УДК 539.3

РЕГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

Построены две системы уравнений Фредгольма второго рода для решения второй краевой задачи изгиба анизотропной пластины (на границе односвязной области заданы нормальный изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила) в предположении справедливости гипотез Кирхгофа — Лява. Указаны корректные условия равновесия для рассматриваемой краевой задачи.

Ключевые слова: анизотропия, пластина, уравнения Фредгольма второго рода.

В данной работе построены регулярные интегральные уравнения для решения второй краевой задачи изгиба анизотропной пластины в односвязной ограниченной области с ляпуновской границей. Предполагается, что на границе области заданы нормальный изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила. Эта краевая задача не относится к классу однозначно разрешимых, так как на границе заданы комбинации вторых и третьих производных решения, а уравнение для прогиба имеет четвертый порядок. Поэтому прогиб определен только с точностью до линейной функции координат и в этом смысле имеем аналогию с первой краевой задачей в теории упругости (на границе задан вектор усилий). Согласно теории уравнений в частных производных эта задача сопряжена с первой краевой задачей (на границе заданы прогиб и его нормальная производная). Для первой краевой задачи система регулярных интегральных уравнений была построена ранее автором [1] при минимальных ограничениях на границу области и граничные данные в гельдеровом классе функций. Представляло интерес построение аналогичной системы уравнений для сопряженной задачи. Существование единственного (с точностью до линейной функции) обобщенного решения сопряженной задачи доказано в [2] для изотропного материала. Существование обобщенного решения для анизотропного материала непосредственно следует из методов, изложенных в монографии [2]. Построение системы регулярных уравнений для изучаемой краевой задачи осложняется тем обстоятельством, что в выражение обобщенной перерезывающей силы входит производная по длине дуги, и, строго говоря, функции, задающие границу области, должны иметь две непрерывные производные. Однако в свое время С. Г. Лехницкий [3] предложил оригинальный прием, позволяющий обойти это затруднение в теории анизотропных пластин. При помощи этого приема и с использованием другого, уже применявшегося ранее в теории упругости [4], удалось построить систему регулярных интегральных уравнений для изучаемой краевой задачи в ограниченной области с ляпуновской границей для анизотропного материала. При этом можно осуществить предельный переход к изотропному материалу.

1. Запишем однородное уравнение изгиба пластины в дивергентной форме

$$L(w(x_1,x_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,M_{11} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\,M_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,M_{22} = 0. \tag{1.1}$$

Изгибающие моменты M_{ij} $(i,j=1,2)$ вычисляются по формулам

$$-M_{11} = D_{11}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{16}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2},$$

$$-M_{22} = D_{12}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{26}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2},$$

$$-M_{12} = D_{16}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{66}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

Здесь D_{ij} $(i,j=1,2,6)$ — жесткости изгиба; $w(x_1,x_2)$ — прогиб пластины. Перерезывающие силы равны

$$N_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \qquad N_{22} = \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}.$$

Разумеется, предполагается положительная определенность матрицы жесткостей изгиба. Запишем формулу Грина для рассматриваемой краевой задачи. Умножим (1.1) на функцию $v(x_1,x_2)$ и дважды проинтегрируем по частям. В результате получим

$$\int\limits_Q L(w)v(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{2} M_{ij}(w)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_1\,dx_2 + \\ + \int\limits_{\partial Q} (N_{11}(w)n_1 + N_{22}(w)n_2)v\,ds - \int\limits_{\partial Q} \sum_{i,j=1}^{2} M_{ij}(w)\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,n_i\,ds. \tag{1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2) = (-x_2'(s), x_1'(s))$ — вектор внутренней нормали к границе ∂Q односвязной области Q. Область ориентирована так, что ее внутренность остается слева при обходе границы в направлении против часовой стрелки. Предполагается, что начало координат лежит внутри области. Производные по нормали и по касательной к границе можно записать так:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\,n_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\,n_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\,n_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2}\,n_1. \tag{1.3}$$

Подставим (1.3) в (1.2). Тогда

$$-\int\limits_{\partial Q} \sum_{i,j=1}^{2} M_{ij}(w)\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,n_i\,ds = -\int\limits_{\partial Q} \Big(M_n(w)\,\frac{\partial v}{\partial n} + M_t(w)\,\frac{\partial v}{\partial s}\Big)\,ds.$$

Здесь

$$M_n(w) = M_{11}n_1^2 + 2M_{12}n_1n_2 + M_{22}n_2^2;$$

$$M_t(w) = (M_{11} - M_{22})n_1n_2 + M_{12}(n_2^2 - n_1^2).$$

Проинтегрируем слагаемое, содержащее касательную производную от функции $v(x_1,x_2)$, еще раз по частям вдоль границы, используя однозначность вторых производных функции $w(x_1,x_2)$. Формула Грина принимает вид

$$\int\limits_Q L(w)v(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{2} M_{ij}(w)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \Big[(N_{11}(w)n_1 + N_{22}(w)n_2) + \frac{\partial M_t(w)}{\partial s}\Big] v\,ds - \int\limits_{\partial Q} M_n(w)\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds. \qquad (1.4)$$

Поставим для уравнения (1.1) краевую задачу

$$N(w) = N_{11}(w)n_1 + N_{22}(w)n_2 + \frac{\partial M_t(w)}{\partial s}\Big|_{\partial Q} = h_1(s); \qquad (1.5)$$

$$-M_n(w)\big|_{\partial Q} = h_2(s). \qquad (1.6)$$

Предполагается, что $h_1(s) \in C^{0,\lambda}(\partial Q)$, $h_2(s) \in C^{1,\lambda}(\partial Q)$. Напомним, что по определению $g(s) \in C^{k,\lambda}(\partial Q)$, если $g(s)$ имеет k непрерывных производных, причем производная порядка k удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ ($0 < \lambda < 1$). Выясним, какими должны быть необходимые условия на граничные данные для существования решения краевой задачи (1.1), (1.5), (1.6). Пусть $w(x_1, x_2)$ — решение задачи (1.1), (1.5), (1.6), а $v(x_1, x_2)$ — решение однородной задачи. Очевидно, что вторые производные от функции v равны нулю и поэтому $v(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$. При подстановке v в (1.4) из произвольности постоянных a, b, c следует, что граничные данные должны подчиняться соотношениям (условия равновесия):

$$\int\limits_{\partial Q} h_1(s)\,ds = 0; \qquad (1.7)$$

$$\int\limits_{\partial Q} (h_1(s)x_1(s) + h_2(s)x_2'(s))\,ds = 0; \qquad (1.8)$$

$$\int\limits_{\partial Q} (h_1(s)x_2(s) - h_2(s)x_1'(s))\,ds = 0. \qquad (1.9)$$

Эти условия необходимы и достаточны для существования единственного (с точностью до линейной функции) решения краевой задачи (1.1), (1.5), (1.6). Условия (1.7)–(1.9) можно записать по-другому. Положим

$$g_1(s) = \int\limits_0^s h_1(t)\,dt, \qquad g_2(s) = h_2(s).$$

Тогда условие (1.7), очевидно, равносильно следующему: $g_1(0) = g_1(L) = 0$, а условия (1.8), (1.9) примут вид

$$\int\limits_{\partial Q} (-g_1(s)x_1'(s) + g_2(s)x_2'(s))\,ds = 0, \qquad \int\limits_{\partial Q} (g_1(s)x_2'(s) + g_2(s)x_1'(s))\,ds = 0 \qquad (1.10)$$

(L — длина границы). Приведем еще одну равносильную запись условий (1.10):

$$\int\limits_{\partial Q} (g_1(s)n_2 + g_2(s)n_1)\,ds = 0, \qquad \int\limits_{\partial Q} (-g_1(s)n_1 + g_2(s)n_2)\,ds = 0.$$

2. Напомним, что решение однородного уравнения (1.1) можно представить в виде суммы двух аналитических функций

$$w(x_1, x_2) = \operatorname{Re}(\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)).$$

Здесь $\varphi_k(z_k) = \varphi_k(x_1 + \mu_k x_2)$ $(k = 1, 2)$ — аналитические функции своих аргументов; μ_k $(\operatorname{Im}\mu_k > 0,\ k = 1, 2)$ — комплексные параметры материала, определяемые из характеристического уравнения

$$g(\mu) = D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0.$$

Величины M_{ij} $(i, j = 1, 2)$ имеют вид

$$-M_{11} = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2} p_k\varphi_k''(z_k), \qquad -M_{12} = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2} r_k\varphi_k''(z_k), \qquad -M_{22} = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2} q_k\varphi_k''(z_k),$$

где $p_k = D_{11} + D_{12}\mu_k^2 + 2D_{16}\mu_k$, $q_k = D_{12} + D_{22}\mu_k^2 + 2D_{26}\mu_k$, $r_k = D_{16} + D_{26}\mu_k^2 + 2D_{66}\mu_k$ $(k = 1, 2)$. Тогда

$$-M_n = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(p_k n_1^2 + 2n_1 n_2 r_k + q_k n_2^2)\varphi_k''(z_k).$$

Пусть $l_k = p_k n_1^2 + q_k n_2^2 + 2r_k n_1 n_2$, $k = 1, 2$. Нетрудно показать, что функции l_k $(k = 1, 2)$ пропорциональны $t_k(s) = x'(s) + \mu_k y'(s) = n_2 - \mu_k n_1$ $(k = 1, 2)$. Действительно, разделив l_k на $n_2 - \mu_k n_1$, получим равенство

$$l_k = (n_2 - \mu_k n_1)(n_2 q_k + n_1(2r_k + q_k\mu_k)) + n_1^2(p_k + 2r_k\mu_k + q_k\mu_k^2).$$

Множитель при n_1^2 равен нулю, так как

$$g(\mu_k) = p_k + 2\mu_k r_k + \mu_k^2 q_k = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Пусть

$$m_k = n_2 q_k - n_1 p_k/\mu_k, \qquad k = 1, 2.$$

Тогда $-M_n$ можно записать так:

$$-M_n = \operatorname{Re}\big(m_1(n_2 - \mu_1 n_1)\varphi_1''(z_1) + m_2(n_2 - \mu_2 n_1)\varphi_2''(z_2)\big). \tag{2.1}$$

Обратимся к граничному условию (1.6). Введем функцию

$$G(x_1, x_2) = N_{11}n_1 + N_{22}n_2.$$

Нетрудно видеть, что

$$G(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(r_k + \mu_k q_k)(n_2 - \mu_k n_1)\varphi_k'''(z_k). \tag{2.2}$$

Следовательно, $G(x_1, x_2)$ можно представить в виде

$$G(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(r_k + \mu_k q_k)\varphi_k''(z_k) = \frac{\partial M}{\partial s},$$

где

$$M(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(r_k + \mu_k q_k)\varphi_k''(z_k).$$

Поэтому

$$G+\frac{\partial M_t}{\partial s}=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(r_k+\mu_k q_k+(p_k-q_k)n_1n_2+r_k(n_2^2-n_1^2))\varphi_k'''(z_k),$$

причем

$$r_k+\mu_k q_k+(p_k-q_k)n_1n_2+r_k(n_2^2-n_1^2)=-(n_2-\mu_k n_1)(q_k n_1+p_k n_2/\mu_k).$$

В результате граничное условие (1.5) можно записать так:

$$\frac{\partial\,(M+M_t)}{\partial s}=h_1(s).$$

Это соотношение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для определения суммы $M+M_t$. Так как заданная функция $h_1(s)$ предполагается периодической функцией длины дуги, то для однозначного определения суммы $M+M_t$ функция $h_1(s)$ должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{\partial Q} h_1(s)\,ds=0,$$

т. е. условию (1.7). Это условие и достаточно. Следовательно, граничные условия (1.5), (1.6) можно записать так:

$$-(M+M_t)=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(n_2-\mu_k n_1)\Big(n_1q_k+n_2\,\frac{p_k}{\mu_k}\Big)\varphi_k''(z_k)\big|_{\partial Q}=\int\limits_0^s h_1(t)\,dt+C_1; \qquad (2.3)$$

$$M_n=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(n_2-\mu_k n_1)\Big(n_2q_k-n_1\,\frac{p_k}{\mu_k}\Big)\varphi_k''(z_k)\big|_{\partial Q}=h_2(s)\,ds \qquad (2.4)$$

(C_1 — вещественная постоянная). Будем искать $\varphi_k''(z_k)$ $(k=1,2)$ в виде интегралов типа Коши:

$$\varphi_k''(z_k)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{\alpha_k\,ds}{t_k-z_k}, \qquad k=1,2.$$

Очевидно, что

$$\varphi_k''(z_k)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{\alpha_k(t_k'(s))^{-1}\,ds}{t_k-z_k}, \qquad k=1,2.$$

Здесь α_k $(k=1,2)$ — неизвестные плотности. Предположим, что они удовлетворяют условию Гёльдера, т. е. существует постоянная λ $(0<\lambda<1)$ такая, что при любых $s,s_0\in\partial Q$ справедливо неравенство

$$|\alpha_k(s)-\alpha_k(s_0)|<C|s-s_0|^\lambda, \qquad k=1,2.$$

В этом предположении для интеграла типа Коши имеет место формула Сохоцкого, и потому при стремлении точки $z=x_1+ix_2$ к точке $t(s)=x_1(s)+ix_2(s)$ изнутри области $Q=Q_i$ получим

$$\lim_{z\to t(s_0)}\varphi_k''(z_k)=\alpha_k(s_0)(t_k'(s_0))^{-1}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{\alpha_k(t_k'(s))^{-1}\,ds}{t_k-t_{k0}}, \qquad k=1,2. \qquad (2.5)$$

Здесь $t_k = x_1(s) + \mu_k x_2(s)$, $t_{k0} = x_1(s_0) + \mu_k x_2(s_0)$ $(k = 1, 2)$. Следовательно, при подстановке (2.5) в (2.3) сумма вне знака интеграла будет равна

$$\sum_{k=1}^{2} \Big(n_1 q_k + n_2 \frac{p_k}{\mu_k}\Big)\alpha_k, \tag{2.6}$$

а в уравнении (2.4) —

$$\sum_{k=1}^{2} \Big(n_2 q_k - n_1 \frac{p_k}{\mu_k}\Big)\alpha_2. \tag{2.7}$$

Приравняем сумму (2.6) к вещественной функции $f_1(s)$, а сумму (2.7) — к вещественной функции $f_2(s)$. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2} \Big(n_2 q_k - n_1 \frac{p_k}{\mu_k}\Big)\alpha_k = f_1(s),\\ &\sum_{k=1}^{2} \Big(n_2 q_k - n_1 \frac{p_k}{\mu_k}\Big)\alpha_k = f_2(s). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нетрудно показать, что определитель при неизвестных в (2.8) не зависит от вектора нормали и равен

$$\delta = \frac{p_2 q_1}{\mu_2} - \frac{p_1 q_2}{\mu_1}.$$

Этот определитель пропорционален разности $\mu_2 - \mu_1$ и отличен от нуля ввиду положительной определенности матрицы изгибных жесткостей. Следовательно,

$$\delta\alpha_2 = -(p_1/\mu_1)\,(n_1 f_1(s) + n_2 f_2(s)) + q_1(n_2 f_1(s) - n_1 f_2(s)),$$
$$\delta\alpha_1 = (p_2/\mu_2)(n_1 f_1(s) + n_2 f_2(s)) - q_2(n_2 f_1(s) - n_1 f_2(s)).$$

Таким образом, из предыдущего построения следует, что $\varphi''_k(z_k)$ $(k = 1, 2)$ — однозначные функции координат. Но тогда $\varphi'_k(z_k)$ $(k = 1, 2)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} \varphi'_1(z_1) &= -\frac{1}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q} \Big(g_1(s)\,\frac{p_2}{\mu_2} - q_2 g_2(s)\Big) \ln(z_1 - t_1)\,ds + D_1,\\ \varphi'_2(z_2) &= -\frac{1}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q} \Big(-g_1(s)\,\frac{p_1}{\mu_1} + q_1 g_2(s)\Big) \ln(z_2 - t_2)\,ds + D_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь $g_1(s) = n_1 f_1(s) + n_2 f_2(s)$; $g_2(s) = n_2 f_1(s) - n_1 f_2(s)$.

В (2.9) выбрана определенная ветвь логарифма, например главная. Функции $\varphi'_k(z_k)$ $(k = 1, 2)$, вообще говоря, многозначны, так как логарифм при обходе границы приобретает приращение $2\pi i$. Пусть

$$k_i = \int\limits_{\partial Q} g_i(s)\,ds, \qquad i = 1, 2.$$

Для однозначности функций $\varphi'_k(z_k)$ $(k = 1, 2)$ необходимо и достаточно, чтобы приращения, получаемые ими при обходе границы, обращались в нуль. Очевидно, что это приводит к системе уравнений

$$\frac{p_2}{\mu_2}\,k_1 - q_2 k_2 = 0, \qquad -\frac{p_1}{\mu_1}\,k_1 + q_1 k_2 = 0.$$

Определитель при неизвестных k_1, k_2 совпадает с δ и по предположению отличен от нуля. Следовательно, $k_1 = k_2 = 0$ и потому плотности f_1, f_2 должны быть такими, что

$$\int\limits_{\partial Q} (n_1 f_1(s) + n_2 f_2(s))\, ds = 0, \qquad \int\limits_{\partial Q} (n_2 f_1(s) - n_1 f_2(s))\, ds = 0.$$

Отметим, что эти условия совпадают по форме с последними двумя условиями разрешимости краевой задачи (1.8), (1.9). Это совпадение не случайно.

3. Построим систему регулярных интегральных уравнений для данной задачи. Имеем

$$-(G(x_1,x_2) + M_t(x_1,x_2)) = \operatorname{Re}\Big[\frac{q_1 t_1'(s_0)}{\pi i\delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(g_1(s)\,\frac{p_2}{\mu_2} - q_2 g_2(s)\Big)\frac{ds}{t_1 - z_1}\Big] +$$
$$+ \operatorname{Re}\Big[\frac{q_2 t_2'(s_0)}{\pi i\delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(-g_1(s)\,\frac{p_1}{\mu_1} + q_1 g_2(s)\Big)\frac{ds}{t_2 - z_2}\Big]. \tag{3.1}$$

Перегруппируем слагаемые в (3.1), выделив

$$\operatorname{Re}\frac{t_1'(s_0)}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} g_1(s)\,\frac{ds}{t_1 - z_1}.$$

Тогда

$$-(G(x_1,x_2) + M_t(x_1,x_2)) = \operatorname{Re} \int\limits_{\partial Q} g_1(s)\,\frac{t_1'(s_0)\, ds}{t_1 - z_1} +$$
$$+ \operatorname{Re}\frac{q_2}{\pi i\delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(\frac{p_1}{\mu_1}\, g_1 - q_1 g_2\Big)\Big[\frac{t_1'(s_0)}{t_1 - z_1} - \frac{t_2'(s_0)}{t_2 - z_2}\Big]\, ds.$$

Аналогично получим, что

$$-M_n = \operatorname{Re} \int\limits_{\partial Q} g_1(s)\,\frac{t_1'(s_0)\, ds}{t_1 - z_1} + \operatorname{Re}\frac{p_1}{\pi i\delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(\frac{p_2}{\mu_2}\, g_1 - q_2 g_2\Big)\Big(\frac{t_1'(s_0)}{t_1 - z_1} - \frac{t_2'(s_0)}{t_2 - z_2}\Big)\, ds.$$

Далее полагаем

$$K(s,s_0) = \frac{t_1'(s_0)}{t_1 - t_{10}} - \frac{t_2'(s_0)}{t_2 - t_{20}},$$

$$K_{11} g_1 = \operatorname{Re}\frac{q_2 p_1}{\pi i\delta\mu_1} \int\limits_{\partial Q} g_1(s) K(s,s_0)\, ds, \qquad K_{12} g_2 = -\operatorname{Re}\frac{q_2 q_1}{\pi i\delta} \int\limits_{\partial Q} g_2(s) K(s,s_0)\, ds,$$

$$K_{21} g_1 = \operatorname{Re}\frac{p_2 p_1}{\pi i\delta\mu_2} \int\limits_{\partial Q} g_1(s) K(s,s_0)\, ds, \qquad K_{22} g_2 = -\operatorname{Re}\frac{p_2 q_1}{\pi i\delta} \int\limits_{\partial Q} g_2(s) K(s,s_0)\, ds.$$

Здесь $t_{k0} = x_1'(s_0) + \mu_k x_2'(s_0)$, $k = 1, 2$.

В результате получим на границе систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} g_1(s_0) + K_{11} g_1 + K_{12} g_2 &= n_1 b_1(s_0) + n_2 b_2(s_0), \\ g_2(s_0) + K_{21} g_1 + K_{22} g_2 &= n_2 b_1(s_0) - n_1 b_2(s_0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Система уравнений (3.2) — требуемая. Нетрудно показать, что для ее разрешимости граничные данные должны удовлетворять условиям

$$\int\limits_{\partial Q} (n_2 g_1(s) - n_1 g_2(s))\, ds = 0, \qquad \int\limits_{\partial Q} (n_1 g_1(s) + n_2 g_2(s))\, ds = 0. \tag{3.3}$$

Действительно, умножим (3.2) на ds_0 и проинтегрируем по s_0, учитывая, что

$$\int\limits_{\partial Q} \frac{t_k'(s_0)\, ds_0}{t_k(s) - t_k(s_0)} = -\pi i, \qquad k = 1, 2.$$

Тогда левые части уравнений (3.2) обратятся в нуль и останутся условия (3.3).

Составим сопряженную (по Фредгольму) систему уравнений к системе (3.2). Она имеет вид

$$\begin{aligned} m_1(s_0) - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} m_1(s) \frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} + \frac{p_1}{\mu_1 \pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(q_2 m_1 + \frac{p_2}{\mu_2} m_2 \Big) \Big(\frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} - \frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} \Big) = r_1(s_0), \\ m_2(s_0) - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} m_2(s) \frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} - \frac{q_2}{\pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(q_1 m_1 + \frac{p_1}{\mu_1} m_2 \Big) \Big(\frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} - \frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} \Big) = r_2(s_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

С уравнениями (3.4) связаны функции

$$v_1 = \operatorname{Re} \frac{p_2}{\mu_2 \pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(q_1 m_1 + \frac{p_1}{\mu_1} m_2 \Big) \frac{dt_1}{t_1 - z_1} - \operatorname{Re} \frac{p_1}{\mu_1 \pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(q_2 m_1 + \frac{p_2}{\mu_2} m_2 \Big) \frac{dt_2}{t_2 - z_2},$$

$$v_2 = -\operatorname{Re} \frac{q_2}{\pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(q_1 m_1 + \frac{p_1}{\mu_1} m_2 \Big) \frac{dt_1}{t_1 - z_1} + \operatorname{Re} \frac{q_1}{\pi i \delta} \int\limits_{\partial Q} \Big(q_2 m_1 + \frac{p_2}{\mu_2} m_2 \Big) \frac{dt_2}{t_2 - z_2},$$

где $m_k(s)$ $(k = 1, 2)$ — вещественные плотности. Функции v_k $(k = 1, 2)$ можно рассматривать как решение задачи Дирихле для эллиптической системы уравнений во внешней области Q_e. При этом система уравнений (3.4) имеет собственные функции $m_1(s) = 1$, $m_2(s) = 1$. Других собственных функций она не имеет. Напомним, что система уравнений, сопряженная к фредгольмовой системе уравнений, также фредгольмова.

Рассмотрим вопрос об адекватности построенной системы интегральных уравнений исходной краевой задаче. Выше показано, что для системы интегральных уравнений имеют место два условия разрешимости, а для исходной краевой должны выполняться три условия разрешимости. Следовательно, построенная система уравнений адекватна только модифицированной задаче, а не исходной. Причины этого ясны. Действительно, в исходной краевой задаче на границе задана комбинация $\partial\,(M + M_t)/\partial s$, а в (2.4) фигурирует только комбинация $M + M_t$. Адекватность исходной краевой задаче будет иметь место, если принять $f_1(s)$ в виде

$$f_1(s) = \int\limits_0^s \tilde{f}_1(t)\, dt$$

при условии

$$\int\limits_0^L \tilde{f}_1(t)\, dt = 0.$$

В результате будут выполнены все три условия разрешимости. Что можно сказать о гладкости решения задачи? Ясно, что вторые производные решения непрерывны вплоть до границы области. Обобщенная перерезывающая сила также непрерывна. Однако для существования на границе третьих производных решения необходимо потребовать, чтобы

$$x_k(s) \in C^{2,\lambda}(0, L), \qquad f_k(s) \in C^{1,\lambda}(0, L), \qquad k = 1, 2.$$

Можно аналогично [1] доказать, что система уравнений (3.2) действительно фредгольмова, т. е. ядра интегральных операторов, участвующих в этой системе, имеют, самое большее, слабую особенность, если граница удовлетворяет условию Ляпунова.

4. Построим еще одну систему интегральных уравнений. Для рассматриваемой краевой задачи можно записать однозначно разрешимую систему интегральных уравнений, если предположить, что граничные данные удовлетворяют условиям равновесия. Действительно, краевые условия (2.2), (2.3), если их еще раз проинтегрировать по длине дуги, можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} q_k \varphi_k'(z_k)\big|_{\partial Q} = \int_0^{s_0} \Big(-n_1 \Big(\int_0^s h_1(t)\,dt + C_1 \Big) + n_2 h_2(s) \Big)\,ds + D_1; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} \frac{p_k}{\mu_k}\,\varphi_k'(z_k)\big|_{\partial Q} = -\int_0^{s_0} \Big(n_2 \Big(\int_0^s h_1(t)\,dt + C_1 \Big) + n_1 h_2(s) \Big)\,ds + D_2. \tag{4.2}$$

Положим

$$g_1(s_0) = \int_0^{s_0} \Big(-n_1 \Big(\int_0^s h_1(t)\,dt + C_1 \Big) + n_2 h_2(s) \Big)\,ds,$$

$$g_2(s_0) = \int_0^{s_0} \Big(n_2 \Big(\int_0^s h_1(t)\,dt + C_1 \Big) + n_1 h_2(s) \Big)\,ds.$$

Так как функции $\varphi_k'(z_k)$ $(k = 1, 2)$ должны быть однозначными функциями координат, очевидно, должны выполняться равенства $g_k(L) = 0$, $k = 1, 2$, равносильные условиям равновесия. Система интегральных уравнений для краевой задачи (4.1),(4.2) может быть построена по аналогии с описанным выше подходом. Положим

$$\varphi_k'(z_k) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{\beta_k\,dt_k}{t_k - z_k}, \qquad k = 1, 2.$$

Определим плотности β_k $(k = 1, 2)$ из системы уравнений

$$q_1\beta_1 + q_2\beta_2 = f_{01}, \qquad p_1\beta_1/\mu_1 + p_2\mu_2\beta_2 = f_{02}, \tag{4.3}$$

где $f_{0k}(s)$ $(k = 1, 2)$ — вещественные функции. Решив систему (4.3), получим

$$\varphi_1'(z_1) = \frac{1}{\pi i\delta} \int_{\partial Q} \Big(\frac{p_2}{\mu_2}\,f_{01} - q_2 f_{02} \Big) \frac{dt_1}{t_1 - z_1}, \qquad \varphi_2'(z_2) = \frac{1}{\pi i\delta} \int_{\partial Q} \Big(-\frac{p_1}{\mu_1}\,f_{01} + q_1 f_{02} \Big) \frac{dt_2}{t_2 - z_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} q_k \varphi_k'(z_k) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} f_{01}\,\frac{dt_1}{t_1 - z_1} + \frac{1}{\pi i\delta} \int_{\partial Q} \Big(\frac{p_1 q_2}{\mu_1}\,f_{01} - q_1 q_2 f_{02} \Big) \Big(\frac{dt_1}{t_1 - z_1} - \frac{dt_2}{t_2 - z_2} \Big),$$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\frac{p_k}{\mu_k}\,\varphi_k'(z_k)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} f_{02}\,\frac{dt_2}{t_2-z_2}+\frac{1}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\Big(\frac{p_1p_2}{\mu_1\mu_2}\,f_{01}-\frac{p_1q_2}{\mu_1}\,f_{02}\Big)\Big(\frac{dt_1}{t_1-z_1}-\frac{dt_2}{t_2-z_2}\Big).$$

В результате имеем систему регулярных интегральных уравнений

$$f_{01}(s_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} f_{01}\,\frac{dt_1}{t_1-t_{10}}+\frac{1}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\Big(\frac{p_1q_2}{\mu_1}\,f_{01}-q_1q_2f_{02}\Big)\Big(\frac{dt_1}{t_1-t_{10}}-\frac{dt_2}{t_2-t_{20}}\Big)=g_1(s_0),$$

$$f_{02}(s_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} f_{02}\,\frac{dt_2}{t_2-t_{20}}+\frac{1}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\Big(\frac{p_1p_2}{\mu_1\mu_2}\,f_{01}-\frac{p_1q_2}{\mu_1}\,f_{02}\Big)\Big(\frac{dt_1}{t_1-t_{10}}-\frac{dt_2}{t_2-t_{20}}\Big)=g_2(s_0).$$

В отличие от построенной ранее системы уравнений эта система разрешима однозначно.

5. Исследуем предельный переход к изотропному материалу. Нетрудно показать, что постоянная δ пропорциональна разности $\mu_1-\mu_2$. Пусть

$$\delta=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1\mu_2}\,\chi.$$

При этом

$$\chi=2D_{11}D_{12}+(D_{11}D_{22}-D_{12}^2)\mu_1\mu_2+2D_{26}D_{11}(\mu_1+\mu_2)+\\+2D_{16}D_{26}\mu_1\mu_2+2D_{16}D_{22}\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2).$$

Из положительной определенности матрицы упругих постоянных можно извлечь неравенство нулю постоянной χ. Так, для ортотропного материала ($D_{16}=D_{26}=0$) имеем

$$\chi=4D_{11}D_{66}+(D_{11}D_{22}-D_{12}^2)\sqrt{D_{11}/D_{22}}.$$

В частности, для изотропного материала

$$\chi=(1-\nu)(3+\nu)/(1-\nu^2)^2$$

(ν — коэффициент Пуассона). При переходе к пределу получим, что

$$\frac{p_1p_2}{\chi}=\frac{1-\nu}{3+\nu},\qquad \frac{p_1q_2\mu_2}{\chi}=-\frac{i(1-\nu)}{3+\nu}.$$

При этом разность интегралов

$$\frac{t_1'(s_0)}{\pi i(\mu_1-\mu_2)}\int\limits_{\partial Q}\frac{f(s)\,ds}{t_1-z_1}-\frac{t_2'(s_0)}{\pi i(\mu_1-\mu_2)}\int\limits_{\partial Q}\frac{f(s)\,ds}{t_2-z_2}$$

переходит в интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} f(s)\,\frac{x_2'(s_0)(x_1(s)-x_1)-x_1'(s_0)(x_2(s)-x_2)}{(t-z)^2}\,ds.$$

Полагаем

$$m(s,s_0,z)=\frac{x_2'(s_0)(x_1(s)-x_1)-x_1'(s_0)(x_2(s)-x_2)}{(t-z)^2}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений для изотропного материала

$$\alpha_1(s_0) + \operatorname{Re}\frac{t_1'(s_0)}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\alpha_1(s)\,\frac{ds}{t-t_0} + \frac{1-\nu}{3+\nu}\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial Q}(\alpha_1(s)+i\alpha_2(s))m(s,s_0,t_0)\,ds =$$
$$= n_1g_1(s_0) + n_2g_2(s_0),$$

$$\alpha_2(s_0) + \operatorname{Re}\frac{t_2'(s_0)}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\alpha_2(s)\,\frac{ds}{t-t_0} - \frac{1-\nu}{3+\nu}\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}(\alpha_1(s)+i\alpha_2(s))m(s,s_0,t_0)\,ds =$$
$$= n_2g_1(s_0) - n_1g_2(s_0).$$

6. Рассматриваемая краевая задача аналогична второй краевой задаче в теории упругости (на границе задан вектор усилий). Как известно, вектор перемещений во второй краевой задаче теории упругости определен только с точностью до вектора жесткого перемещения и ее решение должно удовлетворять условиям равновесия (равенство нулю главного вектора и главного момента действующих сил). Условия равновесия в данной задаче не совпадают с условиями равновесия в теории упругости. Дело в том, что решением однородной краевой задачи является просто линейная функция. Действительно, однородное уравнение изгиба пластины можно записать в симметричном виде как систему из трех уравнений:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = N_{11}, \qquad \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = N_{22}, \qquad \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = 0. \tag{6.1}$$

Очевидно, первые два уравнения системы (6.1) аналогичны уравнениям двумерной системы уравнений теории упругости. Умножим первое уравнение на v_1, второе — на v_2, сложим их и проинтегрируем по частям. Получим равенство

$$-\int\limits_Q M_{ij}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{\partial Q} M_{ij}v_in_j\,ds = \int\limits_Q (N_{11}v_1 + N_{22}v_2)\,dx. \tag{6.2}$$

В (6.2) производится суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 2. Если бы N_{ii} ($i = 1,2$) равнялись нулю, то имела бы место стандартная система уравнений теории упругости и условия равновесия при заданном на границе векторе моментов $M_{ij}n_j$ ($i,j = 1,2$) имели вид равенства нулю главного момента и главного вектора действующих сил. Но этому препятствует наличие правой части в (6.2). Если положить $v_1 = \partial v/\partial x_1$, $v_2 = \partial v/\partial x_2$ и проинтегрировать правую часть в (6.2) по частям, получим

$$\int\limits_Q \Big(N_{11}\,\frac{\partial v}{\partial x_1} + N_{22}\,\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{\partial Q}(N_{11}n_1 + N_{22}n_2)v\,ds.$$

Интеграл по области Q в правой части обращается в нуль ввиду справедливости третьего уравнения системы (6.1). Эти вычисления показывают, что условия равновесия в рассматриваемой задаче не совпадают с классическими. Однако авторы работ [5, 6] не отмечают и не используют то обстоятельство, что данная задача не относится к классу однозначно разрешимых и ее решение должно удовлетворять условиям равновесия. Даже для изотропного материала имеются существенные разночтения в записи граничных условий этой задачи в [5] и [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боган Ю. А.** О методе потенциала для эллиптического уравнения из анизотропной теории упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 29–34.
2. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
3. **Лехницкий С. Г.** О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикл. математика и механика. 1938. Т. 2, № 2. С. 181–210.
4. **Боган Ю. А.** Об интегральных уравнениях Фредгольма в двумерной анизотропной теории упругости // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 4, № 1. С. 21–30.
5. **Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.** Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979.
6. **Прусов И. А.** Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.

Поступила в редакцию 1/IX 2004 г.