

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК, ТОЛЩИНА КОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНО МЕНЯЕТСЯ

В. И. Ризов

Университет архитектуры, гражданского строительства и геодезии,  
1046 София, Болгария  
E-mail: v\_rizov\_fhe@uacg.bg

Исследуется расслоение неоднородной многослойной (состоящей из вертикально расположенных слоев) балки, толщина которой непрерывно меняется по ее длине. Получено выражение для скорости выделения энергии деформации в балке, толщина которой меняется по линейному закону и которая содержит трещину расслоения, расположенную на границе между слоями. Проведено сравнение этого выражения с выражением для скорости выделения энергии, полученным с использованием закона сохранения энергии. Исследуется скорость выделения энергии деформации в балке, толщина которой меняется по параболическому закону и по закону тангенса.

Ключевые слова: неоднородный материал, многослойная балка, непрерывно изменяющаяся толщина, нелинейный материал, расслоение.

DOI: 10.15372/PMTF20210106

**Введение.** Многослойные неоднородные балки, толщина которых непрерывно меняется по длине балки, состоят из склеенных слоев, материалы которых различны. Многослойные материалы используются при изготовлении конструкций, работающих в экстремальных условиях (при высокой температуре, в химически активной среде) [1–4]. Одним из недостатков слоистых конструкций является высокая вероятность появления в них трещин расслоения [5–10]. Изучение процесса расслоения в многослойных конструкциях представляет интерес для инженерной практики. В работах [5–10] исследовалось расслоение балок постоянной толщины.

Целью данной работы является исследование процесса расслоения в многослойной неоднородной балке, толщина которой непрерывно меняется в продольном направлении. Балка состоит из произвольного числа вертикально расположенных и склеенных между собой слоев. Материал каждого слоя является нелинейно-упругим и неоднородным в поперечном направлении. В работе используется подход, развитый в [2, 6, 7] при вычислении скорости выделения энергии деформации в многослойных балках. В работах [2, 6, 7] при выводе выражения для скорости выделения энергии деформации учитывались только нормальные напряжения, вызванные изгибающим моментом. В настоящей работе балка рассматривается как одномерная конструкция, изготовленная из нелинейно-упругого материала. В такой постановке задача упрощается. Построенное решение является точным для балки с большим отношением ее длины к толщине.

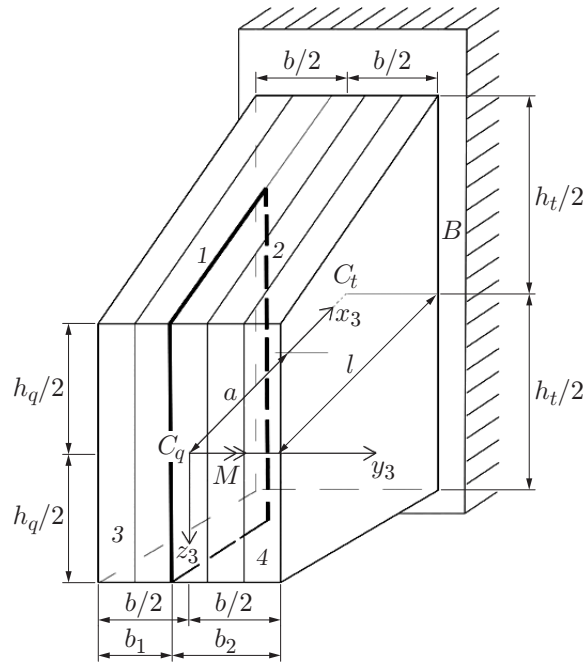


Рис. 1. Геометрия и способ нагружения многослойной неоднородной балки, толщина которой изменяется по линейному закону:

1 — трещина, 2 — фронт трещины, 3 — слой 1, 4 — слой  $n$

**1. Исследование скорости выделения энергии.** Рассматривается неоднородная многослойная балка длиной  $l$  при наличии в ней трещины расслоения (рис. 1). Сечение  $B$  балки зашцеplено. Поперечное сечение балки является прямоугольником шириной  $b$  и высотой  $h$ . Ширина балки постоянна. Продольное сечение балки является равнобедренной трапецией. Высота балки изменяется по линейному закону от значения  $h_q$  на ее свободном торце до значения  $h_t$  на зашцеplенном торце:

$$h = h_q + \frac{h_t - h_q}{l} x_3, \quad 0 \leq x_3 \leq l \quad (1)$$

(координата  $x_3$  указана на рис. 1). Трещина расслоения длиной  $a$  расположена между слоями. Части балки, расположенные слева и справа от трещины, имеют ширину  $b_1$  и  $b_2$  соответственно. На свободном торце балки приложен изгибающий момент  $M$ , так чтобы напряжения на части свободного торца, расположенного слева от трещины, были равны нулю.

Выражение для скорости выделения энергии  $G$  получается путем дифференцирования выражения для дополнительной энергии  $U^*$  по площади поперечного сечения трещины  $A$  [10]:

$$G = \frac{dU^*}{dA}. \quad (2)$$

Здесь

$$dA = h da, \quad (3)$$

$da$  — приращение длины трещины. Из (2), (3) следует

$$G = \frac{1}{h} \frac{dU^*}{da}.$$

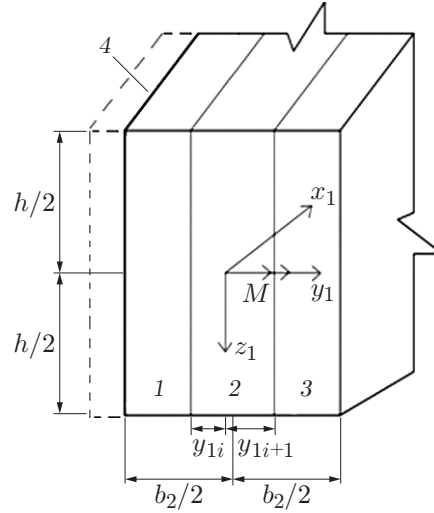


Рис. 2. Поперечное сечение части балки, расположенной справа от трещины:  
1 — слой 1, 2 — слой  $i$ , 3 — слой  $n_1$ , 4 — трещина

Поскольку часть балки, расположенная слева от трещины, свободна от напряжений, выражение для дополнительной энергии, аккумулированной в балке, можно представить в виде

$$U^* = U_1^* + U_2^*, \quad (4)$$

где  $U_1^*$ ,  $U_2^*$  — дополнительные энергии в части балки, расположенной справа от трещины, и в части балки, не содержащей трещину ( $a \leq x_3 \leq l$ ), соответственно. Дополнительная энергия  $U_1^*$  вычисляется по формуле

$$U_1^* = \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_0^a \int_{y_{1i}}^{y_{1i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{01i}^* dx_3 dy_1 dz_1, \quad (5)$$

где  $n_1$  — число слоев в части балки, расположенной справа от трещины;  $u_{01i}^*$  — плотность скорости выделения энергии в  $i$ -м слое; координаты  $y_{1i}$ ,  $y_{1i+1}$  указаны на рис. 2.

Напряжения и деформации в слоях балки связаны соотношениями [11]

$$\sigma_i = E_i \varepsilon / \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad (6)$$

где  $\sigma_i$ ,  $E_i$  — нормальное напряжение и модуль упругости в  $i$ -м слое;  $\varepsilon$  — продольная деформация. Предполагается, что модуль упругости в  $i$ -м слое изменяется по его ширине по степенному закону

$$E_i = E_{Li} + \frac{E_{Di} - E_{Li}}{(y_{1i} - y_{1i+1})^{m_i}} (y_1 - y_{1i})^{m_i}, \quad (7)$$

где  $y_{1i} \leq y_1 \leq y_{1i+1}$ ;  $E_{Li}$ ,  $E_{Di}$  — модули упругости на левой и правой поверхностях слоя соответственно;  $m_i$  — показатель степени для  $i$ -го слоя.

Плотность дополнительной энергии деформации  $u_{01i}^*$  вычисляется по формуле [8]

$$u_{01i}^* = \sigma_i \varepsilon - u_{01i}, \quad (8)$$

где  $u_{01i}$  — плотность энергии деформации. Интегрируя соотношение (6) в пределах от 0 до  $\varepsilon$ , получаем выражение для плотности энергии деформаций

$$u_{01i} = E_i (\sqrt{1 + \varepsilon^2} - 1). \quad (9)$$

Подставляя (6), (9) в (8), находим

$$u_{01i}^* = E_i(1 - 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}). \quad (10)$$

Отношение высоты балки к ее длине полагается таким, что справедлива гипотеза плоских сечений Бернулли

$$\varepsilon = \varkappa_1 z_1, \quad (11)$$

где  $-h/2 \leq z_1 \leq h/2$ ;  $\varkappa_1$  — кривизна средней линии в части балки, расположенной справа от трещины.

Кривизна  $\varkappa_1$  определяется из уравнения, полученного в результате подстановки (6), (7), (11) в уравнение равновесия сил, действующих в поперечном сечении части балки, расположенной справа от трещины:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_{y_{1i}}^{y_{1i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z_1 dy_1 dz_1. \quad (12)$$

Это уравнение было решено с использованием пакета MatLab.

Дополнительная энергия деформации в части балки, не содержащей трещину, вычисляется по формуле

$$U_2^* = \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^l \int_{y_{2i}}^{y_{2i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{02i}^* dx_3 dy_2 dz_2, \quad (13)$$

где  $n$  — число слоев;  $u_{02i}^*$  — плотность дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое;  $y_2, z_2$  — координаты, отсчитываемые вдоль осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения;  $y_{2i}, y_{2i+1}$  — координаты левого и правого продольных сечений слоя.

С использованием формулы (10) вычисляется плотность дополнительной энергии деформации в  $i$ -м слое части балки, не содержащей трещину. При этом деформация  $\varepsilon$  заменяется на продольную деформацию  $\varepsilon_P$  в части балки, не содержащей трещину. Выражение для деформации  $\varepsilon_P$  получается из формулы (11) после замены  $\varkappa_1$  и  $z_1$  на  $\varkappa_2$  и  $z_2$  ( $\varkappa_2$  — кривизна нейтральной линии в части балки, не содержащей трещину). Уравнение равновесия (12) используется для определения кривизны  $\varkappa_2$ . При этом величины  $n_1, y_{1i}, y_{1i+1}, \sigma_i, z_1, y_1$  заменяются на  $n, y_{2i}, y_{2i+1}, \sigma_{Pi}, y_2, z_2$  соответственно. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{Pi}$  в  $i$ -м слое части балки, не содержащей трещину, вычисляется по формуле (6) после замены деформации  $\varepsilon$  на деформацию  $\varepsilon_P$ .

Наконец, подставляя (5), (6), (13) в (4), получаем формулу для вычисления скорости выделения энергии деформации

$$G = \frac{1}{h} \left( \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_{y_{1i}}^{y_{1i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{01i}^* dy_1 dz_1 - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{y_{2i}}^{y_{2i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{02i}^* dy_2 dz_2 \right), \quad (14)$$

где  $h, u_{01i}^*, u_{02i}^*$  вычисляются по формулам (1), (10) при  $x_3 = a$ . Интегралы в формуле (14) вычислялись с использованием пакета MatLab.

С целью проверки формулы (14) скорость выделения энергии деформации в балке, содержащей трещину расслоения, вычислялась также с использованием закона сохранения энергии. Для этого использовалась следующая процедура.

Для малого приращения длины трещины  $\delta a$  записывается закон сохранения энергии

$$M \delta \varphi = \frac{\partial U}{\partial a} \delta a + Gh \delta a, \quad (15)$$

где  $\delta\varphi$  — приращение угла поворота части свободного торца балки, расположенного справа от трещины;  $U$  — энергия деформации, аккумулированная в балке. С учетом (15) имеем

$$G = \frac{M}{b} \frac{\partial\varphi}{\partial a} - \frac{1}{b} \frac{\partial U}{\partial a}. \quad (16)$$

Угол поворота  $\varphi$  вычисляется с использованием интегралов Максвелла — Мора:

$$\varphi = \int_0^a \varkappa_1(x_3) dx_3 + \int_a^l \varkappa_2(x_3) dx_3. \quad (17)$$

Энергия деформации балки есть сумма энергии деформации в части балки, расположенной справа от трещины, и энергии деформации в части балки, не содержащей трещину:

$$U = U_1 + U_2. \quad (18)$$

Здесь

$$U_1 = \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_0^a \int_{y_{1i}}^{y_{1i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{01i} dx_3 dy_1 dz_1, \quad U_2 = \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^l \int_{y_{2i}}^{y_{2i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{02i} dx_3 dy_2 dz_2,$$

величина  $u_{01i}$  вычисляется по формуле (9).

Подставляя (16)–(18) в (15), получаем выражение для скорости выделения энергии деформации

$$G = \frac{M}{b} [\varkappa_1(a) - \varkappa_2(a)] - \frac{1}{b} \left( \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_{y_{1i}}^{y_{1i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{01i} dy_1 dz_1 - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{y_{1i}}^{y_{1i+1}} \int_{-h/2}^{h/2} u_{02i} dy_2 dz_2 \right), \quad (19)$$

где  $h$ ,  $u_{01i}$ ,  $u_{02i}$ ,  $\varkappa_1(a)$ ,  $\varkappa_2(a)$  вычисляются по формулам (1), (9), (12) при  $x_3 = a$ . Вычисление интегралов, содержащихся в формуле (19), выполнено с использованием пакета MatLab. Следует отметить, что скорость выделения энергии деформации, вычисленная по формуле (19), совпадает со скоростью выделения энергии деформации, вычисленной по формуле (14). Это свидетельствует о точности предложенного метода исследования расслоения многослойной балки, толщина которой изменяется по линейному закону.

**2. Результаты численного решения задачи.** Ниже приведены результаты численного решения задачи при различных значениях параметров. Безразмерная скорость выделения энергии деформации  $G_N = G/(E_{L1}b)$  вычислялась по формуле (14). На рис. 3 приведены схемы многослойных балок с различным расположением трещины между слоями. Во всех случаях толщина каждого слоя равна  $s$ . Вычисления выполнены при следующих значениях параметров: ширина слоя  $s = 0,002$  м,  $h_q = 0,006$  м,  $l = 0,120$  м,  $M = 2$  Н·м.

Скорость изменения толщины балки определяется отношением  $h_t/h_q$ . На рис. 4 представлена зависимость безразмерной скорости выделения энергии деформации от параметра  $h_t/h_q$  при  $E_{D1}/E_{L1} = 0,5$ ,  $E_{D2}/E_{L1} = 0,6$ ,  $E_{L2}/E_{D2} = 0,8$ ,  $E_{D3}/E_{L1} = 0,5$ ,  $E_{L3}/E_{D3} = 0,7$ ,  $m = 0,6$ . Видно, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения  $h_t/h_q$ . Скорость выделения энергии деформации наибольшая в том случае, когда трещина расслоения располагается между слоями 2 и 3.

Исследовалось влияние длины трещины и неоднородности материала балки на процесс расслоения балки. Длина трещины характеризуется отношением  $a/l$ , неоднородность

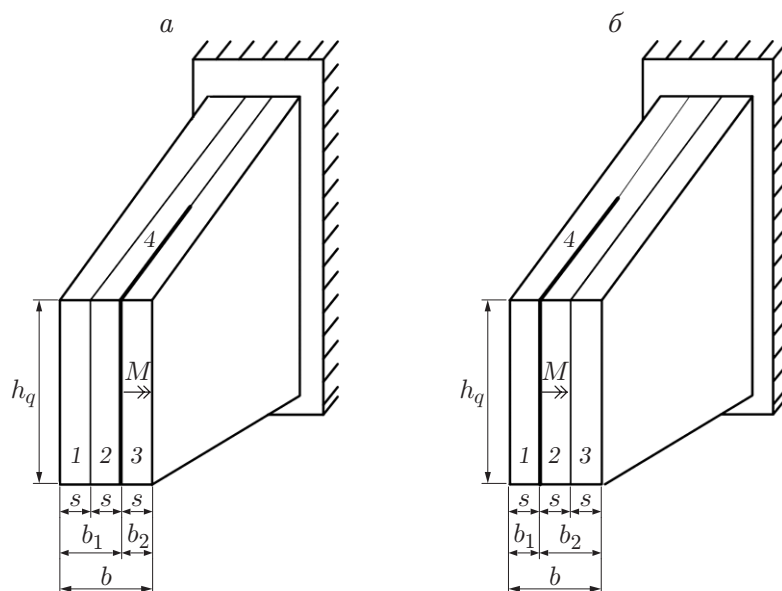


Рис. 3. Конфигурации многослойных балок, содержащих трещину расслоения, расположенную между слоями 2 и 3 (а) или между слоями 1 и 2 (б):  
1 — слой 1, 2 — слой 2, 3 — слой 3, 4 — трещина

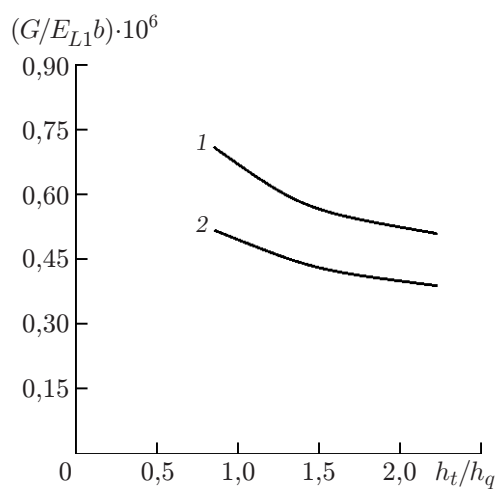


Рис. 4. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения  $h_t/h_q$  в случаях, когда трещина расположена между слоями 2 и 3 (1) и между слоями 1 и 2 (2)

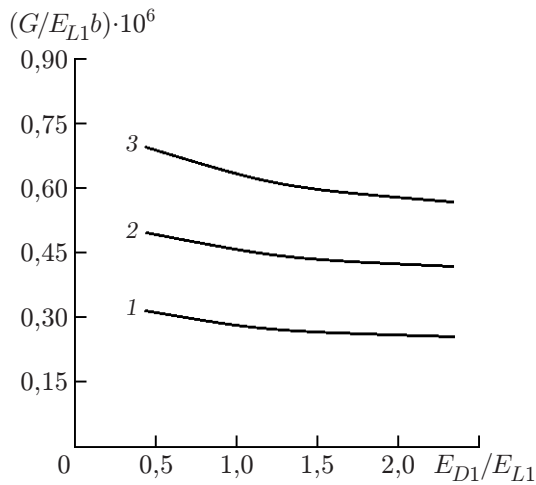


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения  $E_{D1}/E_{L1}$  при различных значениях  $a/l$ :  
 1 —  $a/l = 0,25$ , 2 —  $a/l = 0,50$ , 3 —  $a/l = 0,75$

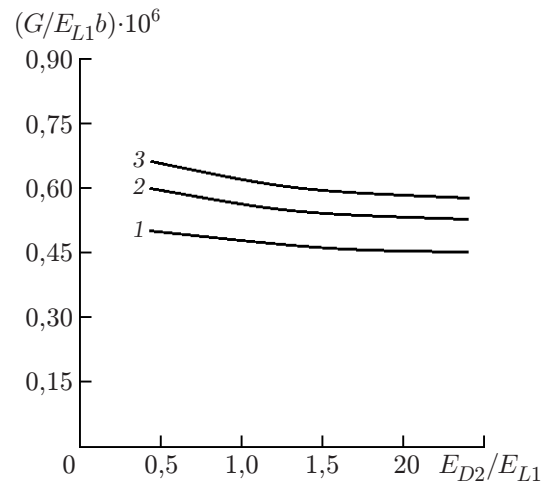


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения  $E_{D2}/E_{L1}$  в случаях, когда толщина балки изменяется по параболическому закону (20) (1), по линейному закону (1) (2) и по тангенциальному закону (21) (3)

материала — отношением  $E_{D1}/E_{L1}$ . На рис. 5 приведена зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения  $E_{D1}/E_{L1}$  при различных значениях отношения  $a/l$ . Скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношений  $E_{D1}/E_{L1}$  и  $a/l$ .

Исследовалось также влияние геометрии балки на скорость выделения энергии деформации. Помимо линейного закона изменения толщины балки рассматривались параболический закон

$$h = h_q + (h_t - h_q) \sqrt{x_3/l} \quad (20)$$

и закон изменения толщины по закону тангенса

$$h = h_q + (h_t - h_q) \operatorname{tg}(\pi x_3/(4l)), \quad (21)$$

где  $0 \leq x_3 \leq l$ . В соответствии с законами (20), (21) толщина балки изменяется непрерывно от значения  $h_q$  на свободном торце до  $h_t$  на защемленном. На рис. 6 представлена зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра  $E_{D2}/E_{L1}$  для законов изменения толщины балки (1), (20), (21). Скорость выделения энергии деформации вычислялась по формуле (14). При изменении толщины балки по параболическому закону скорость выделения энергии деформации меньше, чем в случае, когда изменение толщины описывается линейным законом (1). Такое поведение скорости выделения энергии деформации обусловлено тем, что при использовании параболического закона толщина при фиксированной длине трещины больше, чем при использовании линейного закона. В случае, когда толщина балки меняется по закону тангенса, скорость выделения энергии деформации больше, чем в случае, когда толщина балки изменяется по линейному закону (1). Это обусловлено тем, что при изменении толщины по закону тангенса толщина балки меньше. Скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения  $E_{D2}/E_{L1}$ . Из полученных результатов следует, что среди трех рассмотренных законов изменения толщины балки наиболее рациональным является параболический закон.

**Заключение.** Проведено исследование процесса расслоения многослойной неоднородной балки, которая состоит из вертикально расположенных и склеенных слоев и толщина которой меняется по некоторому закону. Трещина расслоения расположена между слоями. Получено выражение для скорости выделения энергии деформации для балки, толщина которой меняется по линейному закону. Материал слоев балки является нелинейно-упругим. Установлено, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения  $h_t/h_q$ . В случае, когда толщина балки изменяется по параболическому закону, скорость выделения энергии деформации меньше, чем в случае, когда толщина балки меняется по линейному закону. Однако в случае, когда толщина балки меняется по закону тангенса, скорость выделения энергии деформации больше, чем в случае, когда толщина балки меняется по линейному закону. Из полученных результатов следует, что среди трех рассмотренных законов изменения толщины балки наиболее рациональным является параболический закон.

Полученное в данной работе выражение для скорости выделения энергии деформации может быть использовано на практике при определении скорости роста трещины расслоения в многослойных неоднородных нелинейно-упругих балках различной толщины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Finot M., Suresh S.** Small and large deformation of thick and thin-film multilayers: effect of layer geometry and compositional gradients // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. P. 683–721.
2. **Malzbender J.** Mechanical and thermal stresses in multilayered materials // J. Appl. Phys. 2003. V. 95. P. 1780–1782.
3. **Yu J.-H., Guo S., Gillard D. A.** Bimaterial curvature measurements for CTE of adhesives: optimization and modelling // J. Adhes. Sci. Technol. 2003. V. 17. P. 149–164.
4. **Kim J. S., Paik K. W., Oh S. H.** The multilayer-modified Stoney's formula for laminated polymer composites on a silicon substrate // J. Appl. Phys. 1999. V. 86. P. 5474–5479.
5. **Guadette F. G., Giannopoulos A. E., Suresh S.** Interfacial cracks in layered materials subjected to a uniform temperature change // Intern. J. Fracture. 2001. V. 28. P. 5620–5629.
6. **Narin J. A.** On the calculation of energy release rates for cracked laminates with residual stresses // Intern. J. Fracture. 2006. V. 139. P. 267–293.
7. **Hsueh C. H., Tuan W. H., Wei W. C. J.** Analyses of steady-state interface fracture of elastic multilayered beams under four-point bending // Scripta Materialia. 2009. V. 60. P. 721–724.
8. **Rizov V. I.** An analytical solution to the strain energy release rate of a crack in functionally graded beams // Europ. J. Mech. A. Solids. 2017. V. 65. P. 301–312.
9. **Rizov V. I.** Delamination in a two-dimensional functionally graded beam // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2018. V. 59, N 1. P. 146–152.
10. **Rizov V. I.** Nonlinear delamination analysis of multilayered functionally graded circular shafts in torsion // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2018. V. 59, N 6. P. 1104–1110.
11. **Kishkilov M.** Introduction to theory of plasticity / M. Kishkilov, R. Apostolov. Sofia: UACEG, 1994.

*Поступила в редакцию 17/IX 2019 г.,  
после доработки — 22/IV 2020 г.  
Принята к публикации 25/V 2020 г.*