

УДК 539.3

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОНИКАНИЮ КОНУСА В МЕРЗЛЫЙ ГРУНТ

В. Л. Котов, А. М. Брагов, В. В. Баландин,
А. Ю. Константинов, Вл. Вл. Баландин

Научно-исследовательский институт механики Национального
исследовательского Нижегородского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского, 603600 Нижний Новгород, Россия
E-mails: vkotov@inbox.ru, bragov@mech.unn.ru, balandin@mech.unn.ru,
constantinov.al@yandex.ru, rustydog2007@yandex.ru

Приводятся данные эксперимента по определению предела прочности мерзлого грунта при одноосном сжатии в диапазоне значений скорости деформации $400 \div 2700 \text{ с}^{-1}$. Получены конечные выражения для коэффициентов квадратичной аппроксимации, зависящих от скорости удара нормального к поверхности ударника напряжения и экспериментально определяемых физико-механических параметров грунта — ударной адиабаты и динамической прочности при сжатии. Проведена верификация полученных формул на основе сравнения с известными данными экспериментов по внедрению стального конического ударника в мерзлый песчаный грунт. Показано, что различие результатов двусторонних оценок и экспериментов не превышает 15 %.

Ключевые слова: мерзлый грунт, прочность, сжимаемость, условие пластичности Мора — Кулона — Треска, внедрение, конический ударник.

DOI: 10.15372/PMTF20210114

Введение. Исследования динамических свойств льда и мерзлого грунта проводятся на основе экспериментальных данных, математических моделей и численных расчетов. С использованием методики Кольского и системы разрезных стержней Гопкинсона [1] получены диаграммы деформирования мерзлого песка при температуре до $-28 \text{ }^\circ\text{C}$ и скоростях деформации порядка $10^2 \div 10^3 \text{ с}^{-1}$. Экспериментально показано, что в водонасыщенном мерзлом грунте при температуре менее $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ скорость продольной волны составляет $3 \div 4 \text{ км/с}$ [2, 3]. Анализ экспериментальных зависимостей прочности образцов льда и мерзлого песчаного грунта от скорости деформации с использованием структурно-временного подхода проведен в работе [4]. В работе [5] экспериментально определена величина предела прочности на сжатие для пресноводного льда в зависимости от скорости деформации. Сравнение данных эксперимента и результатов расчетов процесса пробития мишени из льда высокоскоростными ударниками проводится в работе [6]. В [7] численно проанализировано влияние глубины промерзания водонасыщенного грунта на конечную глубину проникания конических ударников и проведено сравнение полученных формул с известными эмпирическими формулами. В работе [8] приводятся результаты экспериментальных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 19-08-00977а, 19-08-00430а).

© Котов В. Л., Брагов А. М., Баландин В. В., Константинов А. Ю., Баландин Вл. Вл., 2021

и численных исследований силовых характеристик процесса проникания стального конического ударника в водонасыщенный мерзлый песок.

В работах [8–10] показано, что в задачах об ударе и проникании ударника в грунт результаты численных расчетов с использованием модели упругопластической грунтовой среды Григоряна, в которой учитываются зависимость предела текучести от давления и ограниченность величины сопротивления сдвигу, хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работах [10, 11] приводятся модели проникания ударников в мягкий грунт, основанные на решении задачи о расширении цилиндрической и сферической полостей. Однако для водонасыщенного грунта при отрицательных температурах, обладающего значительной начальной прочностью, сравнение результатов, полученных с использованием подобных моделей, с экспериментальными данными не проводилось.

В данной работе на основе экспериментальных данных о динамической прочности грунта предлагается модель двусторонней экспресс-оценки сопротивления прониканию конического ударника в мерзлый грунт без проведения численных расчетов.

1. Испытания замороженного песчаного грунта. При проведении динамических испытаний мягких грунтов в замороженном состоянии использовалась экспериментальная установка, включающая газовую пушку калибром 20 мм, комплекс измерительно-регистрающей аппаратуры и комплект изготовленных из алюминиевого сплава Д16Т разрезных стержней Гопкинсона диаметром 20 мм и длиной 1500 мм каждый, испытываемых на сжатие.

Установка была модифицирована для проведения испытаний при отрицательных температурах. Из пенопласта была изготовлена специальная камера, в которой размещались образец и примыкающие к нему концы мерных стержней. Камера охлаждалась парами жидкого азота в течение нескольких минут, так чтобы концы мерных стержней и образец имели температуру $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$. Температура концов стержней и образцов регистрировалась термопарой.

Для проведения динамических испытаний замороженного грунта были изготовлены образцы в виде цилиндров высотой 10 мм и диаметром 16 мм из песка, содержащего воду, масса которой составляла 18 % массы песка. Для приготовления образцов использовалась питьевая вода. Песок с массовой долей воды 18 % был практически полностью насыщен водой. Для изготовления образцов использовалась естественная песчаная смесь, из которой были удалены частицы диаметром более 1 мм и менее 0,1 мм. Плотность сухого песка составляла 1750 кг/м^3 . Образцы размещались в специальных цилиндрических обоймах. Песок с влажностью 18 % засыпался в обойму и уплотнялся до плотности, приблизительно равной 2050 кг/м^3 . Затем образцы замораживались в морозильной камере при температуре $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ в течение 24 ч, после чего извлекались из обойм и вновь выдерживались при температуре $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ в течение не менее 24 ч.

Проведено 60 экспериментов с песком при температуре $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$. Скорость деформации при проведении испытаний варьировалась в диапазоне $400 \div 2600\text{ с}^{-1}$. Полученные диаграммы деформирования приведены на рис. 1. Видно, что в эксперименте скорость деформации остается практически постоянной. На начальном участке зависимость напряжения от деформации близка к линейной. Эта зависимость имеет максимум при деформации $\varepsilon = 3,0 \div 3,5\text{ \%}$, после чего происходит быстрое уменьшение напряжения, что свидетельствует о разрушении образцов грунта. Такой характер зависимости подобен характеру зависимостей, имеющих место при разрушении горных пород и бетонов, а также льда [5] при одноосном сжатии. Максимум напряжений, достигаемый в экспериментах, был принят в качестве предела прочности σ^* .

Зависимость предела прочности σ^* от скорости деформации приведена на рис. 2.

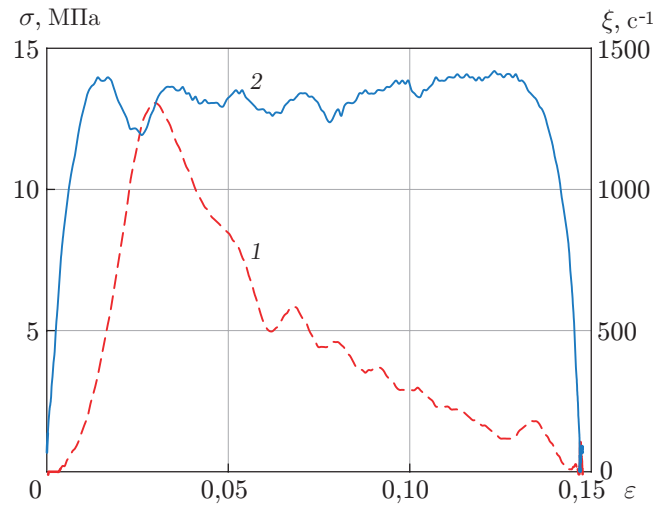


Рис. 1. Зависимости напряжения σ (1) и скорости деформации ξ (2) замороженного водонасыщенного песка от деформации ε

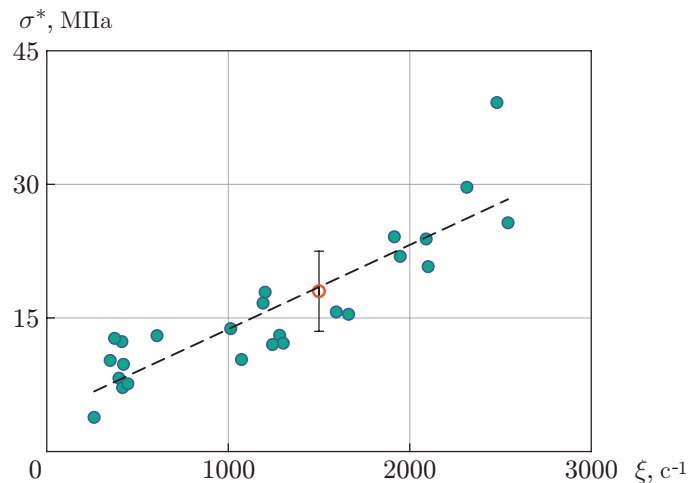


Рис. 2. Зависимость предела прочности от скорости деформации при одноосном сжатии мерзлого песка, имеющего влажность 18 %, при температуре $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$: темные точки — данные эксперимента, светлая точка — $\sigma^* = 18\text{ МПа}$, линия — аппроксимация экспериментальных данных

Следует отметить достаточно большой разброс экспериментальных данных для образцов, испытанных при близких условиях. Прочность на сжатие растет с увеличением скорости деформации образцов из водонасыщенного песка.

В исследованном диапазоне скоростей деформации $\xi = 400 \div 2700\text{ с}^{-1}$ зависимость предела прочности на сжатие от деформации является линейной. Такая зависимость $\sigma^*(\xi)$ характерна также для пресноводного льда [5].

2. Уравнение состояния мерзлого грунта. В работе [10] экспериментально-расчетным методом определены параметры дробно-рациональной зависимости предела текучести от давления водонасыщенного песка

$$\sigma_Y(p) \equiv kp / (1 + kp/Y_M),$$

где Y_M , k — постоянные коэффициенты.

На основе зависимости аналогичного вида

$$\sigma_Y(p) \equiv Y_0 + kp/(1 + kp/(Y_M - Y_0)),$$

в которой учтено, что начальная прочность (сцепление) Y_0 отлична от нуля, проведен численный расчет процессов удара и проникания конического ударника в мерзлый грунт [8]. Уравнение состояния мерзлого грунта в работе [8] формулировалось в предположении, что при малых давлениях, не превышающих предела прочности при сжатии, мерзлый грунт деформируется упруго. В условиях одноосного сжатия при значении напряжения, равном пределу прочности σ^* , справедливо равенство

$$\sigma^* = \sigma_Y \approx Y_0 + k\sigma^*/3,$$

из которого следует $Y_0 = (1 - k/3)\sigma^*$. При больших давлениях имеет место фазовый переход лед — вода, в результате чего поведение мерзлого грунта становится близким к поведению водонасыщенного грунта. В [8] отмечено, что при температуре -18°C фазовый переход происходит при давлении, приближенно равном 200 МПа.

В рамках приближенной модели нелинейную зависимость предела текучести от давления можно аппроксимировать на основе критерия текучести Мора — Кулона с ограничением Треска (далее — критерий текучести Мора — Кулона — Треска):

$$\sigma_Y(p) \equiv \begin{cases} Y_0 + kp, & 0 < p \leq p_M, \\ Y_M, & p > p_M, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_M = (Y_M - Y_0)/k$.

Динамическая сжимаемость водонасыщенного мерзлого грунта при высоком давлении описывается ударной адиабатой [12]:

$$U_s = C_0 + su_p \quad (2)$$

(U_s , u_p — скорость движения фронта ударной волны и массовая скорость за ним; константа C_0 близка к скорости распространения плоской волны сжатия в грунте при малых давлениях; s — предельная сжимаемость грунта).

3. Аппроксимация зависимости напряжения от скорости. В соответствии с получившей широкое распространение моделью [13] контактное давление при взаимодействии ударника с сопротивляющейся средой определяется как напряжение на границе полости, расширяющейся из точки в безграничной среде. В качестве скорости расширения полости принимается проекция вектора скорости движения ударника на нормаль к элементу поверхности тела. Ранее получено аналитическое решение данной задачи, основанное на предположении о несжимаемости среды за фронтом ударной волны, сопротивление сдвигу определяется условиями пластичности Треска и Мора — Кулона [13, 14]. Разработаны методики вычисления сил сопротивления прониканию жесткого тела в мягкий грунт, получены зависимости максимальной силы сопротивления внедрению жесткой сферы и конуса в сухой и водонасыщенный песок от скорости удара [10], качественно и количественно согласующиеся с известными экспериментальными данными при изменении скорости удара в диапазоне $50 \div 450$ м/с. Однако при малых давлениях и скоростях внедрения приближенный подход [10] не может быть использован для оценки напряжения.

В данной работе в качестве значения напряжения при малых скоростях предлагается использовать величину критического давления — минимального давления, необходимого для расширения полости. Ранее было получено выражение для приближенного определения критического давления в упругопластической среде при условии пластичности Мора — Кулона [14]

$$\frac{\sigma_C}{Y_0} = \frac{1}{k} \left(\frac{2}{\alpha} \varepsilon_C^{-\alpha k} - 1 \right), \quad (3)$$

где $\varepsilon_C^3 = 3(1 - \nu)Y_0/E$; $\alpha = 6/(3 + 2k)$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. В работе [11] показано, что погрешность аппроксимации формулы (3) не превышает 6 % при изменении коэффициента внутреннего трения во всем допустимом диапазоне $0 < k < 1,5$ и изменении начального значения предела текучести на три порядка в диапазоне $0,01 \text{ МПа} < Y_0 < 10,00 \text{ МПа}$.

Уточненная формула для определения величины ε_C

$$\varepsilon_C^3 = \beta - \frac{(1 - 2\nu)\beta^2}{(1 - \nu)k} \left[\frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{\alpha k/3} - 1 \right], \quad \beta = \frac{3(1 - \nu)Y_0}{E} \quad (4)$$

позволяет уменьшить погрешность до значения менее 1 % [14].

При скоростях $V > V_M$ применяется решение [10] задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности Треска (1) и ударной адиабатой (2):

$$\sigma = -2Y_M \ln \varepsilon + f(\varepsilon)V^2. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon = V/c$; $c = \sqrt[3]{s}V + C_0/3$; $f(\varepsilon) = 0,5\rho_0(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 3)/(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$.

Для определения величины V_M используются соотношения на разрыве, распространяющемся со скоростью c по невозмущенному пространству: $\sigma = \rho_0 c^2 \theta$, $\theta = \varepsilon^3$. Минимальное значение напряжения, при котором выполняется условие Треска, равно $\sigma = (Y_M - Y_0)/\mu$, где $\mu = \alpha k/2$. Таким образом, для определения V_M получаем уравнение

$$\frac{Y_M - Y_0}{\mu} \left(\sqrt[3]{s} V_M + \frac{C_0}{3} \right) = \rho_0 V_M^3. \quad (6)$$

С использованием (3)–(5) можно вычислить коэффициенты в квадратичной зависимости напряжения от скорости

$$\sigma(V) = \gamma + \delta V^2, \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{Y_0}{k} \left(\frac{2}{\alpha} \varepsilon_C^{-\alpha k} - 1 \right), \quad \delta = f(\varepsilon_M),$$

ε_C определяется в соответствии с уравнением (4); $\varepsilon_M = V_M/(\sqrt[3]{s} V_M + C_0/3)$; V_M определяется в результате решения уравнения (6).

Предлагаемая аппроксимация (7) зависимости нормального напряжения от скорости достаточно точно описывает напряженное состояние на границе полости в грунте при любых скоростях.

Анализ уравнения (5) показывает, что при скоростях $V > V_M$ выполняется неравенство $\rho_0 < f(\varepsilon) < 1,2\rho_0$ при изменении предельной сжимаемости среды, характеризуемой величиной s , в достаточно широком диапазоне $1 < s < 6$. Это неравенство можно использовать для приближенной оценки значения коэффициента δ в уравнении (7).

Ранее на основе анализа экспериментальных данных о проникании конических снарядов в металлические преграды [15, 16] было показано, что значение коэффициента γ можно принять равным динамической твердости ударника, а значение коэффициента δ равно плотности материала преграды ρ_0 . Также в предположении о несжимаемости среды аналитически получено значение коэффициента $\delta = 1,5\rho_0$ в выражении вида (7), связывающем напряжения и нормальную компоненту вектора скорости в задачах о проникании осесимметричных ударников в грунтовые среды [17–19].

4. Результаты численных расчетов. В качестве примера рассматривается грунтовая среда с начальной плотностью $\rho_0 = 2100 \text{ кг/м}^3$ и параметрами ударной адиабаты $C_0 = 1700 \text{ м/с}$, $s = 3,4$. Параметры закона линейно-упругого деформирования мерзлого грунта имеют следующие значения: $E = 21\,000 \text{ МПа}$, $\nu = 1/3$ [8].

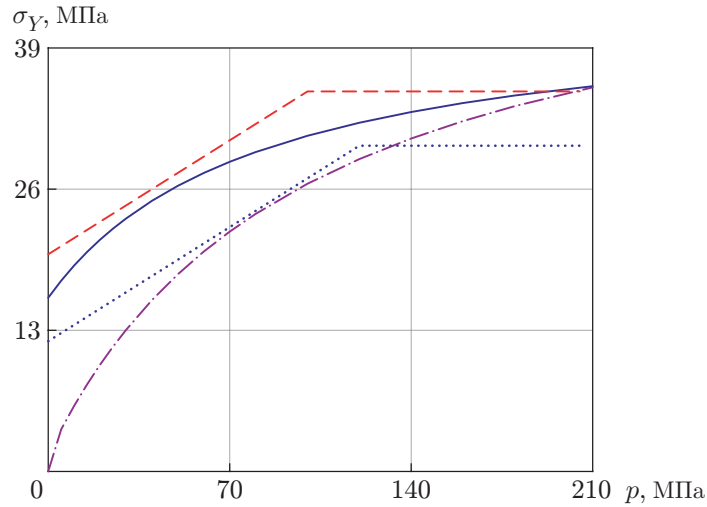


Рис. 3. Зависимость предела текучести от давления:
сплошная линия — мерзлый грунт, штриховая и пунктирная линии — верхняя и нижняя оценки предела текучести мерзлого грунта с использованием условия (1) соответственно, штрихпунктирная линия — водонасыщенный грунт

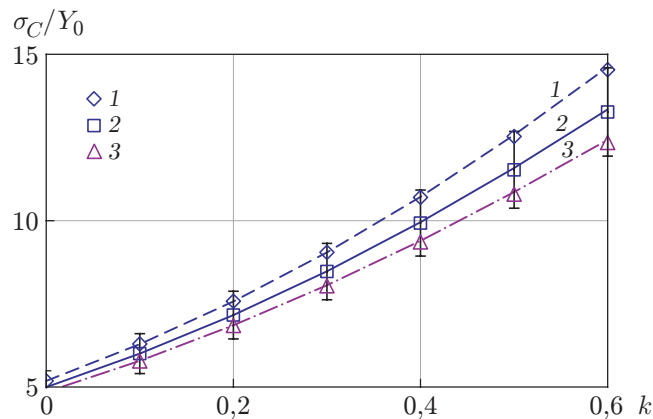


Рис. 4. Зависимость безразмерного критического давления на стенке полости от коэффициента внутреннего трения k при различных начальных значениях предела текучести Y_0 :
точки — точное решение, линии — аппроксимация по формулам (4); 1 — $Y_0 = 12$ МПа, 2 — $Y_0 = 16$ МПа, 3 — $Y_0 = 20$ МПа

На рис. 3 представлены нелинейные зависимости предела текучести от давления для водонасыщенного песка и мерзлого грунта, а также билинейные зависимости предела текучести от давления, полученные с использованием условия Мора — Кулона — Треска (1) и представляющие собой оценки нелинейной зависимости $\sigma_Y(p)$ сверху и снизу. Для водонасыщенного грунта параметры имеют значения $k = 0,5$, $Y_M = 50$ МПа [10], для мерзлого грунта — $Y_0 = 16$ МПа, $k = 1/3$, $Y_M = 43$ МПа [8]; верхняя и нижняя оценки получены с использованием параметров $Y_0 = 12, 20$ МПа, $k = 0,15$, $Y_M = 30, 35$ МПа соответственно.

На рис. 4 представлены зависимости значений критического давления, отнесенных к начальному значению предела текучести $S = \sigma_C/Y_0$, от коэффициента внутреннего трения при $Y_0 = 12, 16, 20$ МПа. Точное решение получено на основе алгоритма [13] в результате численного решения [11] краевой задачи для системы двух обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Приближенное решение получено по формулам (4), его отличие от точного решения не превышает 1 %.

5. Модель проникания конуса в мерзлый грунт. Оценим применимость модели, основанной на решении задачи о расширении сферической полости, при определении максимального значения силы сопротивления внедрению конического ударника в грунтовую среду с учетом начальной прочности.

Согласно модели сила сопротивления внедрению с постоянной скоростью U_0 конуса с углом раствора 2η определяется следующим образом:

$$F = (\sigma + \tau \operatorname{ctg} \eta) S_0.$$

Здесь σ — нормальное напряжение; τ — касательное напряжение, действующее на боковую поверхность конического ударника; S_0 — площадь основания конуса.

Нормальное напряжение определяется с использованием формулы (7), где $V = U_0 \sin \eta$ — проекция вектора скорости на нормаль к поверхности конуса.

При скоростях удара $V < V_M$ касательные напряжения определяются на основе закона сухого трения Кулона $\tau = k_f \sigma$. При $V \geq V_M$ касательное напряжение полагается ограниченным сверху величиной $\tau = k_f(\gamma + \alpha V_M^2)$.

Таким образом, имеем зависимость силы сопротивления внедрению конуса от скорости удара

$$F(V) = \begin{cases} (1 + k_f \operatorname{ctg} \eta)(\gamma + \alpha V^2)S, & V < V_M, \\ ((\gamma + \alpha V^2) + k_f \operatorname{ctg} \eta (\gamma + \alpha V_M^2))S, & V \geq V_M. \end{cases} \quad (8)$$

Ранее были получены зависимости от скорости удара максимальной силы сопротивления внедрению в грунт конусов с диаметром основания 10, 12 и 20 мм в диапазоне значений скорости удара $U_0 = 100 \div 400$ м/с. В данной работе принимаются аналогичные параметры начального участка упругого деформирования зависимости $\sigma(\varepsilon)$ для мерзлого песка и параметры ударной адиабаты. Аппроксимация нелинейной зависимости предела текучести от давления [8] выполняется на основе условия текучести Мора — Кулона — Треска с учетом разброса экспериментальных данных при определении предела прочности мерзлого грунта при сжатии $\sigma^* = 18$ МПа ± 25 % (см. рис. 3). Коэффициент трения полагается равным $k_f = 0,1$.

На рис. 5 приведены зависимости от скорости удара безразмерной (отнесенной к $F^* = \rho_0 U_0^2 S / 2$) максимальной силы сопротивления внедрению в мерзлый грунт стального конического ударника с диаметром основания 10, 12, 20 мм и углом раствора $\eta = 30^\circ$ [8], а также соответствующие зависимости, полученные с использованием аппроксимации (7), (8). Вертикальными отрезками показана относительная погрешность, не превышающая 15 %. Из рис. 5 следует, что результаты экспериментов и моделирования в диапазоне скоростей удара $U_0 = 100 \div 400$ м/с хорошо согласуются.

Заключение. В работе получены конечные выражения для коэффициентов квадратичной аппроксимации напряжение — скорость, зависящих от экспериментально определяемых физико-механических параметров грунта — коэффициентов ударной адиабаты и зависимости предела текучести от давления.

Проведена верификация полученных формул на основе сравнения двусторонних оценок силы сопротивления внедрению стального конического ударника в мерзлый песчаный грунт с известными данными экспериментов. Показано, что различие результатов расчетов и экспериментов не превышает 15 %.

Установлено, что при проведении оценочных расчетов с учетом разброса экспериментальных данных, приближенно равного 25 %, приемлемой аппроксимацией зависимости

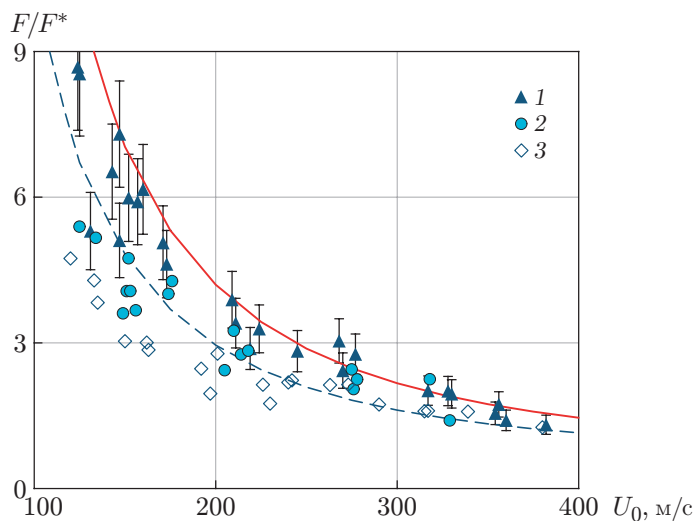


Рис. 5. Зависимость максимальной силы сопротивления внедрению конуса с углом раствора $\eta = 30^\circ$ и диаметром основания $Y_0 = 10$ мм (1), $Y_0 = 12$ мм (2) и $Y_0 = 20$ мм (3) в мерзлый песчаный грунт: точки — экспериментальные данные [5], линии — оценки с использованием модели (7), (8) (штриховая — нижняя оценка, сплошная — верхняя оценка), вертикальные отрезки — относительная погрешность

предела текучести от давления является билинейная аппроксимация на основе условия Мора — Кулона — Треска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xie Q., Zhu Z., Kang G. Dynamic stress-strain behavior of frozen soil: Experiments and modeling // *Cold Regions Sci. Technol.* 2014. V. 106/107. P. 153–160.
2. Christ M., Park J. Ultrasonic technique as tool for determining physical and mechanical properties of frozen soils // *Cold Regions Sci. Technol.* 2009. V. 58. P. 136–142.
3. Ling X. Z., Zhang F., Li Q. L., et al. Dynamic shear modulus and damping ratio of frozen compacted sand subjected to freeze-thaw cycle under multi-stage cyclic loading // *Soil Dynamics Earthquake Engng.* 2015. V. 76. P. 111–121.
4. Баландин В. В., Селютина Н. С., Петров Ю. В. Влияние массовой доли льда на зависимость прочности от скорости деформации при динамическом разрушении мерзлого грунта // *ПМТФ.* 2019. Т. 60, № 3. С. 154–161.
5. Zhu Z., Kang G., Ma Y., et al. Temperature damage and constitutive model of frozen soil under dynamic loading // *Mech. Materials.* 2016. V. 102. P. 108–116.
6. Краус Е. И., Мельников А. Ю., Фомин В. М., Шабалин И. И. Пробитие ледяных преград конечной толщины стальными ударниками // *ПМТФ.* 2019. Т. 60, № 3. С. 146–153.
7. Глазова Е. Г., Зефирова С. В., Кочетков А. В., Крылов С. В. Численное моделирование процессов нормального удара и проникания осесимметричного тела в мерзлый грунт // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2015. № 5. С. 48–56.
8. Брагов А. М., Баландин Вл. В., Котов В. Л. и др. Экспериментальное исследование удара и проникания конического ударника в мерзлый песчаный грунт // *ПМТФ.* 2018. Т. 59, № 3. С. 111–120.

9. **Велданов В. А., Федоров С. В.** Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 116–127.
10. **Bragov A. M., Balandin V. V., Igumnov L. A., et al.** Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand // Intern. J. Impact Engng. 2018. V. 122. P. 197–208.
11. **Котов В. Л.** Аппроксимация напряжений в окрестности полости, расширяющейся с постоянной скоростью в среде с условием пластичности Мора — Кулона // Пробл. прочности и пластичности. 2019. Т. 81, № 2. С. 177–190.
12. **Proud W. G., Chapman D. J., Williamson D. M., et al.** The dynamic compaction of sand and related porous systems // AIP Conf. Proc. 2007. V. 955. P. 1403–1408. DOI: 10.1063/1.2832988.
13. **Forrestal M. J., Luk V. K.** Penetration into soil targets // Intern. J. Impact Engng. 1992. V. 12, N 3. P. 427–444.
14. **Forrestal M. J., Longcope D. B.** Target strength of ceramic materials for high velocity penetration // J. Appl. Phys. 1990. V. 67. P. 3669–3672.
15. **Витман Ф. Ф., Степанов В. А.** Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 100–1000 м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
16. **Баллистические** установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Под ред. Н. Л. Златина, Г. И. Мишина. М.: Наука, 1974.
17. **Фомин В. М.** Высокоскоростное взаимодействие тел / Ф. М. Фомин, А. И. Гулидов, В. А. Бабаков и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
18. **Бабаков В. А., Шабунин Е. В.** Об одном методе расчета движения пневмопробойника в деформируемой среде // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1987. № 1. С. 105–110.
19. **Шабунин Е. В.** Расчет проникания ударников со сложной формой // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1992. № 6. С. 43–47.

*Поступила в редакцию 11/II 2020 г.,
после доработки — 23/IV 2020 г.
Принята к публикации 29/VI 2020 г.*