

УДК 532.685 + 539.3

**ОЦЕНКА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ
ВНЕШНЕГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ШАХТЫ “ВОРКУТИНСКАЯ”
ПО ДАННЫМ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ**

**В. Н. Захаров, Л. А. Назарова, М. И. Протасов,
Л. А. Назаров, А. В. Панов, А. П. Аверин**

*Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н. В. Мельникова РАН,
E-mail: lanazarova@ngs.ru, Крюковский тупик, 4, 111020, г. Москва, Россия*

Разработана и численно реализована объемная геомеханическая модель шахты “Воркутинская” (Печорский угольный бассейн). С использованием данных о динамических событиях, зарегистрированных стационарными сейсмостанциями, выполнена томография объекта и восстановлено поле скоростей упругих волн в освещенной части исследуемой области. Сформулирована и решена граничная обратная задача определения горизонтальных компонент внешнего поля напряжений по найденному распределению с привлечением эмпирических зависимостей скоростей упругих волн от напряжений, устанавливаемых по результатам лабораторных экспериментов.

Углепородный массив, объемная геомеханическая модель, напряженно-деформированное состояние, 3D томография, обратная задача, коэффициент бокового распора

DOI: 10.15372/FTPRPI20170603

Геомеханическое пространство — окрестность природно-антропогенного объекта, где происходит изменение физических полей, вызванное ведением горных работ [1]. Безопасность последних базируется на двух основных элементах:

- оптимальная технология разработки месторождения, призванная обеспечивать не только максимальный объем добычи, но и уровень напряжений, не превышающий критический [2];
- система оперативного контроля состояния породного массива [3–5], предназначенная для сбора сейсмоакустической, деформографической и иной прямой или косвенной информации о геомеханических полях, по результатам анализа которой могут как приниматься превентивные меры по снижению рисков наступления чрезвычайных ситуаций, так и вноситься изменения в порядок отработки запасов полезных ископаемых.

Общепринятого критерия оценки такой информации не существует, поскольку все системы мониторинга функционируют в условиях неопределенности и используют статистические методы выявления пространственно-временных закономерностей распределения параметров стохастических полей, которые прямо или косвенно характеризуют степень нарушенности и/или

накопленную упругую энергию в элементах объема контролируемого объекта [6–11]. В [12] отмечено: “Долго- и среднесрочный прогноз и оценка сейсмического риска (ОСР) используется при планировании горных работ. Однако сложилось общее мнение, что краткосрочная ОСР в настоящее время недостаточно надежна, несмотря на значительные усилия. Хотя доказано, что это трудная и, возможно, неразрешимая проблема, верится, что необходимо и далее предпринимать усилия для улучшения методики ОСР. Существует несколько направлений развития исследований по данной тематике. Например, прогноз горных ударов может быть улучшен посредством комплексирования сейсмических, деформационных и горнотехнических данных с геомеханическим моделированием поведения породного массива”.

Именно такой подход реализован в [13, 14], когда оценка состояния породного массива проводилась с использованием стохастических и детерминированных данных в рамках геомеханической модели: для различных участков контролируемого объекта построены регрессионные зависимости между параметрами сейсмической эмиссии и интегральными характеристиками поля напряжений. Это позволяет, верифицируя модель на основе ретроспективного анализа [15], прогнозировать число и суммарную энергию техногенных событий по распределению напряжений, рассчитанному в соответствии с перспективным планом горных работ.

В [16, 17] теоретически обоснован новый подход к моделированию текущего напряженно-деформированного состояния обрабатываемого месторождения по данным пассивной и/или активной томографии и экспериментов для определения эмпирической зависимости скорости продольных волн V от среднего напряжения σ . В настоящее время разработанный подход применен для реконструкции геомеханических полей в окрестности шахты “Воркутинская” ОАО “Воркутауголь”. В качестве входной информации использовались результаты локации стационарными сейсмостанциями очагов динамических событий и калибровочных взрывов, а также данные лабораторных испытаний углей [18] и песчаников [19].

ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА И ГЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Воркутинское месторождение представляет собой брахисинклинальную складку, длина которой по субмеридиональной оси 30 км, ширина от 12 км на севере до 5 км на юге [20]. Геологическая структура месторождения выполнена угленосными отложениями пермского возраста (переслаивающиеся песчаники, алевролиты и угли), перекрытыми четвертичными отложениями (суглинки, супеси, глины, галечники) мощностью от 10 до 100 м. В тектоническом отношении поле шахты “Воркутинская” в пределах первого горизонта является простым, поэтому в нулевом приближении в геомеханической модели нарушения сплошности не вводились.

Учет балансовых запасов месторождения проведен по пяти пластам: Тройному (N14+N13+N12), Первому (N14), Двойному (N13+N12), Четвертому и Пятому. Пласт Тройной (мощность 2.45–3.59 м, средняя 2.85 м) — верхний рабочий пласт, состоит из двух угольных пачек, разделенных тонким прослоем углистого аргиллита. В кровле и почве залегают аргиллиты, алевролиты, песчаники. Пласт Первый (мощность 1.15–1.97 м, средняя 1.48 м) — верхняя часть пласта Тройного, развит в юго-восточной части шахтного поля; мощность пласта Двойного составляет 1.6 м. Пласт Четвертый (средняя мощность 1.52 м) отличается простым строением, залегает в 20 м ниже пласта Тройного. Кровля и почва пласта сложена также алевролитами, аргиллитами, песчаниками. Пласт Пятый (средняя мощность 1 м) расположен на 40 м ниже пласта Четвертого, имеет в основном простое строение.

В качестве расчетной области R выберем параллелепипед с размерами $X = 1920$ м, $Y = 3750$ м, $Z = 400$ м по соответствующим осям декартовой системы координат x, y, z (рис. 1). Верхняя граница G находится на глубине $H = 500$ м, ось аппликат вертикальна, ось ординат

(азимут 230°) ориентирована по направлению развития горных работ, которое совпадает с направлением максимальной горизонтальной компоненты природного поля напряжений, что обеспечивает [2] лучшую устойчивость кровли выработок. Очистное пространство (пласт Тройной, размеры в плане 200×200 м, глубина около 750 м) расположено в центральной части G .

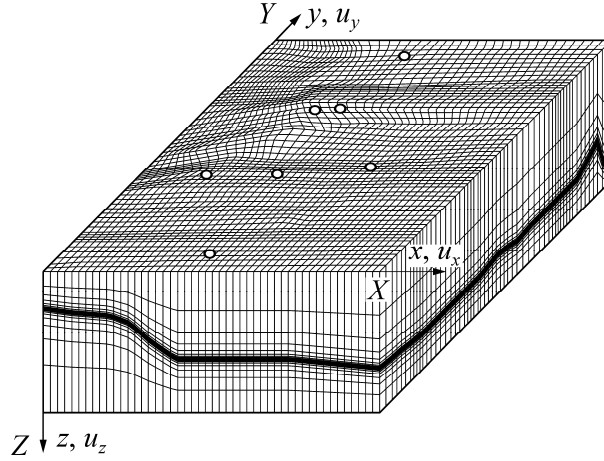


Рис. 1. Расчетная область G и фрагмент конечно-элементной дискретизации (показано сгущение сетки только в окрестности пласта Тройной)

В области G выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + \rho g \delta_{iz} = 0, \quad (1)$$

закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2)$$

и соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций ($i, j = x, y, z$); u_i — смещения; λ, μ — параметры Ламе; ρ — плотность; g — ускорение свободного падения; δ_{ij} — дельта Кронекера.

На ∂G сформулируем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, 0) = \sigma_V(H), \quad \sigma_{xz}(x, y, 0) = \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0, \\ u_z(x, y, Z) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, y, Z) = \sigma_{yz}(x, y, Z) = 0, \\ u_x(0, y, z) = 0, \quad \sigma_{xy}(0, y, z) = \sigma_{xz}(0, y, z) = 0, \\ \sigma_{xx}(X, y, z) = q_x \sigma_V(H + z), \quad \sigma_{xy}(X, y, z) = \sigma_{xz}(X, y, z) = 0, \\ u_y(x, 0, z) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, 0, z) = \sigma_{yz}(x, 0, z) = 0, \\ \sigma_{yy}(x, Y, z) = q_y \sigma_V(H + z), \quad \sigma_{xy}(x, Y, z) = \sigma_{yz}(x, Y, z) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma_V(z) = \rho g z$ — литостатическое давление; q_x, q_y — коэффициенты бокового распора, характеризующие горизонтальные напряжения во внешнем поле.

Область G разбита на $196 \times 378 \times 54$ шестигранников, вертикальный размер которых в окрестности угольных пластов составлял 0.3–0.5 м. Краевая задача (1)–(4) реализована методом конечных элементов с применением оригинального кода [21, 22], расчеты проведены на базе Сибирского суперкомпьютерного центра СО РАН.

Для расчетов квазистатических полей напряжений использовались статические значения модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν , приведенные в табл. 1. Параметры Ламе связаны с E и ν известными соотношениями [23]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

ТАБЛИЦА 1. Упругие характеристики и плотность пород

Порода	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³	Источник
Уголь	6	0.20	1400	[18]
Аргиллит, песчаник	40	0.25	2200	[24]

ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА 3D ТОМОГРАФИИ

Известно (например, [25]), что скорость распространения упругих волн в горных породах зависит от приложенных напряжений. Этот эффект используют для выявления напряженных зон в массивах [26], оценки напряжений в окрестности скважин [27] и выработок [28]. В [16, 17] участок породного массива рассматривается как своеобразный сенсор, “показания” которого (распределение скорости продольных волн), “регистрируемые” с помощью томографии, позволяют в рамках геомеханической модели определить горизонтальные компоненты поля напряжений вне зоны влияния горных работ и, следовательно, рассчитать напряженно-деформированное состояние исследуемого объекта.

Зададимся эмпирической зависимостью

$$V(\sigma) = b - ce^{-a\sigma/\sigma_0}, \quad (5)$$

где значения констант при $\sigma_0 = 5$ МПа приведены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Значения эмпирических параметров в соотношении (5)

Порода	b , м/с	c , м/с	a	Источник
Уголь	2698	484	0.779	[18]
Аргиллит, песчаник	4212	1498	0.592	[19, 28]

Для тестирования алгоритма 3D томографии, созданного на основе [29], по (1)–(4) в R рассчитаны напряжения при $q_x = q_y = 0.5$, а затем по (5) — “точное” распределение скоростей продольных волн $V_*(x, y, z)$. В области $T = \{a \leq x \leq X - a, a \leq y \leq Y - a, a \leq z \leq Z - a\}$ случайным образом располагались источники S_k ($k = 1, \dots, K$) в пунктах с координатами (x_k, y_k, z_k) . Система наблюдений включала M приемников, расположенных в узлах равномерной сетки $R_m(x_m, y_m, 0)$ на верхней границе G . Входные данные для томографии — время t_{km} пробега продольной волны вдоль луча $S_k R_m$ вычислялось по формуле

$$t_{km} = \int_{S_k R_m} \frac{dl}{V_*(x, y, z)}.$$

Численные эксперименты проводились при $K = 200 - 400$, $M = 100 - 200$ и $a = 50$ м. На рис. 2 в вертикальном сечении $x = 1000$ м показаны линии уровня соответственно V_* и восстановленной по результатам томографии (при $K = 400$, $M = 200$) скорости распространения продольных волн. Видно, что при достаточно плотной расстановке приемников и равномерном в T случайном распределении источников ошибка $\Delta = |1 - V_T / V_*|$ (рис. 3) не превышает 3%

всюду в T , за исключением низкоскоростных угольных пластов. Мощность последних не превышает 3–5 м, расстояние между приемниками 20 м, поэтому при такой системе наблюдений осуществлять мониторинг напряженно-деформированного состояния пласта в процессе очистных работ невозможно. Для этого необходимы локальные системы регистрации, согласованные с местоположением забоя при ведении горных работ, а также специализированные алгоритмы томографии, предназначенные для инверсии данных 3D зондирования тонкослоистых сред [30].

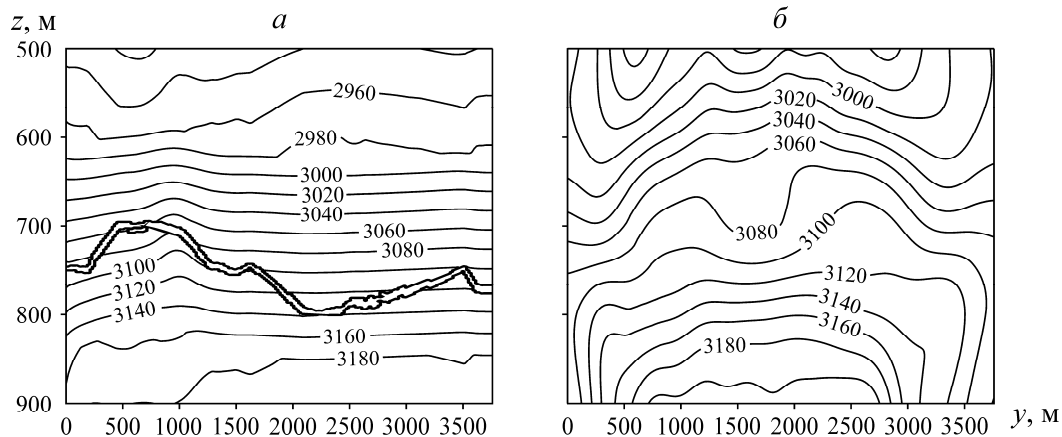


Рис. 2. Изолинии скорости продольных волн (м/с) в сечении $x = 1000$ м: расчетной V_* (а), восстановленной в результате томографии (б)

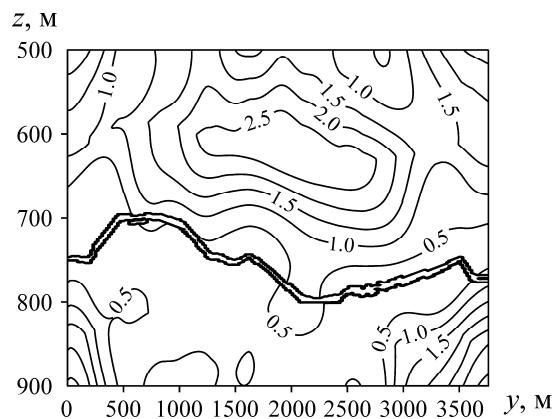


Рис. 3. Линии уровня относительной ошибки Δ (%) в сечении $x = 1000$ м

ОЦЕНКА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ДАННЫМ ПАССИВНОЙ ТОМОГРАФИИ

Одним из важных элементов геомеханического обоснования схем вскрытия и технологий отработки месторождений твердых полезных ископаемых является определение величины и направления действия горизонтальных составляющих естественного поля напряжений. Последнее для исследуемого объекта необходимо рассматривать как внешнее поле, которое может квазистатически изменяться с развитием горных работ на соседних шахтах (“Комсомольская”, “Северная”, “Заполярная”), находящихся в области влияния геомеханического пространства шахты “Воркутинская”. Результаты измерений [31, 32] свидетельствуют, что локальные значения горизонтальных напряжений в зоне влияния горных работ лежат в диапазоне $(0.4 - 1.8)\sigma_V$. По такой информации затруднительно оценить величину внешних напряжений, поэтому используется разработанный в [16] подход, основанный на решении граничных обратных задач по томографическим данным.

Для проведения томографии взяты данные локаций очагов динамических событий семи сейсмостанций (проекция их местоположения на поверхность $z = 0$ показаны светлыми кружками на рис. 1), а также пяти калибровочных взрывов. Всего за период 01.01.2017 – 01.09.2017 зарегистрировано около 350 событий с энергией до 1 кДж.

На рис. 4 в качестве примера входных данных представлены проекции на произвольную горизонтальную плоскость P лучей, соединяющих сейсмостанции и места взрывов. Штриховой треугольник — проекция на P наиболее освещенной области D , которая использовалась для томографии.

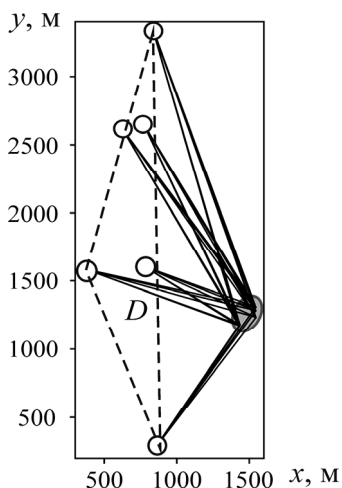


Рис. 4. Проекция на горизонтальную плоскость наиболее освещенной области и лучей “калибровочный взрыв – сейсмостанция”. Эллипсом отмечены места взрывов

На рис. 5 приведены изолинии скорости продольных волн V_T (в сечениях $y = 200, 210$ м), полученные в результате томографии. Введем целевую функцию

$$\Psi(q_x, q_y) = \frac{\sqrt{W_D \iiint_D [V(x, y, z, q_x, q_y) - V_T(x, y, z)]^2 dx dy dz}}{\iiint_D V_T(x, y, z, q_x, q_y) dx dy dz}$$

— относительную среднеквадратичную ошибку между “измеренной” скоростью V_T и теоретической $V(x, y, z, q_x, q_y)$, рассчитанной по (1)–(4) с помощью (5); W_D — объем освещенной области D .

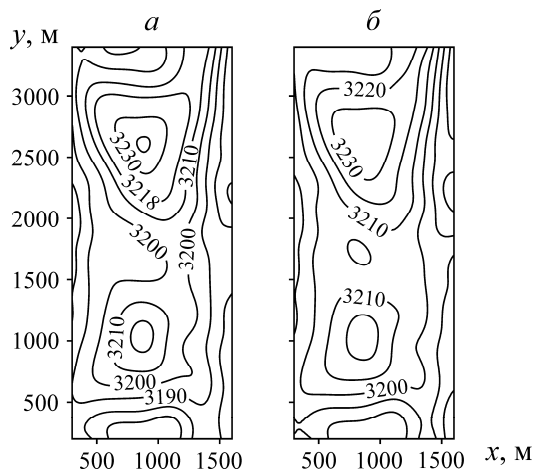


Рис. 5. Изолинии скорости V_T , полученной в результате томографии, в сечениях: $y = 200$ м (а); $y = 210$ м (б)

Изолинии функции Ψ при различном числе N зондирующих источников, использованных для томографии, представлены на рис. 6, где тоном показаны области эквивалентности ($\Psi \leq 0.1$), квадратами — начальные приближения итерационной процедуры поиска минимума Ψ [33], кругами — предельные точки.

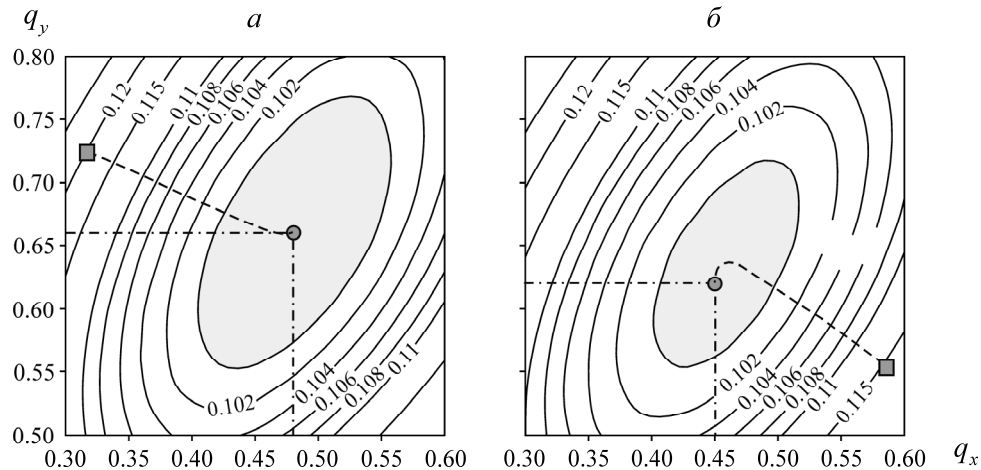


Рис. 6. Изолинии целевой функции при различном числе зондирующих источников: $N=250$ (а); $N=350$ (б)

Можно видеть, что Ψ унимодальна, ее область эквивалентности уменьшается с ростом числа источников. При $N = 250$ координаты точки минимума целевой функции на плоскости (q_x, q_y) равны $(0.48, 0.66)$, а при $N = 350$ $(0.45, 0.62)$, поэтому с точностью 10% можно принять оценку для коэффициентов бокового распора $\{0.4 \leq q_x \leq 0.49, 0.6 \leq q_y \leq 0.64\}$.

ВЫВОДЫ

По информации об очагах слабых сейсмических событий на шахте “Воркутинская” выполнена томография объекта, позволившая построить распределение скоростей продольных волн V_T . В рамках построенной объемной геомеханической модели на основе решения обратной граничной задачи с входными данными V_T определены диапазоны изменения коэффициентов бокового распора и оценены горизонтальные составляющие внешнего поля напряжений, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние исследуемого объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шемякин Е. И. Геомеханические и экологические аспекты освоения подземного пространства // Подземное пространство мира. — 1993. — № 4. — С. 21–26.
2. Бронников Д. М., Замесов Н. Ф., Богданов Г. И. Разработка руд на больших глубинах. — М.: Недра, 1982. — 292 с.
3. Захаров В. Н. Сейсмоакустическое прогнозирование и контроль состояния и свойств горных пород при разработке угольных месторождений. — М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 2002. — 172 с.
4. Zhenbi L., Baiting Zh. Microseism monitoring system for coal and gas outburst, Int. J. of Computer Science Issues, 2012, Vol. 9, Issue 5, No. 1. — P. 24–28.
5. Hudyma M. R., Brummer R. K. Seismic monitoring in mines — design, operation, tricks and traps, in Rock Mechanics: Meeting Society’s Challenges and Demands / In: Eberhardt E., Stead D., Morrison T., eds., Proceedings of the First Canada-US Rock Mechanics Symposium, 2007, Vancouver, Canada, Vol. 2, Case Histories. — P. 1423–1430.

6. **Опарин В. Н., Тапсиев А. П., Востриков В. И. и др.** О возможных причинах увеличения сейсмической активности шахтных полей рудников “Октябрьский” и “Таймырский” Норильского месторождения в 2003 г. Ч. I. Сейсмический режим // ФТПРПИ. — 2004. — № 4. — С. 3–22.
7. **Опарин В. Н., Тапсиев А. П., Востриков В. И. и др.** О возможных причинах увеличения сейсмической активности шахтных полей рудников “Октябрьский” и “Таймырский” Норильского месторождения в 2003 г. Ч. II. Рудник “Октябрьский” // ФТПРПИ. — 2004. — № 5. — С. 3–25.
8. **Опарин В. Н., Тапсиев А. П., Востриков В. И. и др.** О возможных причинах увеличения сейсмической активности шахтных полей рудников “Октябрьский” и “Таймырский” Норильского месторождения в 2003 г. Ч. III. Рудник “Таймырский” // ФТПРПИ. — 2004. — № 6. — С. 5–22.
9. **Куксенко В. С.** Диагностика и прогнозирование разрушения крупномасштабных объектов // ФТТ. — 2005. — Т. 47. — № 5. — С. 788–792.
10. **Рассказов И. Ю., Цирель С. В., Розанов А. О. и др.** Использование данных сейсмоакустических наблюдений для определения характера развития очага разрушения породного массива // ФТПРПИ. — 2017. — № 2. — С. 29–37.
11. **Leslie I.** Microseismic management for macro-scale benefits, *Mining Magazine*, 2013. — P. 38–40.
12. **Durrheim R. J., Cichowicz A., Ebrahim-Trollope R., et al.** Guidelines, standards and best practice for seismic hazard assessment and rockburst risk management in South African mines. In: Potvin Y, ed. *Deep Mining*. Perth: Australian Centre for Geomechanics, 2007. — P. 249–261.
13. **Al Heib M.** Numerical and geophysical tools applied for the prediction of mine induced seismicity in french coalmines, *Int. J. of Geosciences*, 2012, Vol. 3, No. 4A. — P. 834–846.
14. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Мирошниченко Н. А. и др.** Эволюция геомеханических полей и техногенная сейсмичность при отработке месторождений полезных ископаемых // ФТПРПИ. — 2011. — № 6. — С. 3–12.
15. **Nazarova L. A., Nazarov L. A., Shkuratnik V. L., et al.** Acoustic approach to estimation of rock mass state and prediction of induced seismicity parameters: Theory, laboratory experiment and case study, *ISRM International Symposium “Rock Mechanics in Africa”, 3–5 October, 2017, Cape Town, South Africa, SAIMM, Symposium Series S93, Vol. 1.* — P. 593–604.
16. **Nazarova L. A., Zakharov V. N., Shkuratnik V. L., et al.** Use of tomography in stress-strain analysis of coal-rock mass by solving boundary inverse problems, *Procedia Engineering*, 2017. — P. 1048–1055.
17. **Назарова Л. А., Назаров Л. А., Протасов М. И.** Реконструкция объемных полей напряжений в углепородном массиве на основе решения обратной задачи по томографическим данным // ФТПРПИ. — 2016. — № 4. — С. 12–21.
18. **Шкуратник В. Л., Николенко П. В., Кошелев А. Е.** Зависимость скорости распространения и амплитуды продольных упругих волн от напряжений при различных режимах нагружения образцов каменного угля // ФТПРПИ. — 2016. — № 5. — С. 48–53.
19. **Pervukhina M., Gurevich B., Dewhurst D. N., Siggins A. F.** Applicability of velocity-stress relationships based on the dual porosity concept to isotropic porous rocks, *Geophysical J. Int.*, 2010, Vol. 181, No. 3. — P. 1473–1479.
20. **Вернигор В. М., Осипов А. Н.** Обеспечение геодинамической безопасности при отработке Воркутского угольного месторождения // ГИАБ. — 2000. — № 7. — С. 122–123.
21. **Дядьков П. Г., Назаров Л. А., Назарова Л. А.** Численное моделирование напряженного состояния земной коры и условий возникновения динамической неустойчивости сейсмоактивных разломов при рифтогенезе // *Геология и геофизика*. — 1997. — Т. 38. — № 12. — С. 2001–2010.
22. **Дядьков П. Г., Назаров Л. А., Назарова Л. А. и др.** Сейсмотектоническая активизация Байкальского региона в 1989–1995 годах: результаты экспериментальных наблюдений и численное моделирование изменений напряженно-деформированного состояния // *Геология и геофизика*. — 1999. — Т. 40. — № 3. — С. 373–386.

23. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
24. **Справочник** (кадастр) физических свойств горных пород / ред. Н. В. Мельников, М. М. Протодяконов, В. В. Ржевский. — М.: Недра, 1975. — 279 с.
25. **Singh R., Rai C., Sondergeld C.** Pressure dependence of elastic wave velocities in sandstones, 76th Int. Exposition and Annual Meeting, 2006, SEG, Exanded Abstract. — P. 1883–1887.
26. **Chen T., Wang X., Mukerji T.** In situ identification of high vertical stress areas in an underground coal mine panel using seismic refraction tomography, *Int. J. of Coal Geology*, 2015, Vol. 149. — P. 55–66.
27. **Sayers C. M.** Effects of borehole stress concentration on elastic wave velocities in sandstones, *Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2007, Vol. 44 (7). — P. 1045–1052.
28. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Роменский Е. И., Чеверда В. А., Эпов М. И.** Акустический метод определения напряжений в массиве горных пород на основе решения обратной задачи // *ДАН*. — 2016. — Т. 466. — № 6. — С. 718–721.
29. **Кабаник А. В., Орлов Ю. А., Чеверда В. А.** Численное решение задачи линейной сейсмической томографии на проходящих волнах: случай неполных данных // *Сиб. журн. индустр. математики*. — 2004. — Т. 7. — № 2. — С. 54–67.
30. **Woodward M. J., Nichols D., Zdraveva O., et al.** A decade of tomography, *Geophysics*, 2008, Vol. 73, No. 5. — P. VE5–VE11.
31. **Квятковская Е. Е.** Прогноз формирования зон повышенного горного давления при отработке свиты удароопасных угольных пластов: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — СПб., 2014. — 19 с.
32. **Квятковская Е. Е., Мартыненко П. В.** Критерий построения опасных зон для Воркутинского месторождения // *ГИАБ*. — 2014. — № 4. — С. 398–402.
33. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Карчевский А. Л., Панов А. В.** Оценка напряжений и деформационных свойств породных массивов на основе решения обратной задачи по данным измерений смещений на свободных границах // *Сиб. журн. индустр. математики*. — 2012. — Т. 15. — № 4. — С. 102–109.

Поступила в редакцию 1/XI 2017