 (e'_{xx} + e'_{yy})].$$

С использованием (4) и стационарного решения [1] найдем

$$\bar{\Pi} = -\gamma_2 \theta_b \left(\frac{\gamma_2(1 + \gamma_1) + \alpha^2}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2} e'_{xx,s} - \frac{\gamma_2 \theta_s'}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2} \right).$$

Раскладывая в граничных условиях (5) все величины в ряд в окрестности невозмущенной границы и учитывая условия стационарной задачи, получаем условия для возмущений [2, 3]

$$\frac{d\theta_1^0}{dX} \zeta + \theta'_1 = \frac{d\theta_2^0}{dX} \zeta + \theta'_2 = \theta'_s,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta_1^0}{dX^2}\zeta + \frac{\partial\theta_1'}{\partial X} &= \frac{d^2\theta_2^0}{dX^2}\zeta + \frac{\partial\theta_2'}{\partial X} + z_1\theta'_s - z_2\bar{\Pi}'_s, \\
\frac{de_{xx,1}^0}{dX}\zeta + e'_{xx,1} &= \frac{de_{xx,2}^0}{dX}\zeta + e'_{xx,2} = e'_{xx,s}, \\
\frac{d^2e_{xx,1}^0}{dX^2}\zeta + \frac{\partial e'_{xx,1}}{\partial X} &= \frac{d^2e_{xx,2}^0}{dX^2}\zeta + \frac{\partial e'_{xx,2}}{\partial X} + \gamma_2 \frac{z_1\theta'_s - z_2\bar{\Pi}'_s}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2}, \\
\frac{d\zeta}{d\tau} &= -(z_1\theta'_s - z_2\Pi'_s), \\
\frac{de_{yy,1}^0}{dX}\zeta + e'_{yy,1} &= \frac{de_{yy,2}^0}{dX}\zeta + e'_{yy,2}, \quad \frac{d^2e_{yy,1}^0}{dX^2}\zeta + \frac{\partial e'_{yy,1}}{\partial X} = \frac{d^2e_{yy,2}^0}{dX^2}\zeta + \frac{\partial e'_{yy,2}}{\partial X}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, задача для возмущений сформулирована.

Условия устойчивости. Условия устойчивости стационарного фронта получим, анализируя характер эволюции возмущения, заданного в виде

$$\zeta = a \exp(\varphi\tau), \tag{9}$$

где a — амплитуда возмущения; φ — комплексная частота.

Решение задачи для возмущений будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\theta'_i &= f_i \exp(\varphi\tau \pm r_i X), \\
e'_{xx,i} &= h_i \exp(\varphi\tau \pm r_i X), \quad e'_{yy,i} = g_i \exp(\varphi\tau \pm r_i X),
\end{aligned} \tag{10}$$

где логарифмический декремент r_1 и знак “+” соответствуют области реагентов ($X < 0$), а логарифмический декремент r_2 и знак “−” — области продуктов реакции ($X > 0$).

Подставляя (9) в систему уравнений для возмущений (5), где $U = 1$, получаем систему алгебраических уравнений относительно амплитуд f_1 , h_1 , g_1 и f_2 , h_2 , g_2 :

$$\begin{aligned}
f_i[(\varphi \pm r_i)(1 + \omega(\theta_b + \sigma)) - r_i^2] + (h_i + g_i)\omega(\theta_b + \sigma)\gamma_2(\varphi \pm r_i) &= 0, \\
-f_i\gamma_2 r_i^2 + h_i[\gamma_2(1 + \gamma_1)r_i^2 - \alpha^2(\varphi \pm r_i)^2] + g_i\gamma_2(\gamma_1 + 1/2)r_i^2 &= 0;
\end{aligned} \tag{11}$$

$$g_i[\gamma_2 r_i^2/2 - \alpha^2(\varphi \pm r_i)^2] = 0. \tag{12}$$

Из уравнений (12) следует $g_1 = 0$, $g_2 = 0$.

Условие разрешимости уравнений (11) представляет собой равенство нулю определителей, составленных из коэффициентов для этих уравнений:

$$[(\varphi \pm r_i)(1 + \omega(\theta_b + \sigma)) - r_i^2][\gamma_2(1 + \gamma_1)r_i^2 - \alpha^2(\varphi \pm r_i)^2] + \omega(\theta_b + \sigma)\gamma_2^2 r_i^2(\varphi \pm r_i) = 0, \tag{13}$$

$$i = 1, 2.$$

Это уравнение может быть разрешено аналитически для двух частных случаев $\omega = 0$ или $\alpha = 0$, т. е. для несвязанной задачи, и для случая, когда силы инерции пренебрежимо малы.

Так как $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, то на границе раздела остаются пять условий. Используя (9), (10) и учитывая решение стационарной задачи [1], из первых пяти линеаризованных граничных условий (8) найдем систему линейных уравнений относительно амплитуд возмущений f_i , h_i , g_i , условие разрешимости которой сводится к уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 + \delta & r_1 & r_2 - \beta & 0 & -\varkappa \\ \gamma & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \gamma(1 + \delta) & 0 & -\beta\gamma & r_1 & r_2 - \varkappa\gamma \\ \varphi & 0 & \beta & 0 & \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2}, \quad \beta = z_1 - \frac{z_2\gamma_2^2\theta_b}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2},$$

$$\varkappa = z_2\gamma_2\theta_b \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1) + \alpha^2}{\gamma_2(1 + \gamma_1) - \alpha^2}, \quad \delta = \delta_0(\theta_b + \sigma).$$

Последнее соотношение записано с учетом равенства $(1 + \delta)\theta_b \equiv 1$, следующего из (3).

Раскрывая определитель, найдем

$$(r_1 + r_2)[\varphi(r_1 + r_2) + (\beta + \varkappa\gamma)(r_1 - \varphi - 1 - \delta)] = 0. \quad (14)$$

Анализ уравнений (13), (14) позволяет определить условия устойчивости стационарного фронта к одномерным возмущениям.

Исследование устойчивости для частных значений параметров задачи. Рассмотрим следующие случаи.

1. При $\alpha = 0$, $z_2 = 0$, $\omega = 0$ получаем известный результат. Действительно, в этом случае из (13) следует $\varphi + r_1 - r_1^2 = 0$, $\varphi - r_2 - r_2^2 = 0$. Тогда из (14) находим

$$\varphi[4\varphi^2 + (-z_1^2 + 4z_1 + 1)\varphi + z_1] = 0.$$

Следовательно,

$$r_{1,2} = (\sqrt{1 + 4\varphi} \pm 1)/2,$$

и условие устойчивости стационарного режима принимает вид [2, 3]

$$0 < z_1 < z_{1*} = 2 + \sqrt{5}.$$

В этом случае имеем

$$\theta_b = 1, \quad \theta_1^0 = \exp(X), \quad \theta_2^0 = 1,$$

что следует также из классического решения. При этом

$$e_{xx,i}^0 = \frac{\theta_i^0}{1 + \gamma_1}, \quad e_{zz,i}^0 = \frac{\theta_i^0}{1 + \gamma_1}, \quad S_{xx,i}^0 \equiv 0, \quad S_{yy,i}^0 = -\frac{\gamma_2\theta_i^0}{1 + \gamma_1}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то уравнения (13) имеют дополнительные корни

$$r_{1,2} = \varphi\alpha / (\sqrt{\gamma_2(1 + \gamma_1)} \pm \alpha)$$

при $\alpha < \sqrt{\gamma_2(1 + \gamma_1)} \equiv \gamma_*$. Полученные решения соответствуют волне механических возмущений, сопровождающей фронт твердофазного горения.

Условие потери устойчивости механической волны получим, анализируя уравнение

$$\varphi^2 - \frac{\gamma_* - \alpha}{2\alpha} z_1\varphi - \frac{\gamma_*^2 - \alpha^2}{2\gamma_*\alpha} = 0. \quad (15)$$

Из (15) следует

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_* - \alpha}{2\alpha} z_1 \left(1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\alpha}{\gamma_*} \frac{\gamma_* + \alpha}{\gamma_* - \alpha} \frac{1}{z_1^2}} \right).$$

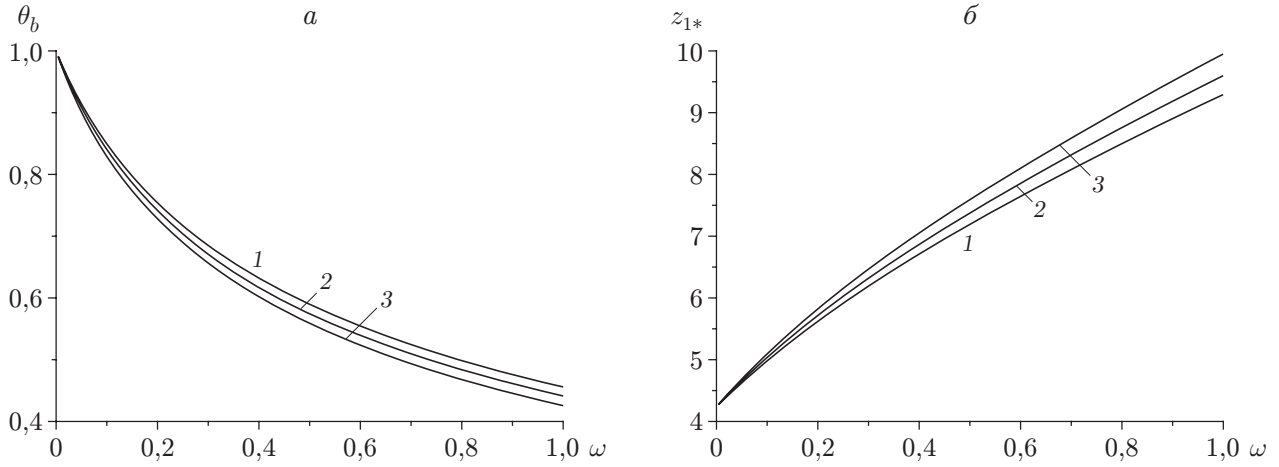


Рис. 1. Зависимости температуры продуктов (а) и предела устойчивого горения (б) от коэффициента связанности ($\alpha = 0, z_2 = 0, \sigma = 0,35$):
 1 — $\gamma_2 = 0,65$; 2 — $\gamma_2 = 0,75$; 3 — $\gamma_2 = 0,85$

Если $\alpha < \gamma_* = \sqrt{\gamma_2(1 + \gamma_1)} = \sqrt{\gamma_2(2 - \gamma_2)}$, то уравнение (15) имеет два действительных корня, один из которых положительный ($\varphi_1 > 0$), а другой отрицательный ($\varphi_2 < 0$). Это позволяет сделать вывод, что волна механических возмущений, порожденная медленной волной горения, абсолютно неустойчива.

Если $\alpha > \gamma_*$, то $\text{Re}(\varphi) < 0$ и волна механических возмущений должна быть абсолютно устойчивой. Однако в [1] приведено условие существования волны горения в данной области параметров $\alpha < \gamma_*$. Следовательно, такой волны механических возмущений не существует. Иными словами, область существования стационарной волны горения не совпадает с областью устойчивости волны механических возмущений (и даже не пересекается с ней).

2. При $\alpha = 0, z_2 = 0, \omega \neq 0$ (т. е. для заведомо медленной волны горения) получаем

$$\delta = \frac{2\omega}{1 + \gamma_1} (\theta_b + \sigma),$$

и, следовательно, единственное значение температуры

$$\theta_b = [\sqrt{(1 + B\sigma)^2 + 4B} - (1 + B\sigma)] / (2B).$$

Здесь $B = 2\omega / (1 + \gamma_1) \equiv 2\omega / (2 - \gamma_2)$. Зависимость θ_b от ω показана на рис. 1, а.

Дисперсионные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} [(\varphi + r_1)(1 + A) - r_1^2](1 + \gamma_1) + A(\varphi + r_1) &= 0, \\ [(\varphi - r_2)(1 + A) - r_2^2](1 + \gamma_1) + A(\varphi - r_2) &= 0, \end{aligned}$$

где $A = \omega(\theta_b + \sigma) > 0$. Положительные корни этих уравнений есть

$$r_{1,2} = \frac{1}{2(1 + \gamma_1)} [\sqrt{C^2 + 4(1 + \gamma_1)C\varphi} \pm C],$$

где $C = (1 + A)(1 + \gamma_1) + A(1 - \gamma_1) = 1 + 2A + \gamma_1 > 0$.

Условие устойчивости стационарного фронта можно получить, анализируя уравнение

$$a_0\varphi^3 + a_1\varphi^2 + a_2\varphi + a_3 = 0,$$

где

$$a_0 = 16(1 + \gamma_1)C, \quad a_1 = 16z_1(1 + \gamma_1)C + 4C^2 - 4z_1^2(1 + \gamma_1)^2,$$

$$a_2 = 4z_1^2[(1 + \gamma_1)C - 2(1 + \gamma_1)^2 - (2A - 1 - \gamma_1)(1 + \gamma_1)] + 4z_1C^2,$$

$$a_3 = z_1^2[C^2 - 4(1 + \gamma_1)^2 - 4(2A - 1 - \gamma_1)(1 + \gamma_1) - (2A - 1 - \gamma_1)^2].$$

Условие потери устойчивости обусловлено сменой знака коэффициента a_1 , приводящей к появлению корней с положительной действительной частью при выполнении условия

$$z_1 > z_{1*} = \frac{C}{1 + \gamma_1} (2 + \sqrt{5}) \equiv \left(1 + \frac{2\omega(\theta_b + \sigma)}{1 + \gamma_1}\right) (2 + \sqrt{5}) > z_{1*}^0.$$

Таким образом, чем больше коэффициент связанности, тем ниже температура продуктов, но шире область устойчивого горения (см. рис. 1).

3. При $z_2 \neq 0$, но $\omega = 0$, $\alpha = 0$ получаем

$$\beta + \varkappa\gamma \equiv z_1,$$

при этом условие устойчивости стационарной волны горения не меняется.

Если $\alpha \neq 0$, то, так же как и в [4–6], получаем два предела устойчивого горения (верхний и нижний), даже если $\omega = 0$. В этом случае

$$\theta_b = 1, \quad \beta + \varkappa\gamma = z_1 + z_2 2\gamma_2^2 \alpha^2 / (\gamma_*^2 - \alpha^2)^2.$$

Если $z_2 > 0$, т. е. напряжения обуславливают увеличение скорости реакции (см. (7)), то зависимость скорости реакции от работы напряжений приводит к снижению предела устойчивого горения:

$$z_1 < 2 + \sqrt{5} - \Omega z_2.$$

Здесь $\Omega = 2\gamma_2^2 \alpha^2 / (\gamma_*^2 - \alpha^2)^2$. Очевидно, что неравенство имеет смысл, если $z_2 < (2 + \sqrt{5}) / \Omega$.

Если $z_2 < 0$, т. е. напряжения вызывают замедление реакции, то

$$z_1^b < z_1 < z_1^a.$$

Здесь $z_1^a = 2 + \sqrt{5} + \Omega|z_2|$; $z_1^b = 2 - \sqrt{5} + \Omega|z_2|$. Очевидно, что для существования нижнего предела устойчивого горения должно выполняться неравенство

$$z_1^b > (\sqrt{5} - 2) / \Omega.$$

Область существования устойчивых стационарных режимов превращения в твердой фазе в условиях плоского напряженного состояния показана на рис. 2. Устойчивому распространению фронта соответствуют области между сплошными и штриховыми кривыми с одинаковыми номерами. Из рис. 2 следует, что имеются области устойчивого распространения как медленных режимов твердофазного горения ($\alpha < 1$), так и высокоскоростных режимов. Чем существеннее скорость реакции зависит от напряжений, тем выше сдвигается область существования устойчивых режимов (кривые 1 и 2 на рис. 2, а). Уменьшение γ_2 приводит к смещению начала области устойчивых режимов в сторону меньших скоростей (рис. 2, б).

Заключение. Таким образом, на основе предложенной в [1] модели показано, что условия фиксации образца в эксперименте оказывают существенное влияние на устойчивость стационарного фронта превращения. Однако в любом случае устойчивость можно характеризовать двумя пределами (верхним и нижним), имеющими разный физический смысл. Подложка может оказывать существенное влияние как на сами режимы распространения фронта реакции, так и на их устойчивость, не только забирая тепло из зоны реакции, что учтено в исследованной модели. Учет различия свойств покрытия и подложки приводит к появлению новых параметров, основные из которых — отношение теплоемкостей материалов и отношение их температурных коэффициентов линейного расширения. В конечном счете это приведет к переопределению эффективных параметров в основных

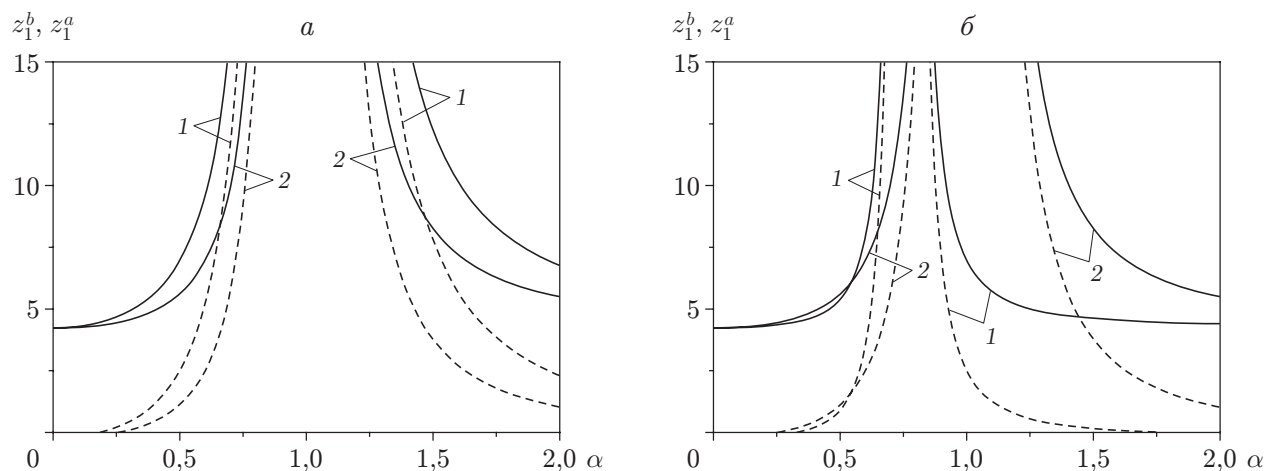


Рис. 2. Зависимость пределов устойчивого распространения фронта от параметров модели ($\omega = 0$, $z_2 \neq 0$):
 а — $\gamma_2 = 0,85$ ($1 - z_2 = -4$; $2 - z_2 = -2$); б — $z_2 = -2$ ($1 - \gamma_2 = 0,35$; $2 - \gamma_2 = 0,85$);
 сплошные кривые — z_1^a ; штриховые — z_1^b

уравнениях и областей существования различных режимов превращения. Например, вместо параметра c_ε в модели появится параметр $c_{\varepsilon,c}[1 + hc_\varepsilon/(hc_\varepsilon c)]$, а вместо α_T — параметр $\alpha_{T,c}[1 + h\alpha_T/(hc\alpha_{T,c})]$. В этом случае характер стационарных решений и условия потери их устойчивости должны быть исследованы дополнительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Князева А. Г.** Твердофазное горение в условиях плоского напряженного состояния. 1. Стационарная волна горения // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 2. С. 27–38.
2. **Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В.** Двумерная устойчивость горения конденсированных систем // ПМТФ. 1971. № 5. С. 51–59.
3. **Шкадинский К. Г., Хайкин Б. И.** Влияние теплотерь на распространение фронта экзотермической реакции в k -фазе // Горение и взрыв. М.: Наука, 1972. С. 104–109.
4. **Knyazeva A. G.** The stationary modes of the reaction front and their stability for solid media with regard to chemically induced internal stresses and strains // Combustion of energetic materials: Select. papers of the 5th Intern. symp. on special topics in chemical propulsion, Stresa, Italy, 18–22 June 2000. S. l.: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 867–878.
5. **Князева А. Г.** Распространение волны горения в деформируемой сплошной среде // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 3. С. 48–53.
6. **Князева А. Г., Сорокова С. Н.** Устойчивость волны горения в вязкоупругой среде к малым одномерным возмущениям // Физика горения и взрыва. 2006. Т. 42, № 4. С. 50–60.

Поступила в редакцию 19/V 2009 г.