

УДК 517.958

## ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ, ОБТЕКАЕМЫХ С ОТРЫВОМ СТРУЙ

В. Н. Монахов, Е. В. Губкина\*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Горно-Алтайский государственный университет, 649000 Горно-Алтайск

E-mail: kmath@gasu.ru

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости изучены вопросы разрешимости задач оптимального управления формой сопла при истечении из него жидкости со свободной границей с учетом и без учета силы тяжести (внутренняя аэродинамика), а также задач оптимизации формы обтекаемого препятствия с отрывом струй (внешняя аэродинамика). Исследованы качественные свойства таких течений.

Ключевые слова: конформные отображения, свободная граница, кавитация, оптимальное управление, форма тела.

В 1935 г. М. А. Лаврентьев, используя разработанные им вариационные принципы конформных отображений, доказал, что при струйном обтекании выпуклых дуг потоками идеальной жидкости дуга окружности имеет максимальную подъемную силу [1. С. 405–449]. Оптимальное управление решениями эллиптических уравнений для широкого круга функционалов цели рассмотрено в монографии [2].

Непосредственно задачам управления формой сопла или формой обтекаемого препятствия при сверхзвуковом течении жидкости посвящено большое количество работ (см. [3, 4]). Такие задачи позволяют применять аналоги принципа Понтрягина и тем самым разрабатывать алгоритмы их численного решения.

### 1. СТРУЙНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОПТИМАЛЬНОГО СОПЛА

**1.1. Постановка задачи.** Пусть из полигонального сопла  $P_0 = (z_0, \dots, z_{n-1})$  с вершинами  $z_k = x_k + iy_k$  и углами  $\alpha_k\pi$  при них вытекает несжимаемая жидкость на бесконечный прямолинейный водоупор  $P_1 = (z_n, z_{n+1})$  ( $y_{n+1} = 0$ ,  $x_n = -\infty$ ,  $x_{n+1} = \infty$ ). При этом отрезок  $P_2 = (z_{n-1}, z_n)$  является горизонтальной прямой ( $y_{n-1} = y_n = H$ ) (см. рисунок). В области  $D$ , ограниченной полигоном  $P = (z_0, \dots, z_{n+1}) = P_0 \cup P_1 \cup P_2$  и неизвестной кривой (струей)  $L = (z_{n+1}, z_0)$ ,  $\partial D = P \cup L$ , ищется комплексный потенциал течения  $w(z) = \varphi + i\psi$  (аналитическая функция переменной  $z = x + iy$ ), удовлетворяющий граничным условиям

$$\psi = 0, \quad z \in P_1, \quad \psi = Q, \quad z \in P_0 \cup L, \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = 1, \quad z \in L, \quad (1)$$

где  $Q = \text{const} > 0$  — искомый расход жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00131), гранта Президента РФ по государственной поддержке молодых российских ученых (грант № МК-5083.2006.01), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-7525.2006.1).

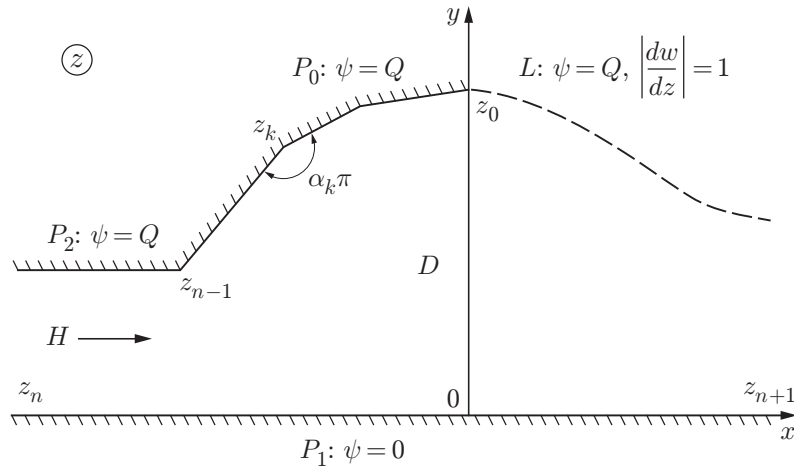


Схема струйного истечения жидкости из сопла

Производные конформных отображений  $w: K \rightarrow D^*$  и  $z: K \rightarrow D$  единичного полукруга  $K = \{\zeta: |\zeta| < 1, \text{Im } \zeta > 0\}$  на полосу  $D^* = \{w: 0 < \text{Im } w < Q\}$  и на область  $D$  соответственно представляются в виде [5. С. 178]

$$\frac{dw}{d\zeta} = N_0(1 - \zeta^2) \prod_{k=n}^{n+1} [(\zeta - t_k)(1 - \zeta t_k)]^{-1} \equiv N_0\omega(\zeta),$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = N_0\omega(\zeta) \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\zeta - t_k}{1 - \zeta t_k} \right)^{\beta_k}.$$
(2)

Здесь  $t_k$  ( $t_0 = -1 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ ) — прообразы вершин  $z_k$  полигона  $P$  при конформном отображении  $z = z(\zeta)$ ;  $\beta_k\pi = (\alpha_k - 1)\pi$  — внешние углы при  $z_k$ ;  $N_0(Q) = \text{const} > 0$ .

**1.2. Уравнения относительно параметров.** Зафиксируем точки  $z_0 = ih_0$ ,  $z_{n-1} = x_{n-1} + iH$  ( $h_0, H, x_{n-1}$  ( $-\infty < x_{n-1} < 0$ ) — известные константы).

Для полигонов  $P_0 = (z_0, \dots, z_{n-1})$  введем *геометрическую характеристику*  $p_0 = (l, \beta)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$ ,  $l_k = |z_k - z_{k-1}|$  и подчиним ее условиям *простого полигона*  $(p_0, P_0) \in G(\delta)$ :

$$G: \quad \delta - 1 \leq \beta_k \leq 1, \quad |\ln l_k| \leq \delta^{-1}, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (0 < \delta \ll 1).$$
(3)

Параметры  $N_0$  и  $t_n$  в (2) задаются, а постоянные  $t_k$ , соответствующие конечным вершинам  $z_k \in P_0$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , находятся как решения нелинейной системы уравнений [5. С. 162]:

$$l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \equiv g_k(T, \beta), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Здесь  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$ ;  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ ;  $\beta_k\pi = (\alpha_k - 1)\pi$  — внешние углы при  $z_k \in P_0$ .

Разрешимость системы уравнений относительно  $T$  установлена в [5] методом непрерывности, при этом доказано включение  $T \subset R$ :

$$R: \quad t_{k+1} - t_k > \varepsilon(\delta) > 0, \quad k = \overline{0, n}.$$
(4)

Систему уравнений для  $t_k$  запишем в виде одного функционального уравнения

$$l = g(T, \beta), \quad (l, \beta) \in G, \quad g = (g_1, \dots, g_{n-1}). \quad (5)$$

При выполнении дополнительного условия

$$0 < \delta \leq |\theta(t) - \beta| \leq \pi - \delta, \quad \theta = \arg \frac{dz}{dt}, \quad |t| \leq 1 \quad (6)$$

на вращение касательной к полигону  $P_0$  ( $\beta$  — некоторый угол) для схем Кирхгофа [5. С. 153–156] и Рябушинского [6] доказана также локальная единственность решений  $T$  уравнения (5):

$$\left| \frac{Dg}{DT} \right| \geq \varepsilon_0(\delta) > 0. \quad (7)$$

Здесь  $Dg/DT = \{\partial g_i / \partial t_j\}$  — матрица Якоби. При этом установлено, что если среди полигонов  $P_0$  найдется полигон  $P_0^0$ , для которого решение уравнения (5) единственно, то оно будет единственным и для любого конечного полигона  $P_0 \in G$ . В данном случае в качестве  $P_0^0$  можно взять прямолинейное сопло  $P_0^0 = \{y = y_0, -\infty < x < x_0\}$ , для которого уравнение (5) выполняется автоматически при любом разбиении  $P_0^0$  точками  $z_k = x_k + iy_0$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $|z_{k+1} - z_k| \neq 0, \infty$ . В п. 3 устанавливается справедливость оценки (7) для общей схемы кавитации, включающей рассматриваемую задачу.

**1.3. Проблема оптимизации.** Определим геометрическую характеристику  $p_0$  искомого полигона  $P_0$  из некоторого условия оптимальности. В задачах внутренней аэродинамики в качестве функционала цели, как правило, выступает величина тяги на выходе из оптимизируемого сопла.

Проведем через точки  $t_0 = -1$  и  $t_* = (1 - \varepsilon/2) \in (t_n, t_{n+1})$  полукруг  $K_0 = \{\zeta: |\zeta + \varepsilon/4| < r_0 = 1 - \varepsilon/4, \operatorname{Im} \zeta > 0\}$  и обозначим через  $\Gamma_0 = \{r_0 e^{i\gamma}: 0 < \gamma < \pi\}$  прообраз кривой, соединяющей точки  $z_0 \in P_0$  и  $z_* = z(t_*) \in P_1$ . Функционал тяги выбирается в форме

$$F = \int_0^\pi \left| \frac{dw}{dz}(\zeta) \right|^2 d\gamma = C \int_0^\pi \prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1 - \zeta t_k}{\zeta - t_k} \right|^{2\beta_k} d\gamma \quad (\zeta = r_0 e^{i\gamma}). \quad (8)$$

Функционал  $F(P_0)$  обладает ограниченными производными любого конечного порядка по аргументам  $(\beta_k, t_j)$ , входящим явно, поскольку подынтегральная функция в (8) не имеет особенностей (точки  $t_0$  и  $t_{n+1}$  не входят в произведение). Согласно [5] решения  $t_j = t_j(l, \beta)$  также являются дифференцируемыми по  $(l_i, \beta_k)$ . Следовательно, у функционала  $F(P_0)$  существует экстремальная точка  $P_0^*$  [7. С. 106]:

$$\sup_G F(P_0) = F(P_0^*). \quad (9)$$

Оптимизацию случая криволинейного сопла начнем с увеличения количества вершин полигона  $P_0$ , введя обозначение  $P_0^m = (z^0, \dots, z^m)$  ( $z^0 = z_0, z^m = z_{n-1}$ ).

Сопло  $\Lambda \subset C^1$  будем искать в классе кусочно-гладких кривых ограниченной длины:

$$C^1: \quad \left| \ln \frac{dz}{d\tau} \right| \leq M, \quad |z(\tau)| \leq M, \quad \tau \in [0, 1].$$

Здесь  $z = z(\tau)$  — параметрическое уравнение  $\Lambda$ . Каждой заданной кривой  $\Lambda$  поставим в соответствие семейство сходящихся к ней полигонов  $P^m \rightarrow \Lambda$ . Тогда, как показано в [5. С. 168–170], соответствующее  $P_0^m$  семейство конформных отображений  $Z^m: K \rightarrow D$  равномерно ограничено в области  $K_\delta \equiv K \setminus Q_\delta(t_n, t_{n+1})$  ( $Q_\delta$  — фиксированная  $\delta$ -окрестность ( $0 < \delta \ll 1$ ) заданных точек  $t_n$  и  $t_{n+1} = 1$ ). Это обстоятельство позволяет выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{Z^{m_k}(\zeta)\}$ ,  $Z^{m_k}(\zeta) \rightarrow Z(\zeta)$  при  $m_k \rightarrow \infty$ , причем предельное

отображение  $Z: K_\delta \rightarrow D_\delta$  переводит отрезок  $[-1, t_{n-1}]$  в кривую  $\Lambda$ . Поведение отображения  $z = Z(\zeta)$  в окрестности  $Q_\delta$  также описано в [5].

Свойства функционала тяги  $F(P_0^{m_k})$  позволяют выполнить предельный переход при  $m_k \rightarrow \infty$  и тем самым найти предельное оптимальное криволинейное сопло  $\Lambda^* \subset C^1$ :

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \sup_G F(P_0^{m_k}) = F(\Lambda^*). \quad (10)$$

**Теорема 1.** *На множестве простых конечных полигонов  $P_0 \in G$  существует экстремальная точка  $P_0^*$  функционала  $F(P_0)$ , т. е. удовлетворяется равенство (9). Если выполняется условие (6), то каждая экстремальная точка функционала  $F(P_0)$  изолирована.*

В классе кривых  $\Lambda \subset C^1$ ,  $\Lambda = \lim_{m_k \rightarrow \infty} P_0^{m_k}$ ,  $P_0^{m_k} \in G$  ограниченной длины  $|\Lambda| \leq M$ ,  $M \geq |z_{n-1} - z_0|$  существует оптимальное криволинейное сопло  $\Lambda^*$ , для которого справедливо соотношение (10).

Как отмечено ранее, при выполнении условия (6) решение  $T(P_0)$ ,  $\forall P_0 \in G$  уравнения (5) единственно, следовательно, оно единственно и для экстремальной точки  $P_0^*$  функционала  $F(P_0)$ , откуда и вытекает ее изолированность.

## 2. УЧЕТ ГРАВИТАЦИИ

В рассмотренной выше задаче условие  $q \equiv |dw/dz| = 1$  на свободной границе  $L$  заменим на уравнение Бернулли

$$q^2 + 2gy = q_\infty^2 + 2gh, \quad (11)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $q_\infty$ ,  $h$  — скорость и глубина потока на бесконечности вниз по течению соответственно. Впервые эта задача изучена В. Н. Монаховым (1969) без привлечения каких-либо условий малости на параметры потока [5. С. 178–184]. Метод, примененный для ее решения, состоял в одновременной аппроксимации криволинейных границ полигонами с такой линеаризацией граничного условия (11), при которой оно удовлетворялось в конечном числе точек на  $L$ . После доказательства разрешимости полученных при этом вспомогательных задач предельным переходом устанавливалась разрешимость и исходной задачи.

Изложим кратко схему решения задачи о течениях тяжелой жидкости.

**2.1. Вспомогательная задача.** Пусть заданы параметры  $a_0 = q_0 q_\infty^{-1}$ ,  $q_0 = |dw/dz|_{z=z_0}$  и  $\mu = h/h_0$ ,  $h_0 = \text{Im } z_0$ . Величины  $q_0$ ,  $q_\infty$ ,  $h$ ,  $h_0$ ,  $Q$  разыскиваются вместе с комплексным потенциалом течения  $w = w(z)$ . Константы  $a_0$  и  $\mu$  подчиняются естественным ограничениям для любого значения  $\delta \ll 1$ :

$$0 < \delta \leq \mu = h h_0^{-1} \leq 1 - \delta, \quad e^{-2\pi} - \delta \leq a_0 = q_0 q_\infty^{-1} \leq 1 - \delta. \quad (12)$$

Представление для  $dw/d\zeta$  из п. 1 сохраняется, а представление (2) заменяется на следующее:

$$\frac{dz}{d\zeta} = N_0 \omega(\zeta) \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\zeta - t_k}{1 - \zeta t_k} \right)^{\beta_k} e^{M(\zeta)}. \quad (13)$$

Здесь

$$M = \frac{\zeta^2 - 1}{\pi} \int_0^\pi \ln [q_\infty^{-1} q(\gamma)] \frac{d\gamma}{1 - 2\zeta \cos \gamma + \zeta^2},$$

$$[q_\infty^{-1}q(\gamma)]^2 = 1 + 2gq_\infty^{-2}[h - y(\gamma)],$$

$y = y(\gamma)$  — искомая функция [5. С. 180].

Искомый промежуток  $[h, h_0]$  разобьем точками

$$y^k = h_0 - k \frac{h_0 - h}{m + 1}, \quad k = \overline{0, m + 1} \quad (14)$$

и положим  $z^k = (x^k + iy^k) \in L$ . Пусть  $\zeta_k = e^{i\gamma_k}$  — прообразы  $z^k$  и  $q_k = q(\gamma_k)$ ,  $q_{m+1} = q_\infty$ . Из равенств (11), (14) находим

$$q_{k+1}^2 - q_k^2 = 2gh \frac{1 - \mu}{\mu(m + 1)}, \quad k = \overline{0, m}. \quad (15)$$

Введем функции

$$\tilde{q}_k(\gamma) = \exp \left( p_\infty^{k+1} + \frac{\cos \gamma - \cos \gamma_{k+1}}{\cos \gamma_k - \cos \gamma_{k+1}} p_{k+1}^k \right), \quad \gamma \in [\gamma_{k+1}, \gamma_k] \quad (16)$$

и подставим в (13) вместо  $q(\gamma)$  величину  $\tilde{q}(\gamma) = \tilde{q}_k(\gamma)$ ,  $\gamma \in [\gamma_{k+1}, \gamma_k]$ . Тогда по построению уравнение Бернулли (11) удовлетворяется в конечном числе точек  $z^k \in L$ ,  $k = \overline{0, m + 1}$ . Для нахождения неизвестных  $\gamma_k$  получается система уравнений

$$\frac{y^k - y^{k-1}}{h} = \frac{(1 - t_n)^2}{\pi} \int_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k} \frac{(1 + \zeta) \sin \theta(\gamma) d\gamma}{|1 - \zeta| |\zeta - t_n|^2 \tilde{q}_k(\gamma)}, \quad k = \overline{0, m - 1}, \quad (17)$$

где  $\theta(\gamma) = \arg(d\tilde{z}/d\gamma)$ ;  $d\tilde{z}/d\gamma$  определяется формулой (13), в которую вместо  $q(\gamma)$  подставлено  $\tilde{q}(\gamma)$ .

**2.2. Априорные оценки.** Как и в п. 1, постоянные  $N_0$  и  $t_n$  фиксируются, а для определения искомых параметров  $t_k$  ( $k = \overline{1, n - 1}$ ) и  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) во вспомогательной задаче получаем систему уравнений (5), (11) с общим числом уравнений  $m + n + 1$  (в уравнениях (5)  $dz/dt$  заменяется на  $d\tilde{z}/dt$ ). При этом для вектора  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$  сохраняются оценки (4). Докажем аналогичное включение для вектора  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in R_\gamma$ :

$$R_\gamma: \quad \gamma_i - \gamma_{i+1} > \varepsilon_0 > 0, \quad i = \overline{0, m}.$$

В силу ограниченности  $|z_0|$  и величины  $y^k = \text{Im } z^k$  сходимость  $|z_0 - z^k| \rightarrow 0$  возможна лишь при  $\text{Re } z^k = x^k \rightarrow \infty$ . Тогда глубина потока на бесконечности вниз по течению равна  $h^* = y_0 - y^k \neq h$ , что противоречит исходному предположению. Пусть начиная с некоторого  $\gamma_p$  ( $1 \leq p \leq m$ )  $\gamma_k \rightarrow 0$ ,  $k \geq p$ . Тогда

$$|z^p - z^{p-1}| = \frac{(1 - t_n)^2}{\pi} \left| \int_{\gamma_p}^{\gamma_{p-1}} \frac{|1 + \zeta| e^{i\theta(\gamma)} d\gamma}{|1 - \zeta| |\zeta - t_n|^2 \tilde{q}_{p-1}(\gamma)} \right| \equiv \left| \int_{\gamma_p}^{\gamma_{p-1}} \frac{f(\gamma) d\gamma}{\sin \gamma/2} \right|,$$

и, поскольку  $|f(\gamma)| > 0$  в окрестности  $\gamma = 0$ , при  $\gamma_p \rightarrow 0$  интеграл в последнем равенстве расходится, т. е.  $|z^p - z^{p-1}| \rightarrow \infty$  при  $\gamma_p \rightarrow 0$ .

Итак, доказано, что  $|\gamma_k| > \varepsilon_0 > 0$  ( $k = \overline{0, m}$ ). В то же время если  $\gamma_k - \gamma_{k+1} \rightarrow 0$ , то из системы (17) находим

$$\frac{1 - \mu}{\mu(m + 1)} = \frac{(1 - t_n)^2}{\pi} \int_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k} \frac{|1 + \zeta| \sin \theta(\gamma) d\gamma}{|1 - \zeta| |\zeta - t_n|^2 \tilde{q}_k(\gamma)} \leq \frac{\gamma_k - \gamma_{k+1}}{a_0 \sin(\gamma_{k+1}/2)} \rightarrow 0,$$

что противоречит условию  $\mu < 1$ . Следовательно, существует  $\varepsilon > 0$ , такое что  $\gamma_k - \gamma_{k+1} > \varepsilon > 0$  ( $k = \overline{0, m}$ ). Последнее обстоятельство обеспечивает выполнение оценок

$$c_0^{-1} \leq |e^{M(\zeta)}| \leq c_0 \quad \text{при} \quad \zeta \in D_\zeta = \{|\zeta| \leq 1, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}.$$

**2.3. Разрешимость задачи.** Рассмотрим простейшую задачу об истечении жидкости из прямолинейного сопла  $P^0 = (z_0, z_n)$ , требуя выполнения уравнения Бернулли только в точке  $z_0$  истечения струи и в точке  $z_{n+1}$  на бесконечности вниз по течению.

Разрешимость соответствующей  $P^0$  системы уравнений (5), (17) легко устанавливается [5. С. 183].

Введем в уравнение системы (5) параметр  $\lambda$  таким образом, чтобы при изменении  $\lambda$  от единицы до нуля полигон  $P = (z_0, \dots, z_n)$  переходил в  $P^0$ . Параметр  $\lambda$  включим также в граничное условие, полагая

$$q^\lambda(\gamma) = \lambda \tilde{q}(\gamma) + (1 - \lambda)q^0(\gamma).$$

Здесь  $\tilde{q}(\gamma)$  соответствует задаче для  $P$ , а  $q^0(\gamma) = \exp \{[(1 - \cos \gamma)/2] \ln (q_0/q_\infty)\}$  — задаче для  $P^0$ . В силу равномерных относительно  $\lambda$  оценок  $dz^\lambda/d\zeta$ , соответствующих полигонам  $P^\lambda$ , с помощью теоремы Лере — Шаудера о неподвижной точке устанавливается разрешимость соответствующих систем уравнений (5), (17) при любых  $\lambda \in [0, 1]$ .

Теперь для произвольного простого полигонального сопла  $P_0 = (z_0, \dots, z_{n-1})$  может быть сделан предельный переход при  $m \rightarrow \infty$ , за счет чего уравнение Бернулли (11) выполняется на всей свободной границе  $L$  [5. С. 184].

**2.4. Оптимальное полигональное сопло.** Будем искать  $P_0 = (z_0, \dots, z_{n-1})$  из условия максимума функционала тяги  $F(P_0)$ , заданного формулой (8), в которой под интегралом необходимо добавить сомножитель  $e^{-2 \operatorname{Re} M(\zeta)}$ . Эти изменения в форме функционала тяги  $F(P_0)$  не влияют на его дифференциальные свойства, что (как и в п. 1) позволяет найти экстремальную точку  $P_0^*$ , удовлетворяющую равенству (9). Предельным переходом от полигонов к кривой  $\Lambda \subset C^1$  ( $P_0^{m_k} \rightarrow \Lambda$ ) находим криволинейное оптимальное сопло  $\Lambda^*$ , подчиняющееся соотношению (10).

**Теорема 2.** *В задаче истечения тяжелой жидкости из полигонального сопла  $P_0 \in G(\delta)$  существует экстремальная точка  $P_0^*$  функционала тяги  $F(P_0)$ , удовлетворяющая соотношению (9). Предельным переходом от полигонов к криволинейным границам отыскивается также оптимальное криволинейное сопло  $\Lambda^* \subset C^1$ , для которого справедливо равенство (10).*

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КАВИТАЦИЕЙ

Для снижения сопротивления плохообтекаемых тел в прикладной гидродинамике применяются методы искусственной кавитации. Создаются кавитаторы, так чтобы тело находилось внутри образующейся за кавитатором каверны, часто внутрь каверны вдувается воздух, специальными устройствами организуется поток внутри каверны, выравнивающий давление, и т. д. При этом реализуются различные известные схемы кавитации: Кирхгофа, Рябушинского, Эфроса, Эфроса — Жуковского, Жуковского — Рашко и т. д. [5. С. 174–178].

Важными прикладными задачами являются задачи оптимального управления кавитацией (размерами каверны или ее сопротивлением) за счет вариации формы кавитаторов и перераспределения давления внутри каверны.

**3.1. Струйная задача.** Рассмотрим общую задачу гидродинамики со свободной границей, поставленную и изученную в [5. гл. 4, § 2], которая включает все основные схемы кавитации. Пусть область  $D$  ограничена свободной поверхностью  $L$ , на которой  $|dw/dz| = 1$ ,

и простым полигоном  $P = (z_0, \dots, z_{n+1})$ . При этом в  $\bar{D}$  могут находиться точки  $A_i$  и  $C_m$  остановки и разветвления потока ( $(dw/dz)(A_i) = (dw/dz)(C_m) = 0$ ) и точки  $B_j$ , в которых располагаются вихри и источники ( $(dw/dz)(B_j) = \infty$ ). Тогда производные конформных отображений верхней полуплоскости  $E = \{\zeta: \text{Im } \zeta > 0\}$  на области  $D$  и  $D^*$  представляются в виде [5, 8]

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= N_0 \omega(\zeta), & \omega &= \prod_{i,j} \frac{\zeta^2 - |a_i|^2}{\zeta^2 - |b_j|^2} \prod_{m,s} \frac{\zeta - c_m}{\zeta - \sigma_s}, \\ \frac{dz}{d\zeta} &= N_0 \omega(\zeta) \chi^\nu(\zeta) \Pi(\zeta) e^{M(\zeta)}, & \Pi &= \prod_k \chi_k^{\beta_k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $a_i, b_j, c_m$  — заданные прообразы  $A_i, B_j, C_m$  соответственно;  $\sigma_s$  — фиксированные прообразы бесконечных вершин  $w(\sigma_s) \in \partial D^*$ ;

$$\chi_k = [(1 - \zeta^2)^{1/2} (1 - t_k^2)^{1/2} + 1 - \zeta t_k] (\zeta - t_k)^{-1}, \quad \chi = (1 - \zeta^2)^{1/2} + 1,$$

$$M = -\frac{(1 - \zeta^2)^{1/2}}{\pi i} \int_{|t|>1} \frac{\ln |\Pi(t) \chi^\nu(t)| dt}{(1 - t^2)^{1/2} (t - \zeta)},$$

$t_k \in (-1, 1)$  — искомые прообразы конечных вершин  $P$  ( $t_0 = -1, t_{n+1} = 1$ );  $\nu$  — целое число. Параметры  $N_0$  и  $t_n$  задаются, а вектор  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$  определяется из уравнения (5), для решения которого справедливы оценки (4) [5].

По построению функция  $dz/d\zeta$  в форме (18) удовлетворяет краевой задаче

$$\arg \frac{dz}{dt} = \pi \bar{\theta}(t), \quad |t| < 1, \quad \left| \frac{dz}{dt} \right| = |N_0 \omega(t)|, \quad |t| > 1, \quad (19)$$

где  $\bar{\theta}(t) = \bar{\delta}_k, t \in [t_k, t_{k+1}]$ ;  $\bar{\delta}_k \pi$  — угол наклона  $k$ -й стороны полигона  $P$  к оси  $Ox$ .

**3.2. Локальная единственность решений.** Согласно методу непрерывности для доказательства единственности решения  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$  уравнения (5) в общей струйной задаче (см. подп. 3.1) достаточно установить отличие от нуля ее якобиана  $Dl/DT$ , поскольку в простейшем случае, когда полигоном  $P$  является отрезок прямой, единственность решения известна [5].

Поставим в соответствие общей струйной задаче вспомогательное течение по схеме Кирхгофа, полагая

$$\frac{dW}{d\zeta} = N_1 \zeta \left( \equiv Q_0(\zeta) \frac{dw}{d\zeta} \right), \quad \frac{dZ}{d\zeta} = N_2 \chi(\zeta) \Pi(\zeta) \left( \equiv Q(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} \right). \quad (20)$$

Здесь  $W: E \rightarrow \Omega^*$  и  $Z: E \rightarrow \Omega$  — конформные отображения, соответствующие задаче Кирхгофа (20) в некоторых областях  $\Omega$  и  $\Omega^*$ ; производные  $dw/d\zeta$  и  $dz/d\zeta$  представляются формулами (18) для исходных областей  $D^*$  и  $D$ . Соотношения (20) при заданных функциях  $Q_0(\zeta)$  и  $Q(\zeta)$  определяют конформные отображения  $W = W(w), Z = Z(z)$  и области  $\Omega^* = W(D^*), \Omega = Z(D)$ .

Функция  $Q(\zeta)$  находится из сопоставления (20) и (19):

$$Q^{-1} = N_2 (N_0) \omega(\zeta) \chi^{\nu-1}(\zeta) e^{M(\zeta)}, \quad N_2 = \text{const} > 0. \quad (21)$$

Отметим, что  $\omega(\zeta)$  и  $\chi(\zeta)$  не зависят от  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$ , а  $M(\zeta)$  является функцией только фиксированной постоянной  $N_0$ .

Для полигонов  $P \subset G$  функция  $Q(\zeta)$  в (21) обладает свойствами

$$\arg Q(t) = 0, \quad |t| < 1, \quad |\ln N_2 Q(t)| \leq M < \infty, \quad |t| < \infty.$$

Таким образом,  $\arg(d(Z - z)/dt) = 0$ ,  $|t| < 1$ , и, следовательно, при конформном отображении  $Z = Z(z)$  полигону  $P$  соответствует полигон  $Z(P)$  с параллельными сторонами и длинами сторон:

$$L_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} |Q(t)| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt, \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (22)$$

Зафиксируем вектор  $T \subset R$ , а тем самым и полигоны  $P$  и  $Z(P)$ . Начальная точка  $Z(-1) = 0$  полигона  $P(Z)$  задана, а в конечной точке положим  $Z(1) = 1$ , чего можно добиться растяжением отображения  $Z(\zeta)$ . Вычислим вариацию  $\delta L_j(T)$  через вариацию  $\delta T$ . Для системы уравнений (22), соответствующей течению Кирхгофа, при выполнении условия (6) из равенств  $\delta Z(\pm 1) = 0$  следует, что  $\delta Z = 0$ , а следовательно,  $\delta T = 0$  [5. С. 153–158]. Вернемся к системе уравнений (5), для которой  $\delta l_k = 0$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  и, как показано,  $\delta T = 0$ , что означает  $(Dl/DT)(T) \neq 0$ . Таким образом, установлен принцип топологического подобия задач о параметрах для общего струйного течения и течения по схеме Кирхгофа.

**Теорема 3.** Решения  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$  уравнения (5), соответствующего общей струйной задаче для простого полигона  $P \subset G$ , при выполнении условий (6) локально единственны, т. е.  $Dl/DT \neq 0$ . Если существует полигон  $P^0 \subset G$ , для которого решение уравнения (5) единственно, то оно единственно и для любого  $P \subset G$ .

**3.3. Сходящийся алгоритм численного решения задачи о параметрах.** Возьмем отрезок прямой  $P^0$ , соединяющий концы  $z_0$  и  $z_{n+1}$  полигона  $P$ , зафиксируем на нем точки  $z_k^0$ ,  $k = \overline{1, n}$  и построим семейство полигонов  $\{P^\nu\}$ ,  $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_{n+1})$ ,  $\nu_k \in [0, 1]$ , включающее  $P^0$  и исходный полигон  $P = P^1$  [6]. Введем геометрическую характеристику  $p^\nu = (l^\nu, \alpha^\nu)$  полигона  $P^\nu$  ( $l^\nu = (l_1^{\nu_1}, \dots, l_{n-1}^{\nu_{n-1}})$  — вектор длин сторон  $P^\nu$ ;  $\alpha = (\alpha_0^{\nu_0}, \dots, \alpha_{n-1}^{\nu_{n-1}})$ ;  $\alpha_k^{\nu_k} \pi$  — углы  $P^\nu$  в точках  $z_k^{\nu_k}$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ ). Уравнение (5) представим в следующей эквивалентной форме:

$$u = F(u, p), \quad F_k = u_k l_k^{-1} g_k(T, \alpha), \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (23)$$

Здесь  $u_k = t_{k-1} - t_{k-2}$ ,  $k = \overline{2, n}$ ;  $p = (l, \alpha)$ . Рассмотрим два полигона  $(P^\lambda, P^\mu) \in \{P^\nu\}$  с близкими характеристиками

$$0 < |p^\lambda - p^\mu| \leq q \ll 1$$

и составим уравнение для возмущений  $v = u^\lambda - u^\mu$  [8]:

$$v = \Phi(u, q). \quad (24)$$

В работе [6] для схем Кирхгофа и Рябушинского показано, что при выполнении условия  $|Dl/DT| \geq \delta > 0$  найдется фиксированное значение параметра  $q = q_0(\delta) > 0$ , такое что оператор возмущений  $\Phi(u, q_0)$  будет сжимающим на некотором множестве  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Этот факт позволяет разбить процесс нахождения решений  $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$  уравнения (23) на конечное число циклов, в каждом из которых уравнение (24) для возмущений может быть решено методом простой итерации.

Такой сходящийся алгоритм решения уравнения (23) называется *методом (алгоритмом) циклической итерации*. Согласно доказанному в теореме 3 неравенству  $Dl/DT \neq 0$  метод циклической итерации применим и в общей струйной задаче.

**Теорема 4.** Уравнение (23) для параметров, соответствующее общей струйной задаче, может быть решено с помощью сходящегося алгоритма циклической итерации.



**3.4. Оптимизация.** В рассматриваемых задачах внешней аэродинамики в качестве функционала цели берется сопротивление обтекаемого полигона  $P \in G(\delta)$ :

$$F_0(P) = \int_{-1}^1 \left| \frac{dw}{dz}(t) \right| dt = N_0 \int_{-1}^1 |\chi^\nu \Pi e^M|^{-1} dt.$$

Положим  $F(P) = [F_0(P)]^{-1}$  и будем искать  $\sup_G F(P)$ . Функционал  $F(P)$  является непрерывно дифференцируемым по входящим явно параметрам  $t_k, \beta_j$  и полностью удовлетворяет условиям теоремы 1.

#### 4. ОПТИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

Рассмотрим изученную в п. 3 задачу для криволинейных препятствий, не представляя их в виде сходящихся последовательностей полигонов. Для этого используем метод, примененный в работе [9] к задачам фильтрации.

**4.1. Криволинейная граница.** Построим некоторую ляпуновскую кривую  $\Gamma(\mu) \subset C^{\alpha+1}$ ,  $\alpha > 0$ , аппроксимирующую полигон  $P$ , так чтобы для производной  $dz/d\zeta$  конформного отображения  $z: E \rightarrow D(\Gamma)$ ,  $\partial D(\Gamma) = \Gamma \cup L$  имело место явное представление вида (2), где  $\mu > 0$  — параметр аппроксимации. Введем следующие обозначения:  $t_k^\pm = t_k \pm r_k$ ,  $r_k(\mu) = \mu \inf \{(t_k - t_{k-1}), (t_{k+1} - t_k)\}$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ ,  $0 < \mu \leq 1/3$ ,  $t_0^\pm = t_0 = -1$ ,  $t_{n+1}^- = t_{n+1} = 1$ ,  $\Delta_k = [t_k^-, t_k^+]$ ,  $\Delta_k^+ = [t_k^+, t_{k+1}^-]$ . Рассмотрим функцию  $\theta(t) = \bar{\theta}(t) - 1$ , удовлетворяющую условиям  $\theta(t) = \delta_k \pi$ ,  $t \in \Delta_k^+$ ;  $\theta = 0$ ,  $|t| > 1$ :

$$\theta = [\delta_k(t - t_k^-) + \delta_{k-1}(t_k^+ - t)] |\Delta_k|^{-1} \equiv \theta_k(t), \quad t \in \Delta_k.$$

Здесь  $\delta_k = \bar{\delta}_k - 1$ . Построенная функция  $\theta(t, \mu)$ ,  $|t| < 1$  непрерывна и равномерно ограничена независимо от величин  $(t_{k+1} - t_k) \geq 0$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $|\theta| \leq \sup_k |\delta_k|$ .

Рассмотрим функцию

$$\Pi_\theta(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{-1/2} \exp \left( \int_{-1}^1 \frac{\theta(t, \mu) dt}{t - \zeta} \right),$$

которая представляет собой производную конформного отображения

$$Z = \int_{-1}^{\zeta} \Pi_\theta(\zeta) d\zeta, \quad Z: E \rightarrow D(\bar{\Gamma}), \quad \bar{\Gamma}(\mu) = \Gamma \cup P_0 \cup P_{n+1}.$$

При этом область  $D(\Gamma)$  ограничена некоторой аппроксимирующей кривой  $\Gamma(\mu)$  с углом  $\pi\theta(t)$  наклона касательной к оси  $Ox$  и прямолинейными лучами  $P_0 = (z_0, \infty)$ ,  $P_{n+1} = (z_{n+1}, \infty)$ . Вычислив интеграл типа Коши в представлении  $\Pi_\theta$ , получим следующее выражение для функции  $\Pi_\theta(\zeta)$  с точностью до постоянной растяжения:

$$\Pi_\theta = (1 - \zeta^2)^{-1/2} \prod_{k=0}^n \left( \frac{t_k^+ - \zeta}{t_k^- - \zeta} \right)^{\gamma_k(\zeta)} \left( \frac{t_{k+1}^- - \zeta}{t_k^+ - \zeta} \right)^{\delta_k}.$$

Здесь  $\gamma_k = (a_k + b_k \zeta) |\Delta_k|^{-1}$ ,  $a_k = t_k^+ \delta_{k-1} - \delta_k t_k^-$ ,  $b_k = \delta_k - \delta_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $\gamma_0 = 0$ ;  $t_0^\pm = t_0 = -1$ ;  $t_{n+1}^- = t_{n+1} = 1$ ;  $|\Delta_k| = (t_k^+ - t_k^-)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

По построению  $\theta(t, \mu) \rightarrow \delta_k$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  при  $\mu \rightarrow 0$  и, следовательно, кривая  $\Gamma(\mu)$  сходится к заданному полигону  $P$ , а производная  $(dz_\theta/d\zeta)(\mu)$  конформного отображения  $z_\theta: E \rightarrow D(\Gamma)$  представляется в форме (18), вместо  $\Pi$  и  $M$  нужно подставить  $\Pi_\theta$  и  $M_\theta$ .

Аналогично задаче для полигона рассмотрим уравнение (5) для определения вектора  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$ , в котором

$$g_k(T, \beta) = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dz_\theta}{dt} dt \right| = |z_k - z_{k-1}|, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (25)$$

В определение кривой  $\Gamma(\mu)$  входит заданная геометрическая характеристика  $(l, \beta)$  ( $l = (l_1, \dots, l_n)$  и  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{n+1})$ ) базового полигона  $P$ , с которым  $\Gamma(\mu)$  совпадает при  $\mu = 0$ . Предполагается, что вектор  $(l, \beta)$  удовлетворяет условиям (3) невырожденности полигона  $P$ .

Конформное отображение  $z_\theta: E \rightarrow D(\Gamma)$  переводит  $t_k, k = \overline{0, n+1}$  в точки  $z_{\theta k}(\mu) \in \Gamma(\mu)$  — вершины некоторого аппроксимируемого кривой  $\Gamma(\mu)$  полигона  $P_\theta(\mu)$ , причем длины сторон  $P_\theta(\mu)$  и  $P$  совпадают, а внешние углы  $\pi\beta_k(\mu)$  и  $\pi\beta_k$ , вообще говоря, принимают разные значения.

Произвольному вектору  $T$ , подставленному в (5), соответствует некоторая кривая  $\Gamma(\mu, T)$ , аппроксимирующая полигон  $P(\mu, T)$ . Уравнения (5) являются условиями совпадения  $\Gamma(\mu, T)$  и  $\Gamma(\mu)$ , а следовательно, условиями совпадения  $P(\mu, T)$  и  $P(\mu)$ .

**4.2. Разрешимость задачи.** После приведения промежутков интегрирования в (25) к отрезку  $[0, 1]$  аналогично [5] устанавливается, что функции  $g_k(T, \beta)$  непрерывно дифференцируемы по  $t_i, i = \overline{1, n-1}$  и для вектора  $T$  справедливы оценки (4) (см. также [9]).

Так как оператор  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, g = (g_1, \dots, g_{n-1})$  в (25) непрерывно дифференцируемый по  $t_k$  на множестве  $T \in R$  и на его границе не имеет неподвижных точек, то по теореме Шаудера уравнение (25) имеет, по крайней мере, одно решение. Доказана

**Теорема 5 (существования).** Пусть базовый полигон  $P$  является невырожденным. Тогда для соответствующей ему кривой  $\Gamma(\mu)$  уравнение (25) имеет, по крайней мере, одно решение  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$ , принадлежащее множеству  $R$ , определенному в (4).

Проблема оптимизации исследуется так же, как в п. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990.
2. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
3. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969.
4. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979.
5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
6. Монахов В. Н. Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 106–121.
7. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
8. Монахов В. Н., Губкина Е. В. Корректность задачи о параметрах струйных течений идеальной жидкости // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 5. С. 595–597.
9. Монахов В. Н. Контактные задачи теории фильтрации в криволинейных областях // Докл. РАН. 2005. Т. 404, № 3. С. 344–347.

Поступила в редакцию 13/II 2006 г.,  
в окончательном варианте — 19/X 2006 г.