Физика горения и взрыва

4
1976 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ

П. П. Лазарев, А. С. Плешанов

Решение данной задачи, полученное в [1] в предположении непрерывности температуры T и ведущей массовой концентрации реагирующего вещества c на разрыве (фронте пламени) для длин волн возмущений Λ, больших по сравнению с ширинами зон теплопроводности δ_t и диффузии δ_d, дало критерий устойчивости

$$\mathrm{L}=D/\chi\leqslant 1,$$

где D и χ — коэффициенты диффузии и температуропроводности соответственно; L — число Льюиса. Здесь приводится точное решение этой задачи с учетом разрывов T и c для произвольных Λ. Впрочем концепция разрыва предполагает, что $\Lambda>\delta_r$, где δ_r — ширина зоны химической реакции.

Если u — нормальная скорость горения, то из известных оценок

$$\delta_t\sim u\tau_t\sim\chi/u,\ \delta_r\sim u\tau_r,$$

где τ — соответствующие времена, следует

$$\delta_r/\delta_t\sim\tau_r/\tau_t\sim\tau_r u^2/\chi.$$

С другой стороны, согласно [2], $u^2\sim\chi/\tau_r\cdot\delta T_r/T_r$, так что для δ_r/δ_t имеем оценку $\delta_r/\delta_t\sim\delta T_r/T_r$,

где δT_r — изменение T во фронте пламени. При достаточно большой энергии активации химической реакции E имеет место оценка [2]

$$\delta T_r/T_r\sim RT_r/E\ll 1; \tag{1}$$

где R — газовая постоянная. Учитывая приближение [2]

$$\delta T_r/T_r\approx -\mathrm{L}\delta c_r/c_0, \tag{2}$$

где c_0 — начальная концентрация, имеем для $|\delta c_r/c_0|$ тоже оценку (1).

Таким образом непрерывность T и c во фронте пламени, использованная в [1], соблюдается при критерии $\mathrm{M}\sim RT_r/E\to 0$. В следующем приближении разрывы T и c пропорциональны $\mathrm{M}>0$.

Запишем оценки (1), (2) в виде соотношений

$$(T_{2,+0}-T_{1,-0})/(T_{2,+0}-T_{1,-\infty})=\mathrm{L}\cdot(c_{1,-0}-c_{2,+0})/(c_{1,-\infty}-c_{2,+0})=\alpha\mathrm{LM}, \tag{3}$$

где индексы 1, 2 относятся к свежей смеси и продуктам сгорания соответственно, вторые индексы указывают значения координаты (0 — фронт пламени), $\alpha>0$ — коэффициент. Выражение (3) представляет формулировку приближения (2), согласно [2]. В коэффициенте пропорциональности в (3) выделен множитель L, чтобы обеспечить необходимую непрерывность T при $L \to 0$. Выражения (3) заменяют граничные условия непрерывности T и c. Строго говоря, соотношения (3) верны лишь для стационарного фронта пламени, однако при достаточно малых M применимо квазистационарное описание этого тонкого разрыва.

Следующее граничное условие есть условие непрерывности полного теплового потока

$$\{j(c_pT+qc)-(\varkappa\cdot\partial T/\partial x+q\rho D\cdot\partial c/\partial x)\}=0, \tag{4}$$

где $j=\rho_1 u_1=\rho_2 u_2$ — поток массы; ρ — плотность; c_p — теплоемкость; q — тепловой эффект реакции на единицу массы; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; x — координата, нормальная к разрыву; $\{f\}\equiv f_{2,+0}-f_{1,-0}$. Условие (4) сводится к аналогичному условию [1] в случае непрерывности T и c.

Последнее граничное условие заключается в совпадении полных потоков реагирующего вещества при $x=-\infty,-0$, т. е.

$$jc_{1,-\infty}=jc_{1,-0}-\rho_1 D_1\cdot\partial c_{1,-0}/\partial x. \tag{5}$$

Граничные условия (3)—(5) варьируются на разрыве, амплитуда возмущения которого ξ', при этом в линейном приближении

$$f(\xi')=f_0^0+(\partial f_0^0/\partial x\cdot\xi'+f_0')\equiv f_0^0+\delta f_0;$$
$$\partial f/\partial x(\xi')=\partial f_0^0/\partial x+\left[(\partial^2 f_0^0/\partial x^2)\xi'+(\partial f_0'/\partial x)\right]\equiv\partial f_0^0/\partial x+\partial\delta f_0/\partial x. \tag{6}$$

Здесь и далее верхний индекс 0 относится к стационарному состоянию, штрих — к возмущениям. Стационарные решения имеют вид

$$T_1^0=T_{1,-\infty}+\Delta T_1 e^{l_1^0 x},\qquad T_2^0=T_{2,+0}=T_{2,+\infty}; \tag{7}$$
$$c_1^0=c_{1,-0}+\Delta c_1\left(1-e^{l_3^0 x}\right),\qquad c_2^0=c_{2,+0}=c_{2,+\infty},$$

где $\Delta T_1=T_{1,-0}-T_{1,-\infty}$, $\Delta c_1=c_{1,-\infty}-c_{1,-0}$; $l_1^0=u_1/\chi_1$, $l_3^0=u_1/D_1$. Как и в [1], предполагается, что ведущая химическая компонента находится в недостатке, так что $c_2=0$. Величины в (7) при совпадающих c_p связаны балансом энергии

$$qc_{1,-\infty}=c_p(T_{2,+\infty}-T_{1,\infty})=c_p\Delta T_1(1-\alpha LM)^{-1}, \tag{8}$$

где использовано условие (3).

Если считать $M=R\Delta T_1/E$, то возмущенные условия (3) с учетом (8) имеют вид

$$\delta T_{2,+0}=\delta T_{1,-0}(1-\alpha LM)^{-2},\ \delta c_{1,-0}/\Delta c_1=\alpha M/(1-\alpha M)\cdot\delta T_{1,-0}/\Delta T_1. \tag{9}$$

Возмущение j таково:

$$\delta j/j=1/2M\cdot\delta T_{1,-0}/\Delta T_1, \tag{10}$$

где M в знаменателе появился из-за сильной (аррениусовской) зависимости j от T.

Возмущенные условия (4), (5) имеют вид

$$\left\{[\delta j(c_pT+qc)+j(c_p\delta T+q\delta c)]-\left(\varkappa\frac{\partial\delta T}{\partial x}+q\rho D\frac{\partial\delta c}{\partial x}\right)\right\}_{1,-0}=$$
$$=\left[(\delta jc_pT+jc_p\delta T)-\varkappa\frac{\partial\delta T}{\partial x}\right]_{2,+0}; \tag{11}$$

$$\delta jc_{1,-\infty}=[(\delta jc+j\delta c)-\rho D\cdot\partial\delta c/\partial x]_{1,-0}. \tag{12}$$

Здесь предполагается независимость δ_j от координаты, что соответствует квазистационарному уравнению непрерывности $\partial\delta j/\partial x=0$.

Пусть поверхность разрыва меняется пропорционально exp $(iky+\Omega t)$, где y — координата вдоль разрыва, k — волновой вектор задающего возмущения $(\mathrm{Im}\,(k)=0)$, $\Omega=-i\omega$ (ω — частота). Тогда в обе стороны от разрыва будут распространяться температурные волны, пропорциональные exp $(l_{1,2}x+iky+\Omega t)$, и в свежую смесь — концентрационная волна с множителем exp $(l_3x+iky+\Omega t)$. Физический смысл имеют, очевидно, решения с $\mathrm{Re}(l_1)$, $\mathrm{Re}(l_3)>0$ и $\mathrm{Re}(l_2)<0$. Условие устойчивости имеет вид $\mathrm{Re}(\Omega)<0$.

Условия (9)—(12) после подстановки в них выражений (6) дают характеристическое уравнение $(l_2^0=u_2/\chi_2)$

$$\left(\frac{l_3}{l_3^0}-1\right)\left\{1-2\mathrm{M}\left[\beta_1\left(\frac{l_1}{l_1^0}-1\right)-\beta_2\left(\frac{l_2}{l_2^0}-1\right)\right]\right\}=\mathrm{L}\left(\frac{l_1}{l_1^0}-1\right); \quad (13)$$

$$\beta_1=[1+\alpha(\mathrm{L}-1)M]/(1-\alpha M)\geqslant 1,\ \beta_2=(1-\alpha \mathrm{L}M)^{-2}\geqslant 1,$$

которое при линеаризации по M, когда $\alpha=0$ и, следовательно, $\beta_1=\beta_2=1$, совпадает с соответствующим уравнением [1]. Таким образом, учет разрывов T и c в линейном приближении по малому параметру M не меняет области устойчивости.

Дисперсионные уравнения для волновых чисел, получающиеся из уравнений теплопроводности и диффузии после подстановки в них экспоненциальных решений, имеют вид

$$z_m+w_m=\frac{1}{2}\left(w_m^2-\lambda_m^2\right), \quad (14)$$

где $m=1,2,3$;

$$z_m=2\frac{\Omega}{u_m l_m^0};\quad w_m=2\frac{l_m}{l_m^0};\quad \lambda_m=2\frac{k}{l_m^0}, \quad (15)$$

при этом очевидно

$$z_2/z_1=\rho_2\varkappa_2/\rho_1\varkappa_1=\mu;\quad z_3/z_1=\mathrm{L};$$
$$\lambda_2/\lambda_1=\varkappa_2/\varkappa_1,\quad \lambda_3/\lambda_1=\mathrm{L}.$$

Используя (15), преобразуем (13) к виду

$$(w_3-2)\{1-\mathrm{M}[\beta_1(w_1-2)-\beta_2(w_2-2)]\}=\mathrm{L}(w_1-2). \quad (16)$$

Для суждения о виде области устойчивости рассмотрим частные аналитические решения системы (14), (16).

При $M=0$ существует неустойчивое решение вида

$$z_1=\lambda_1,\ w_1=2+\lambda_1,\ w_2=1-\sqrt{1+2\mu\lambda_1+\lambda_2^2},\quad w_3=2+\lambda_3.$$

При $\mathrm{L}=1$ и $\alpha=0$ имеются только устойчивые решения:

1) $z_1=-1/2\lambda_1^2,\quad w_1=w_3=2,\quad w_2=1-\sqrt{1-\mu\lambda_1^2+\lambda_2^2},$

имеющие смысл при $\chi_2\geqslant\chi_1$;

2) $z_1=-1/2\lambda_1^2$, $w_1=w_2=w_3=0$, верное при $\chi_1=\chi_2$. Рассматривая частные ситуации при $\mathrm{L}=\alpha=0$ типа $\lambda_m=0$ и $\mu=0$ или равные 1, можно убедиться, что при $0<\mathrm{M}<\mathrm{M}_*$ имеется неустойчивое решение, а при $\mathrm{M}_*<\mathrm{M}<\infty$ — только устойчивые. И, наконец, можно показать, что решения с $z_1=0$ не существуют при $0<\mathrm{L}<1$.

Таким образом, в полосе $0<\mathrm{L}<1$ и $\mathrm{M}>0$ имеется граница области устойчивости, выходящая из точки (1, 0) и пересекающая вертикаль $\mathrm{L}=0$ в некоторой точке $M=\mathrm{M}_*$. Эта граница соответствует условию $\mathrm{Re}(\Omega)=\mathrm{Re}(z_m)=0$ и находится следующим образом.

Пусть

$$z_m = x_m + iy_m; \quad w_m = u_m + iv_m.$$

Тогда из (14) при $x_m = 0$ имеем

$$u_1 = 1 + \nu_1; \quad u_2 = 1 - \nu_2; \quad u_3 = 1 + \nu_3;$$

$$v_1 = y_1/\nu_1, \quad v_2 = -y_2/\nu_2; \quad v_3 = y_3/\nu_3,$$

где параметры $\nu_m > 1$ находятся из уравнений

$$\nu_m^2 = 1 + \lambda_m^2 + y_m^2/\nu_m^2,$$

так что все величины параметрически выражаются, например, через y_1.

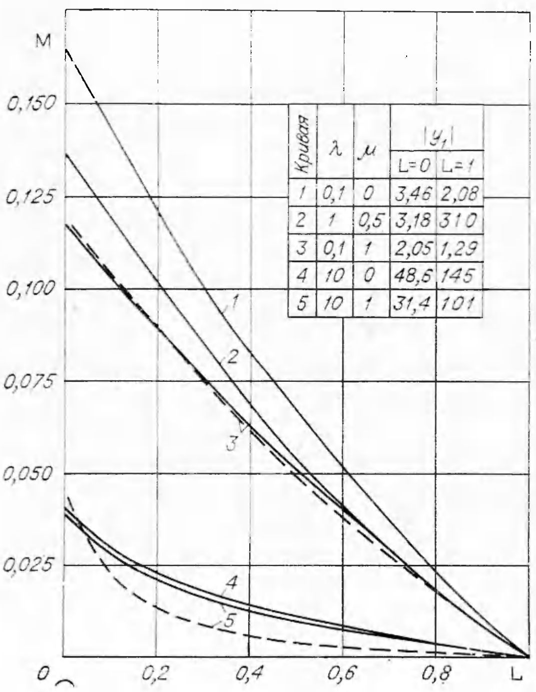
Отделяя действительную и мнимую части (16) и выражая через них M, получим

$$M = M_1 = \frac{1/\nu_2 - 1/\nu_1}{\frac{1}{\nu_3}\left[\beta_1(\nu_1 - 1) + \beta_2(\nu_2 + 1)\right] + \left(\frac{\beta_1}{\nu_1} + \mu\frac{\beta_2}{\nu_2}\right)\frac{\nu_3 - 1}{L}} = M_2 =$$

$$= \frac{(\nu_1 - 1) - (\nu_3 - 1)/L}{\frac{1}{\nu_3}\left(\frac{\beta_1}{\nu_1} + \mu\frac{\beta_2}{\nu_2}\right)y_1^2 - \left[\beta_1(\nu_1 - 1) + \beta_2(\nu_2 + 1)\right]\frac{\nu_3 - 1}{L}}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что необходимая неотрицательность M имеет место лишь для значений $L \leqslant 1$, так что область устойчивости возможна лишь для $L \leqslant 1$, в то время как приближенное рассмотрение [1] допускало устойчивость и при малом превышении L над 1. При заданных λ_m и μ функции $M_{1,2}$ зависят от $|y_1|$ и L. Решение системы (17) сводилось к нахождению областей изменения параметра $|y_1|$, в которых величины $M_{1,2}$, как функции L, имеют точки пересечения.

Результаты расчета границы устойчивости при $\alpha = 0$ и $\varkappa_1 = \varkappa_2$ для пяти комбинаций значений $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ и $0 \leqslant \mu = \rho_2/\rho_1 \leqslant 1$ представлены на рисунке. Отметим прежде всего, что граничные значения M являются достаточно малыми в широком диапазоне изменения λ и μ. Это, безусловно, необходимо для корректности теории [1] и изложенной здесь ее модификации. Если условно считать предельным максимальным значением M величину 0,1, то область устойчивости представляет собой криволинейный треугольник со сторонами $L = 1$, $M = 0{,}1$ и расчетной кривой $M = M(L, \lambda, \mu)$.



Кривая	λ	μ	$\lvert y_1 \rvert$	
			L=0	L=1
1	0,1	0	3,46	2,08
2	1	0,5	3,18	310
3	0,1	1	2,05	1,29
4	10	0	48,6	145
5	10	1	31,4	101

В таблице на рисунке помещены граничные значения $|y_1|$. Отметим, что для точки 2 величина $|y_1|$ вдоль границы меняется немонотонно: при $L \approx 0{,}3$ достигается минимум $|y_1| \approx 2{,}8$. Из рисунка следует, что имеют место неравенства

$$(\partial M/\partial L)_{\lambda,\mu};\ (\partial M/\partial\lambda)_{L,\mu};\ (\partial M/\partial\mu)_{L,\lambda}<0.$$

В частности, для больших длин волн область устойчивости меньше, чем для малых, вопреки асимптотическому результату [1], где для таких длин волн граница области устойчивости не зависела от M и определялась неравенством $L\leqslant 1$.

Поправочные коэффициенты $\beta_{1,2}$ в (17) не меняют граничных значений $M(L=0)=M_*$ и $M(L=1)=0$. Ввиду уменьшения M_1 с ростом α можно сделать вывод, что при $\alpha>0$ область устойчивости несколько расширяется для промежуточных значений $0<L<1$.

В заключение обращаем внимание на некоторую условность граничного условия (5) и его возмущенной формы (12), а вместе с ним и соответствующего граничного условия [1] и его возмущенного представления. На самом деле, следовало бы использовать выражение

$$\delta j=\rho_1\delta u_1=\rho_2\delta u_2=j\delta T_{1,-0}/(2M\Delta T_1), \tag{18}$$

где $\delta u_{1,2}=u'_{1,2}-\partial\xi'/\partial t$. К сожалению, учет движения чрезвычайно усложняет решение задачи из-за неоднородных стационарных распределений T_1, ρ_1 и u_1.

Однако в случае $\Delta T_1/T_{1,-\infty}\longrightarrow 0$, когда $\rho_1\longrightarrow\rho_2$, можно убедиться, что возмущение скорости тоже исчезает, и получается задача о диффузионно-тепловой устойчивости. Тогда из (18) следует граничное условие

$$-1/u\cdot\partial\xi'/\partial t=1/2M\cdot\delta T_{1,-0}/\Delta T_1, \tag{19}$$

заменяющее модельное условие (12). Не приводя аналогичных выкладок, дадим конечное выражение при $\alpha=1$

$$M=M_1=\frac{1/\nu_3-1/\nu_1}{2\nu_1}=M_2=\frac{\nu_1}{2u_1^2}\left[(\nu_1-1)-\frac{\nu_3-1}{L}\right], \tag{20}$$

заменяющее представления (17) при $\mu=1$. Расчеты по (20) для точек *3* и *5* показаны на рисунке штрихом. Видно, что разница между модельным решением (17) и точным (20) мала для длинноволновых возмущений и существенна для коротковолновых, причем для последних точное решение дает большую область устойчивости.

Государственный научно-исследовательский энергетический институт им. Г. М. Кржижановского, Москва

Поступила в редакцию 17/III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1962, 4, 21.
2. Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1948, 22, 1.

ВЛИЯНИЕ ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА РЕЗОНАТОРА, УСТАНОВЛЕННОГО В ТОРЦЕ ТРУБЫ, НА ПАРАМЕТРЫ ВИБРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

В. И. Кондратьев, А. Л. Сушков, А. В. Римский-Корсаков

Разработке физических основ вибрационного горения и поиску технических решений как для подавления режимов вибрационного горения, так и для их организации уделяется большое внимание. Извест-