

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КАРОТАЖ В МНОГОМАСШТАБНОЙ СРЕДЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИ-НОРМАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

Е.П. Курочкина, О.Н. Соболева*, М.И. Эпов**

Институт теплофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 1, Россия

** Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6, Россия*

*** Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

Получены формулы для эффективных коэффициентов удельной электропроводности для оценки средних значений плотности электрического тока и ее дисперсии в задачах каротажа на постоянном токе в изотропной многомасштабной пористой среде с электропроводностью, имеющей логарифмически-нормальное распределение. Если параметры среды удовлетворяют усовершенствованной гипотезе подобия Колмогорова, то уравнения для эффективных коэффициентов имеют достаточно простой вид. Улучшенная теория возмущений, полученная в результате подсеточного моделирования, сравнивается с результатами численного моделирования и с обычной теорией возмущений.

Электрический каротаж, логарифмически-нормальное распределение электропроводности, подсеточное моделирование, фрактальность.

ELECTRICAL LOGGING IN A MULTIDIMENSIONAL MEDIUM WITH LOGNORMAL RESISTIVITY

E.P. Kurochkina, O.N. Soboleva, and M.I. Eпов

We obtained equations of effective resistivity coefficients for estimating average current density and its variance in problems of resistivity logging in isotropic multidimensional porous media with lognormal resistivity distribution. The equations have quite a simple form if the parameters of the medium satisfy modified Kolmogorov's hypothesis. The updated perturbation theory developed through subgrid modeling is compared with results of numerical modeling and with the common perturbation theory.

Electrical logging, lognormal distribution of resistivity, subgrid modeling, fractality

ВВЕДЕНИЕ

Теория электрического каротажа по методу сопротивления основана на решении уравнений потенциала для сред с регулярными неоднородностями разного вида и решении обратной задачи электрических зондирований [Жданов, 1986]. Последняя в общем случае является некорректно поставленной, поэтому для ее решения необходима регуляризация. Обычно мелкомасштабные аномалии поля в таких подходах не рассматриваются, что, безусловно, приводит к потере информации о строении геологической среды. Мелкомасштабные детали в распределении электрического поля и электропроводности среды учитываются в рамках статистической теории введением эффективных параметров [Швидлер, 1985]. Подход, называемый подсеточным моделированием, для задачи каротажа на постоянном токе подразумевает следующее. Удельная электропроводность и потенциал разбиваются стандартным образом на крупномасштабную (надсеточную) и мелкомасштабную (подсеточную) составляющие. Затем крупномасштабные компоненты изменяются так, чтобы, например, средняя величина плотности электрического тока, рассчитанная только по крупномасштабным компонентам, была такой же, как и плотность электрического тока, рассчитанная по полномасштабным потенциалу и удельной электропроводности. Для этого выводят, пользуясь теорией возмущения, надсеточное и подсеточное уравнения и находят приближенное решение для мелкомасштабной компоненты, выражая ее через крупномасштабные переменные.

Полевые и лабораторные исследования показали, что существует и другой аспект проблемы — существенная гетерогенность геологической среды, причем неоднородности существуют в широком диапазоне масштабов и характеризуются иерархической структурой организации, или, другими словами, фрактальностью. В работе [Крылов и др., 2002] экспериментально подтвержден фрактальный скейлинг кажущегося сопротивления при лабораторных измерениях разными установками на образце железистого кварцита. Это явление характерно и для более крупных геологических структур, таких, например, как рифтогенная структура Мончегорского рудного района, характеризующаяся широким распространением тектонических нарушений различных масштабов и направлений [Крылов и др., 2003]. Подобные свойства имеют место и для других физических параметров, таких как плотность, проницаемость, пористость и теплопроводность, что привело к созданию фрактальных моделей. В работах [Кузьмин, Соболева, 2002а, б, 2005; Соболева, 2005] в рамках подсеточного моделирования получены формулы эффективных коэффи-

циентов для фрактальной проницаемости с логарифмически-нормальной и логарифмически-устойчивой статистикой.

В настоящей работе получены формулы для подсеточного моделирования средних значений плотности электрического тока и ее дисперсии в задачах каротажа на постоянном токе в изотропной многомасштабной фрактальной пористой среде с электропроводностью, имеющей логарифмически-нормальное распределение. Такая постановка правомерна для стратифицированных сред с достаточно мощными слоями. Если предположить, что параметры среды удовлетворяют усовершенствованной гипотезе подобия Колмогорова [Kolmogorov, 1962], то уравнения для эффективных коэффициентов имеют достаточно простой вид. Улучшенная теория возмущения, полученная в результате подсеточного моделирования, сравнивается с результатами численного моделирования и с обычной теорией возмущения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем задачу о протекании постоянного электрического тока в изотропной неоднородной среде [Жданов, 1986]:

$$\nabla_i \sigma(\mathbf{x}) \nabla_j U(\mathbf{x}) = f, \quad (1)$$

где $\sigma(\mathbf{x})$ — удельная электропроводность среды, $U(\mathbf{x})$ — потенциал, $f(\mathbf{x})$ — функция источника, граничные условия на бесконечности равны нулю. Тогда $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\sigma(\mathbf{x})\nabla U(\mathbf{x})$ — плотность электрического тока. Будем считать, что поведение удельной электропроводности среды известно. Это означает, что в каждой точке \mathbf{x} выполнено измерение удельной электропроводности среды в объеме очень малого масштаба l_0 . Случайная функция пространственных координат рассматривается как предел удельной электропроводности среды: $\sigma(\mathbf{x})_{l_0} \rightarrow \sigma(\mathbf{x})$ при $l_0 \rightarrow 0$. Чтобы перейти на более грубую сетку $l_1 > l_0$, нельзя просто сгладить функцию $\sigma(\mathbf{x})_{l_0}$ по масштабу l_1 . Поскольку сглаженная функция не будет удельной электропроводностью среды, которая правильно описывает протекание электрического тока в области масштабов (l_1, L) , где L — наибольший масштаб. Чтобы найти удельную электропроводность среды на более крупной сетке, надо выполнить измерения заново, рассматривая более крупный масштаб l_1 . Необходимость этой процедуры вызвана тем, что флуктуации удельной электропроводности среды из интервала (l_0, l_1) коррелируют с флуктуациями потенциала, и эта корреляция может быть существенной. Аналогично [Kolmogorov, 1962], введем безразмерную функцию ψ , равную отношению удельных электропроводностей среды, сглаженных по двум разным масштабам l_1, l : $\psi(\mathbf{x}, l, l_1) = \sigma(\mathbf{x})_l / \sigma(\mathbf{x})_{l_1}$, где $\sigma(\mathbf{x})_l$ — сглаженная по масштабу l удельная электропроводность $\sigma(\mathbf{x})_{l_0}$, $l_1 < l$. Под сглаживанием по масштабу l может пониматься, например, отбрасывание гармоник Фурье с волновыми числами $k \geq 1$ в разложении исследуемой функции. По построению функция ψ обладает следующим свойством:

$$\psi(\mathbf{x}, l, l_2) = \psi(\mathbf{x}, l, l_1) \psi(\mathbf{x}, l_1, l_2). \quad (2)$$

Для масштаба l_2 , близкого к l_1 , разложим функцию $\psi(\mathbf{x}, l, l_2)$ в ряд по l_2 в точке l_1 .

$$\psi(\mathbf{x}, l, l_2) = \psi(\mathbf{x}, l, l_1) + \left. \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l, l_2)}{\partial l_2} \right|_{l_2=l_1} (l_2 - l_1) + \dots \quad (3)$$

Аналогично разложим функцию $\psi(\mathbf{x}, l_1, l_2)$ в ряд в точке l_1

$$\psi(\mathbf{x}, l_1, l_2) = \psi(\mathbf{x}, l_1, l_1) + \left. \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l_1, l_2)}{\partial l_2} \right|_{l_2=l_1} (l_2 - l_1) + \dots = 1 + \left. \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l_1, l_2)}{\partial l_2} \right|_{l_2=l_1} (l_2 - l_1) + \dots, \quad (4)$$

где $\lambda = l_2/l_1$. Подставляя разложения (3), (4) в (2), получим уравнение для $\psi(\mathbf{x}, l, l_1)$

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l, l_1)}{\partial l_1} = \frac{1}{l_1} \psi(\mathbf{x}, l, l_1) \varphi(\mathbf{x}, l_1), \quad (5)$$

где $\varphi(\mathbf{x}, l) = \left. \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, l, l_2)}{\partial l_2} \right|_{l_2=l_1}$. Из уравнения (5) следует соотношение

$$\frac{\partial \ln \sigma(\mathbf{x})_l}{\partial \ln l} = \varphi(\mathbf{x}, l). \quad (6)$$

Функция $\varphi(\mathbf{x}, l)$ определяет функцию $\sigma(\mathbf{x})_{l_0}$. Среда известна, если статистические свойства функции $\varphi(\mathbf{x}, l)$ заданы. Флуктуации функции φ наблюдаются только в некоторой конечной области масштабов (l_0, L) . Решение уравнения (6) имеет вид

$$\sigma(\mathbf{x})_{l_0} = \sigma_0 \exp \left[- \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right], \quad (7)$$

где σ_0 — константа. Предположим, функция φ изотропная и статистически однородная. Тогда $\langle \varphi(\mathbf{x}, l) \varphi(\mathbf{y}, l_1) \rangle - \langle \varphi(\mathbf{x}, l) \rangle \langle \varphi(\mathbf{y}, l_1) \rangle = \Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l, l_1)$, где угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают статистическое усреднение. Дополнительно можно предположить, что параметры среды удовлетворяют усовершенствованной гипотезе подобия Колмогорова, т. е. масштабнo-инвариантны отношения полей удельной электропроводности на разных масштабах. Для функции φ это означает, что она обладает статистической масштабной инвариантностью, т. е. для любого положительного числа K функция $\Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l, l_1) = \Phi(K^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, Kl, Kl_1)$. Значения функции $\varphi(\mathbf{x}, l)$, $\varphi(\mathbf{y}, l_1)$ при любых \mathbf{x}, \mathbf{y} статистически независимы, т. е.

$$\Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l, l_1) = \Phi((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, l) \delta(\ln l - \ln l_1).$$

Здесь δ — дельта-функция. Для простоты используем то же обозначение Φ в правой части. Эта гипотеза обычно предполагается верной в различных моделях и отражает тот факт, что статистическая зависимость уменьшается для различных по величине масштабов. В аналитических исследованиях дельтообразные корреляционные функции можно не использовать, но их применение значительно упрощает численное моделирование. Воспользуемся теоремой о суммах независимых случайных функций. Если дисперсия $\varphi(\mathbf{x}, l)$ конечна, то для больших значений L/l_0 интеграл (7) стремится к полю с нормальным распределением. Для упрощения предполагается, что функция $\varphi(\mathbf{x}, l)$ распределена по нормальному закону.

ПОДСЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ

Функцию $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})_l$ разделим на две компоненты относительно масштаба $l > l_0$. Крупномасштабная компонента $\sigma(\mathbf{x}, l)$ получена статистическим усреднением по всем $\sigma(\mathbf{x}, l_1)$ с $l_1 < l$, мелкомасштабная (подсеточная) равна $\sigma'(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x}, l)$:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}, l) &= \sigma_0 \exp \left[- \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \left\langle \exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle, \\ \sigma'(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x}, l) \left[\exp \left[- \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \left\langle \exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle^{-1} - 1 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где функция $\varphi(\mathbf{x}, l_1)$ на интервале (l, L) фиксирована, а на интервале (l_0, l) случайна. Крупномасштабная (надсеточная) компонента потенциала $U(\mathbf{x}, l)$ получается как усредненное решение уравнения (1) при фиксированной крупномасштабной компоненте, а мелкомасштабная $\sigma'(\mathbf{x})$ является случайной величиной. Подсеточная компонента потенциала равна $U'(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}, l)$. Подставим выражения для функций $U(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$ в уравнение (1) и усредним по мелкомасштабной компоненте:

$$\nabla_i [\sigma(\mathbf{x}, l) \nabla_i U(\mathbf{x}, l) + \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle] = f. \quad (9)$$

Второе слагаемое в уравнении (9) неизвестно и не может быть отброшено без предварительной оценки, поскольку корреляция между удельной электропроводностью среды и градиентом потенциала может быть существенной. Выбор вида второго слагаемого в (9) определяет подсеточную модель. Для его оценки воспользуемся методом возмущений. Пусть начальное значение масштаба l близко к минимальному l_0 . Вычитая (9) из (1), получим подсеточное уравнение для потенциала $U'(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \nabla_i [\sigma(\mathbf{x}, l) \nabla_i U'(\mathbf{x}) + \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U(\mathbf{x}, l) + \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x})] - \\ - \nabla_i [\sigma(\mathbf{x}, l) \nabla_i U(\mathbf{x}, l) + \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) используется для нахождения подсеточного потенциала $U'(\mathbf{x})$. Оно не может быть решено точно. Поэтому предположим, что величины $\sigma(\mathbf{x}, l)$, $U(\mathbf{x}, l)$ известны, а их производные изменяются медленнее, чем производные от функции $\sigma'(\mathbf{x})$, а также мала разность $\sigma'(\mathbf{x})\nabla_i U'(\mathbf{x}) - \langle \sigma'(\mathbf{x})\nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle$. В результате получим

$$\Delta U'(\mathbf{x}) \approx -\frac{1}{\sigma(\mathbf{x}, l)} \nabla_i \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U(\mathbf{x}, l).$$

Решая уравнение Лапласа для неограниченной среды и учитывая указанные выше предположения, берем в качестве приближения для функции $U'(\mathbf{x})$ выражение

$$U'(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\sigma(\mathbf{x}, l)} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla_j \sigma'(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \nabla_j U(\mathbf{x}, l). \quad (11)$$

Используя формулу (11), получим выражение для подсеточного слагаемого в (9):

$$\langle \sigma'(\mathbf{x})\nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{4\pi\sigma(\mathbf{x}, l)} \int \nabla'_i \nabla'_j \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \langle \sigma'(\mathbf{x})\sigma'(\mathbf{x}') \rangle d\mathbf{x}' \nabla_j U(\mathbf{x}, l). \quad (12)$$

Корреляционную функцию для $\sigma'(\mathbf{x})$ оценим, используя (8) и формулу для вычисления среднего значения экспоненты от гауссова поля из [Монин, Яглом, 1967]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(\mathbf{x})\sigma'(\mathbf{x}') \rangle &= \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \left\langle \exp \left[-\int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) + \varphi(\mathbf{x}', l_1) - 2\langle \varphi \rangle + \Phi_0(l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle - 1 \approx \\ &\approx \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \Phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, l)\Delta/l, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Phi_0(l_1) = \Phi(0, l_1)$, $\Delta l = l - l_0$. Подставим выражение (13) в (12) и воспользуемся тем, что подынтегральное выражение зависит только от величины $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Интегрирование по полному телесному углу дает $\int \phi_{ij}(\theta, \chi) d\omega = 4\pi/3 \delta_{ij}$, $\phi_{ij}(\theta, \chi) = x_i x_j / r^2$. Следовательно,

$$\langle \sigma'(\mathbf{x})\nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle \approx -\Phi_0(l)\sigma(\mathbf{x}, l)\nabla_i U(\mathbf{x}, l)\Delta/3l. \quad (14)$$

Подставим (14) в уравнение (9):

$$\nabla_i [(1 - \Phi_0(l)\Delta/3l)\sigma(\mathbf{x}, l)\nabla_i U(\mathbf{x}, l)] = f. \quad (15)$$

Согласно (8),

$$\sigma(\mathbf{x}, l) \approx \sigma(\mathbf{x})_l (1 + (-\langle \varphi \rangle + \Phi_0(l)/2)\Delta/l). \quad (16)$$

Для подсеточного моделирования необходимо, чтобы эффективный коэффициент правильно описывал поведение решения уравнения в интервале масштабов (l, L) и вычислялся по формуле того же вида, что и $\sigma(\mathbf{x})_l$. Из уравнения (15) и выражения (16) следует

$$\sigma_{0l} \approx \sigma_{0L} [1 + (-\langle \varphi \rangle + \Phi_0(l)/6)\Delta/l]. \quad (17)$$

В пределе при $l \rightarrow l_0$ получаем уравнение для эффективной константы σ_{0l}^1 :

$$\frac{d \ln \sigma_{0l}^1}{d \ln l} = -\langle \varphi \rangle + \frac{1}{6} \Phi_0(l). \quad (18)$$

В масштабно-инвариантной среде решение уравнения (18) имеет особенно простой вид, поскольку Φ_0 не зависит от l : $\sigma_{0l}^1 = \sigma_{0L} (l/L)^{+\langle \varphi \rangle - \Phi_0/6}$, где константа σ_{0L} описывает удельную электропроводность при самом большом масштабе: $\langle \mathbf{j} \rangle = -\sigma_{0L} \nabla \langle U \rangle$.

Определим эффективные коэффициенты для вычисления одноточечных вторых моментов плотности электрического тока. Одноточечный момент плотности электрического тока равен

$$\begin{aligned} \langle j_i(\mathbf{x})j_k(\mathbf{x}) \rangle &= j_i(\mathbf{x}, l)j_k(\mathbf{x}, l) + \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \langle \nabla_k U'(\mathbf{x})\nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle + \langle \sigma'^2(\mathbf{x}) \rangle \nabla_k U(\mathbf{x}, l)\nabla_i U(\mathbf{x}, l) + \\ &+ 2\langle j'_k(\mathbf{x}) \rangle j_i(\mathbf{x}, l) + 2j_k(\mathbf{x}, l)\langle j'_i(\mathbf{x}) \rangle + \langle \sigma'^2(\mathbf{x}) \rangle \nabla_i U'(\mathbf{x})\nabla_k U'(\mathbf{x}) + \\ &+ 2\sigma(\mathbf{x}, l)\langle \sigma'(\mathbf{x})\nabla_k U'(\mathbf{x})\nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle + \langle \sigma'^2(\mathbf{x}) \rangle \nabla_k U'(\mathbf{x})\nabla_i U(\mathbf{x}, l) + \langle \sigma'^2(\mathbf{x}) \rangle \nabla_i U'(\mathbf{x})\nabla_k U(\mathbf{x}, l). \end{aligned} \quad (19)$$

Вычислим второе слагаемое в (19). Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\begin{aligned} & \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \langle \nabla_i U'(\mathbf{x}) \nabla_j U'(\mathbf{x}) \rangle = \\ & = \left\langle \frac{1}{16\pi^2} \iint \nabla_i \frac{1}{r_1} \nabla'_m \sigma'(\mathbf{x}') \nabla_j \frac{1}{r_2} \nabla''_k \sigma'(\mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' d\mathbf{x}' \nabla_m U(\mathbf{x}, l) \nabla_k U(\mathbf{x}, l) \right\rangle \approx \\ & \approx \frac{1}{15} \Phi_0(l) (\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{kj}) \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \nabla_m U(\mathbf{x}, l) \nabla_k U(\mathbf{x}, l) \frac{\Delta l}{l}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $r_2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|$. При вычислении интеграла использована формула $\int \phi_{ij}(\theta, \chi) \phi_{km}(\theta, \chi) d\omega = 4\pi(\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{kj})/15$, а свертка производных функции Грина трансформируется при помощи преобразования Фурье [Лившиц, Розенцвейг, 1946; Жданов, 1986]. Слагаемые, начиная с шестого, в (19) равны нулю с точностью до членов второго порядка малости по величине Δl . Таким образом, используя формулы (14), (16), (20), получим

$$\begin{aligned} \langle j_i(\mathbf{x}) j_k(\mathbf{x}) \rangle & \approx \left(1 + \left(\frac{2}{3} \Phi_0(l) - 2\langle \varphi \rangle \right) \frac{\Delta l}{l} \right) j_i^l(\mathbf{x}) j_k^l(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{1}{15} \Phi_0(l) (\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{kj}) \frac{\Delta l}{l} j_i^l(\mathbf{x}) j_k^l(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (21)$$

где $j_i^l(\mathbf{x}) = \sigma_i(\mathbf{x}) \nabla_i U(\mathbf{x}, l)$. Из (21) следует, что выражения для диагональных элементов тензора с точностью до членов второго порядка малости по Δl удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \langle j_x(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle j_y(\mathbf{x})^2 \rangle & \approx \left(1 - 2\langle \varphi \rangle \frac{\Delta l}{l} + \frac{14}{15} \Phi_0^{\varphi\varphi} \frac{\Delta l}{l} \right) [j_x^l(\mathbf{x})^2 - j_y^l(\mathbf{x})^2], \\ \langle j_z(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle j_y(\mathbf{x})^2 \rangle & \approx \left(1 - 2\langle \varphi \rangle \frac{\Delta l}{l} + \frac{14}{15} \Phi_0^{\varphi\varphi} \frac{\Delta l}{l} \right) [j_z^l(\mathbf{x})^2 - j_y^l(\mathbf{x})^2], \\ \langle j_x(\mathbf{x})^2 \rangle + \langle j_y(\mathbf{x})^2 \rangle + \langle j_z(\mathbf{x})^2 \rangle & \approx \left(1 - 2\langle \varphi \rangle \frac{\Delta l}{l} + \frac{14}{15} \Phi_0^{\varphi\varphi} \frac{\Delta l}{l} \right) [j_x^l(\mathbf{x})^2 + j_y^l(\mathbf{x})^2 + \langle j_z^l(\mathbf{x})^2 \rangle]. \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно, для разности и суммы вторых одноточечных моментов при стремлении $l \rightarrow l_0$ получим уравнения эффективных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{0l}^2)^2}{d \ln l} & = \left(\frac{14}{15} \Phi_0(l) - 2\langle \varphi \rangle \right), \\ \frac{d \ln(\sigma_{0l}^3)^2}{d \ln l} & = (\Phi_0(l) - 2\langle \varphi \rangle). \end{aligned} \quad (23)$$

Решая линейную систему (22) относительно $\langle j_x(\mathbf{x})^2 \rangle$, $\langle j_y(\mathbf{x})^2 \rangle$, $\langle j_z(\mathbf{x})^2 \rangle$, можно вычислить эффективную дисперсию плотности электрического тока на самом маленьком масштабе l_0 , если задача решена для масштаба L . Для дисперсии в масштабно-инвариантной среде получим

$$\mathbf{v}^{ef} = \theta_1 A \mathbf{v}^L - \theta_2 I \mathbf{v}^L, \quad (24)$$

где $\theta_1 = \sigma_{0L}^2 (l_0/L)^{-\Phi_0 + 2\langle \varphi \rangle} / 3$, $\theta_2 = \sigma_{0L}^2 (l_0/L)^{-\Phi_0/3 + 2\langle \varphi \rangle}$, I — единичная матрица, A — симметричная матрица, диагональные элементы которой равны $a_{ii} = 2(l_0/L)^{\Phi_0/15} + 1$, а недиагональные $a_{ij} = -(l_0/L)^{\Phi_0/15} + 1$, $i \neq j$. Компоненты векторов \mathbf{v}^{ef} , \mathbf{v}^L равны $v_i^{ef} = \langle j_i(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle j_i(\mathbf{x})^2 \rangle_{ef}^2$, $v_i^L = j_i(\mathbf{x}, L)^2$. Для недиагональных компонент тензора справедливо $\langle j_i(\mathbf{x}) j_k(\mathbf{x}) \rangle \approx \left(1 + \frac{4}{5} \Phi_0(l) \frac{dl}{l} - 2\langle \varphi \rangle \frac{dl}{l} \right) j_i(\mathbf{x}, l) j_k(\mathbf{x}, l)$. Уравнение эффективного коэффициента для недиагональных компонент тензора

$$\frac{d \ln(\sigma_{0l}^4)^2}{d \ln l} = \left(\frac{4}{5} \Phi_0(l) - 2\langle \varphi \rangle \right). \quad (25)$$

Эффективные недиагональные элементы тензора корреляций в масштабно-инвариантной среде могут быть вычислены по формуле

$$[\langle j_i(\mathbf{x}) j_j(\mathbf{x}) \rangle - \langle j_i(\mathbf{x}) \rangle \langle j_j(\mathbf{x}) \rangle]_{ef} = \sigma_{0L}^2 [(l_0/L)^{-4\Phi_0/5 + 2\langle \varphi \rangle} - (l_0/L)^{+2\langle \varphi \rangle - \Phi_0/3}] j_i(\mathbf{x}, L) j_j(\mathbf{x}, L).$$

Все приведенные формулы справедливы и в отсутствие масштабной инвариантности. Тогда в показателях степени в выражениях для получения эффективных значений будут стоять решения уравнений (18), (23), (25).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Если решать задачу о протекании постоянного тока в безграничной среде, то неизбежно встанет вопрос о численной реализации граничных условий, поскольку решать задачу можно только в ограниченной области. Решение этого вопроса для неоднородной среды столь же сложно, как и получение точного решения в неоднородной среде. Как правило, эту задачу решают приближенно, считая среду вне некоторой области, на границе которой ставятся граничные условия, однородной. В этом случае подсеточная функция $U'(\mathbf{x})$ равна нулю не на бесконечности, а на границе конечной области. Поэтому вычислять интегралы (12), (20) следовало бы по конечному объему. По физическому смыслу для неоднородностей малых масштабов по сравнению с размером рассматриваемой области корреляционная функция $\Phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, l)$ должна убывать на бесконечности достаточно быстро. Поэтому замена пределов в интегралах (12), (20) на бесконечные не даст большой ошибки для внутренних точек области. Для проверки полученных выше эффективных коэффициентов численно решается уравнение (1) о протекании постоянного электрического тока через неоднородный куб с ребром L_0 . На гранях куба ($y = 0, y = L_0$) задается постоянный потенциал $U(x, y, z)|_{y=0} = U_1, U(x, y, z)|_{y=L_0} = U_2$, причем $U_1 > U_2$. Потенциал на других гранях куба задается линейной зависимостью по y : $U = U_1 + (U_2 - U_1)y/L_0$. Правая часть в уравнении (1) равна нулю. Выбор плоскопараллельной модели обусловлен только простотой численной реализации для проверки теоретических формул. Можно использовать статистическое усреднение совместно с пространственным усреднением. Это уменьшит количество численных реализаций. В расчетах используются безразмерные переменные. Все расстояния измеряются в единицах L_0 , за единицу разности потенциалов выбирается $(U_1 - U_2)$, удельная электропроводность измеряется в единицах σ_0 . Таким образом, задача решается в единичном кубе, с единичным скачком потенциала и $\sigma_0 = 1$. Удельная электропроводность моделируется по формуле (7). По пространственным переменным используется сетка $256 \times 256 \times 256$; шаг по масштабу $\Delta\tau = 1$. Интеграл в (7) заменяется конечно-разностным аналогом, в котором удобно перейти к логарифмам по основанию 2:

$$\sigma(\mathbf{x})_l = \exp \left[\frac{\log_2 L}{\log_2 l} \int \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right] \approx 2^{\left(\frac{0}{-\sum_{i=-s}^0 \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \Delta\tau} \right)}. \quad (26)$$

Корреляционная функция для случайного $\varphi(x, y, z, l)$ выбрана в виде

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \varphi(\mathbf{y}, \tau_j) \rangle - \langle \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \rangle \langle \varphi(\mathbf{y}, \tau_j) \rangle = (\Phi_0 / \ln 2) \exp [-(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 / 2^{2\tau_i}].$$

Такая корреляционная функция является в некотором смысле „базовой“, поскольку соотношение

$$R(r) = \int_0^\infty \exp(-\eta r^2) d\rho(\eta) \text{ исчерпывает все непрерывные изотропные корреляционные функции в гильбертовом пространстве [Гихман, Скороход, 1971].}$$

Функция $\varphi(\mathbf{x}, \tau_i)$ генерируется независимо для каждого значения τ_i , поскольку предполагается статистическая независимость полей с различными масштабами. Общий показатель степени в (26) суммируется по статистически независимым слоям. Для расчета используется их ограниченное число. Количество масштабов выбиралось так, чтобы масштаб самых крупных пульсаций удельной электропроводности позволил заменить приближенно вероятностные средние величины усредненными по пространству, а масштаб самых мелких — так, чтобы разностная задача хорошо аппроксимировала уравнение (1). В расчетах использовались три слоя: $\tau_i = -6, -5, -4$. Два нижних и четыре верхних слоя оставлены незаполненными, т. е. функция φ на них равна нулю. Структура выбранной для расчетов корреляционной матрицы позволяет представить ее в виде прямого произведения четырех матриц более низкой размерности и применить для численного моделирования алгоритм по „строкам и столбцам“ [Ogorodnikov, Prigorin, 1996]. Функция $\Phi_0(l)$ должна быть выбрана из экспериментальных данных для неоднородных сред. В работе [Sahimi, 1993] приведены оценки для корреляционных функций вида (5) для некоторых геологических объектов. Согласно [Sahimi, 1993], для численного моделирования в случае масштабно-инвариантной среды $\Phi_0 \approx 0.3$. На рис. 1 приведена удельная электропроводность для

трех масштабов $\sigma(\mathbf{x})_l = 2^s$, где $s = \left(\frac{-4}{-\sum_{i=-6}^0 \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \Delta\tau} \right)$, в среднем сечении $z = 1/2$.

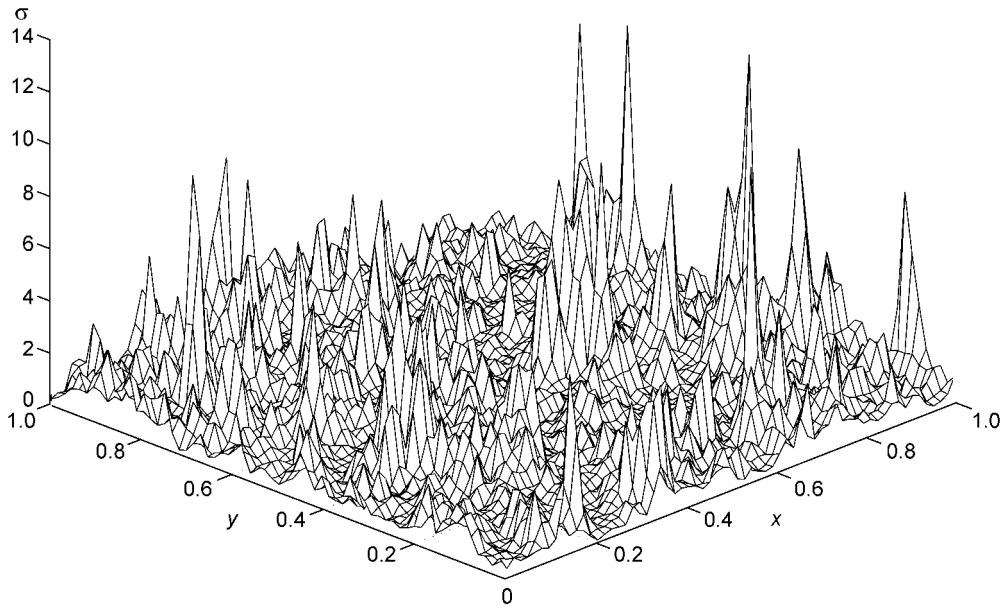


Рис. 1. Удельная электропроводность для трех масштабов $\sigma(x) = 2^{\left(\begin{matrix} -1 \\ -\sum_{i=-6}^i \varphi(x, \tau) \Delta\tau \end{matrix} \right)}$ в сечении $z = 1/2$.

В соответствии с процедурой вывода подсеточных формул для проверки необходимо решить полную задачу и выполнить вероятностное усреднение по мелкомасштабным пульсациям. В результате получится подсеточное слагаемое, которое можно сравнивать с теоретическим выражением. Вероятностное усреднение требует многократного решения полной задачи с заданной крупномасштабной компонентой удельной электропроводности, но случайной подсеточной компонентой с последующим усреднением по ней. Использован более экономный вариант проверки. Усреднение по реализациям заменяется усреднением по пространству. Численно рассчитываются средние по пространству характеристики плотности тока, компонент тензора корреляций плотности электрического тока в интервале масштабов (L, l) . Затем они сравниваются с теми же характеристиками, полученными по теоретическим формулам для той же области масштабов (L, l) , при этом $l \rightarrow l_0$. Сравнение начинается от задачи с постоянной удельной электропроводностью. Анализ показал, что для расчета средних характеристик плотности тока достаточно одной реализации. Для расчетов компонент тензора корреляций размер куба недостаточно велик, поэтому использовалось дополнительное усреднение по ансамблю Гиббса. Генерация коэффициента и решение задачи выполнялись 16 раз с последующим доусреднением по пространству. Это оказалось достаточно для выбранных параметров задачи. Для численного решения уравнения (1) использовался один из итерационных методов [Марчук, 1989].

На рис. 2 приведены результаты для логарифма средних значений плотности электрического тока. Прямые 1, 2 — средние значения плотности электрического тока по оси y , полученные по теоретическим формулам для $\langle \varphi \rangle = 0$ и $\langle \varphi \rangle = 0.15$ соответственно. Средние значения плотности электрического тока по другим координатам равны нулю. Штриховые линии 3, 4 — результат, полученный по обычной теории возмущений [Швидлер, 1985] для тех же значений $\langle \varphi \rangle$. Звездочками помечены результаты численного моделирования для $\langle \varphi \rangle = 0$, крестиками — результат численного моделирования для $\langle \varphi \rangle = 0.15$. По оси абсцисс отложено число членов в сумме, стоящей в показателе степени формулы (26). В этом случае наблюдается очень хорошее совпадение численного и теоретического результатов, полученных по формуле (18).

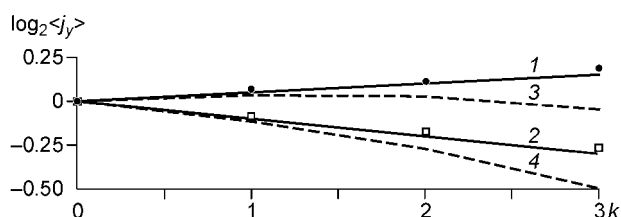


Рис. 2. Зависимость логарифма средних значений плотности электрического тока от количества учитываемых в модели масштабов (k) .

Пояснения см. в тексте.

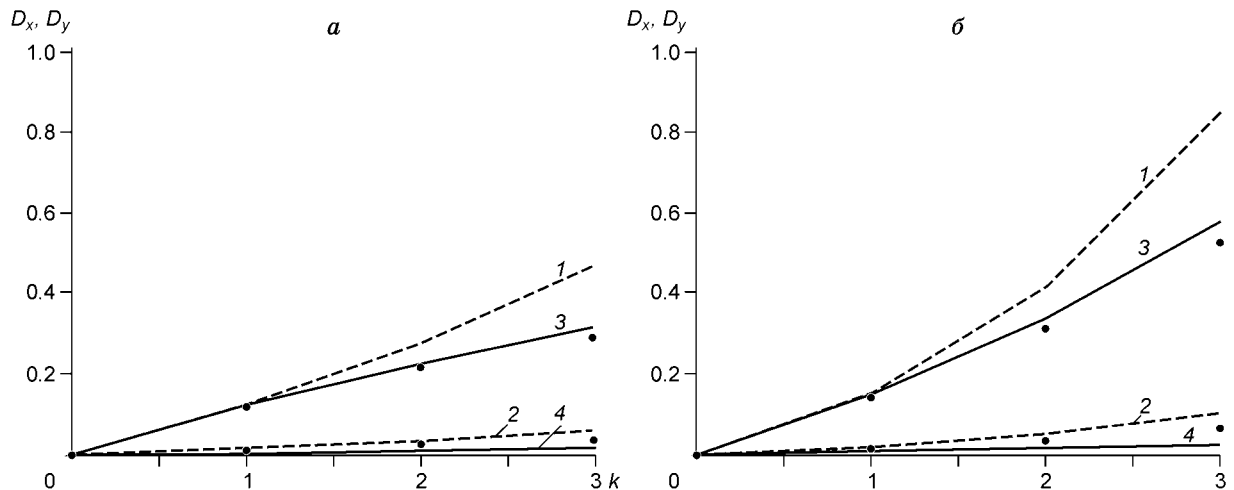


Рис. 3. Зависимость компонент дисперсии плотности электрического тока при различных значениях $\langle \varphi \rangle$ от количества учитываемых в модели масштабов:

a — $\langle \varphi \rangle = 0.15$; b — $\langle \varphi \rangle = 0$. Пояснения см. в тексте.

На рис. 3 приведены результаты для дисперсии компонент плотности электрического тока при различных значениях $\langle \varphi \rangle$. Среднее значение φ равно 0.15: в этом случае среднее $\langle \sigma(x)_l \rangle$ равно σ_0 для любых x, l . Кривые 1, 2 — результат, полученный по обычной теории возмущений для компонент j_y, j_x соответственно; 3, 4 — результат, полученный по формуле (24), звездочками обозначен результат, полученный прямым численным моделированием. Среднее значение φ равно нулю: для дисперсии продольной компоненты плотности электрического тока оценка, полученная по формуле (24), значительно ближе к результату, полученному прямым численным моделированием. Что касается поперечной компоненты, то здесь результаты отличаются друг от друга в пределах численной ошибки (в четвертом знаке), поэтому трудно судить о преимуществах той или другой оценки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены формулы, позволяющие учесть вклад мелкомасштабных компонент в вычисление средних характеристик плотности электрического тока. Удельная электропроводность моделировалась крайне неоднородной функцией, близкой к мультифракталу. Мультифракталы получаются, если масштаб l_0 в формуле (7) устремить к нулю. Важным свойством гетерогенности среды, состоящей из компонент с разной удельной электропроводностью, является скейлинг кажущейся удельной электропроводности. В работе рассматривается среда, в которой отношения функций удельной электропроводности на разных масштабах обладают свойством масштабной инвариантности. Вычислены показатели степени для эффективной удельной электропроводности. Степенной зависимостью обладают среднее от плотности электрического тока, попарные разности и сумма всех вторых односточечных моментов плотности электрического тока. Формулы, полученные в статье, справедливы в отсутствии масштабной инвариантности. В этом случае среднее значение и дисперсия функции φ зависят от масштаба. В геофизических задачах для описания фрактальных полей, как правило, используется язык геометрии (кривая Коха, ковер Серпинского) [Sahimi, 1993; Крылов и др., 2002]. В такой среде может протекать жидкость, тепло, электрический ток и т. п. А затем задача решается методами теории перколяции. В подходе, используемом в данной статье, анализ не выходит за рамки аппарата дифференциальных уравнений и теории случайных функций. Основными объектами являются параметры, средние значения и корреляционные функции которых, хотя бы в принципе, можно измерить.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-05-64415) и комплексного интеграционного проекта СО РАН № 75.

ЛИТЕРАТУРА

- Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М., Наука, 1971, т. 1, 664 с.
 Жданов М.С. Электроразведка. М., Недра, 1986, 314 с.

Крылов С.С., Бобров Н.Ю., Любчик В.А. Масштабная зависимость кажущегося сопротивления и фрактальная структура железистых кварцитов // Изв. РАН, Физика Земли, 2002, № 12, с. 14—21.

Крылов С.С., Любчик В.А., Загребельный В.А. Скэйлинг кажущегося сопротивления и расчет скэйлинговых показателей методом случайных блужданий. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей // Материалы 30-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского. Ч. I. М., ОИФЗ РАН, 2003, с. 60—62.

Кузьмин Г.А., Соболева О.Н. Моделирование фильтрации в пористых автотомельных средах // Прикладная механика и техническая физика, 2002а, т. 43, № 4, с. 115—126.

Кузьмин Г.А., Соболева О.Н. Моделирование фильтрации и вытеснения жидкости в пористых автотомельных средах // Физическая мезомеханика, 2002б, т. 5, № 5, с. 119—123.

Кузьмин Г.А., Соболева О.Н. Подсеточное моделирование фильтрации и дисперсии во фрактальной пористой среде // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005, т. 8, № 2, с. 124—134.

Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // Журнал теоретической и экспериментальной физики, 1946, т. 16, № 11, с. 967—980.

Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1989, 390 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М., Наука, 1967, 620 с.

Соболева О.Н. Эффективные коэффициенты проводимости в пористой среде с логарифмически устойчивой статистикой // Прикладная механика и техническая физика, 2005, т. 46, № 6, с. 146—158.

Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М., Недра, 1985, 287 с.

Kolmogorov A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number // Fluid Mech., 1962, № 13, с. 82—85.

Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical modeling of random processes and fields: algorithms and applications. Utrecht, Kluwer, 1996, 348 p.

Sahimi M. Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // Rev. Mod. Phys., 1993, v. 65(4), p. 1393—1534.

*Рекомендована к печати 10 мая 2006 г.
С.В. Гольдиным*

*Поступила в редакцию
13 января 2006 г.*