

О ВЛИЯНИИ СКОРОСТИ ПОТОКА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ТОКОВ В МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

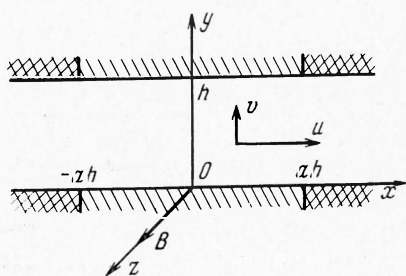
А. Г. Корсун, А. Л. Левин

(Москва)

Исследуется стационарное плоское течение проводящего газа поперек магнитного поля в канале постоянного сечения, образованном электродами конечной длины и изоляторами. Учитывается эффект Холла. Предполагается, что электромагнитные силы малы. Используется линейное приближение. Показано, что возмущения скорости потока сжимаемого газа могут приводить к образованию замкнутых токов в канале и существенно изменять распределение плотности тока на электродах. При достаточно больших значениях скорости и проводимости газа, т. е. при не малых магнитных числах Рейнольдса, ток концентрируется вблизи выхода из межэлектродного промежутка.

Задача о распределении параметров в магнитогазодинамическом канале с учетом электромагнитных, газодинамических, тепловых и т. д. процессов весьма сложна. Во многих случаях основные силы и источники энергии в потоке определяются электромагнитными величинами. В связи с этим представляет интерес исследование электромагнитных процессов в канале при максимальном упрощении газодинамической и тепловой частей задачи. В работах [1, 2] рассмотрен вопрос о распределении токов и потенциалов в канале с конечными электродами в условиях, когда проводимость, параметр Холла и приэлектродные падения постоянны, скорость не изменяется вдоль оси канала, магнитное число Рейнольдса мало. Распределения электромагнитных величин определяются растеканием тока из межэлектродного промежутка и эффектом Холла. В последующих работах исследовалось влияние приэлектродных падений [3], скольжения ионов [4], продува проводящего газа через электроды [5].

1. Рассматривается плоское стационарное течение проводящего газа в канале $|X| < \infty, 0 \leq Y \leq h$, образованном изоляторами и электродами



Фиг. 1

длиной $2ah$ (фиг. 1). Предполагается, что выполняются следующие условия:

1) вязкость и теплопроводность газа несущественны;

2) внешнее магнитное поле однородно и направлено вдоль оси Z (фиг. 1), тока вдоль этой оси нет, поэтому суммарное магнитное поле направлено вдоль Z и зависит от X и Y ;

3) плазма квазинейтральна, приэлектродные падения постоянны по длине каждого электрода;

4) в уравнении закона Ома члены, пропорциональные градиентам давления и температуры электронов, и члены, связанные со скольжением ионов, несущественны [6].

При этих условиях течение достаточно плотной однократно ионизованной плазмы может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} + H \frac{\sigma}{\alpha \rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \sigma (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), & R_m \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla (\rho T)}{\gamma M^2} + A^2 R_m \mathbf{j} \times \mathbf{B}, & \nabla (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho T \mathbf{v} \nabla \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} &= A^2 R_m M^2 \gamma (\gamma - 1) \frac{I^2}{\sigma}, & \sigma &= \sigma(T, \rho), \quad \alpha = \alpha(T, \rho) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Все величины здесь безразмерные. Масштабами для плотности ρ , двух компонент скорости u и v (фиг. 1), магнитной индукции B , температуры T , проводимости σ , степени ионизации α и линейных размеров приняты соответственно ρ_* , u_* , B_* , T_* , σ_* , α_* и ширина канала h . Для плотности тока j и электрического потенциала ϕ масштабами служат $\sigma_* u_* B_*$ и $u_* B_* h_*$. Критерии подобия в системе (1.1) следующие: M — число Маха, A — число Альфвена, H — параметр Холла, R_m — магнитное число Рейнольдса, γ — отношение теплоемкостей

$$M^2 = \frac{u_*^2}{\gamma R T_*}, \quad A^2 = \frac{B_*^2}{\mu \rho_* u_*^2}, \quad H = \frac{\sigma_* m_i B_*}{\alpha_* \rho_* e}, \quad R_m = \sigma_* u_* h_*$$

Здесь R — газовая постоянная, μ — магнитная проницаемость, e и m_i — заряд и масса иона.

Исключив из системы (1.1) \mathbf{j} и ϕ , ее можно записать для плоского течения так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \Delta \mathbf{B} - \left(\nabla \frac{1}{\sigma} \right) \times (\nabla \times \mathbf{B}) + H \left(\nabla \frac{1}{\alpha \rho} \right) \times \nabla \frac{B^2}{2} &= R_m [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \mathbf{v})] \\ \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= - \frac{\nabla (\rho T)}{\gamma M^2} - A^2 \nabla \frac{B^2}{2}, \quad \Delta (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho T \mathbf{v} \nabla \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} &= \frac{A^2 M^2}{R_m} \gamma (\gamma - 1) \frac{(\nabla \times \mathbf{B})^2}{\sigma}, \quad \sigma = \sigma(T, \rho), \quad \alpha = \alpha(T, \rho) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если изменения всех величин в канале малы по сравнению с их средними значениями, т. е. если в безразмерном виде

$$\begin{aligned} |\rho - 1| \lesssim \varepsilon, \quad |u - 1| \lesssim \varepsilon, \quad |v| \lesssim \varepsilon, \quad |T - 1| \lesssim \varepsilon, \quad |B - 1| \lesssim \varepsilon, \\ |\sigma - 1| \lesssim \varepsilon, \quad |\alpha - 1| \lesssim \varepsilon \end{aligned}$$

где $\varepsilon \ll 1$, то уравнения системы (1.2) можно линеаризовать. При этом в первом уравнении — уравнении индукции — пренебрежимо малыми по сравнению с первым членом оказываются нелинейный член с эффектом Холла, если параметр H невелик ($H \ll 1/\varepsilon$), и нелинейный член, связанный с изменением проводимости. Аналогично в уравнении энергии при $M^2 A^2 R_m \ll 1/\varepsilon$ несущественным оказывается член, описывающий джоулеву диссипацию.

Система линеаризованных уравнений после некоторых преобразований принимает следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \Delta B &= R_m \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} + R_m \frac{M^2 (1 - A^2) - 1}{M^2 - 1} \frac{\partial B}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial B}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= - \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial B}{\partial x} \\ T &= \rho^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

На не проницаемых для газа стенках канала $v = 0$.

Граничные условия для B получаются следующим образом. Второе уравнение системы (1.1) позволяет написать для безразмерных суммарных токов, отнесенных к единице высоты канала вдоль z , которые текут через

нижний (I_0) и верхний электроды (I_1) и вдоль канала (I_k), такие соотношения:

$$R_m I_0 = B(-a, 0) - B(a, 0), \quad R_m I_1 = B(-a, 1) - B(a, 1) \\ R_m I_k = B(x, 1) - B(x, 0)$$

На идеальных изоляторах нормальная компонента тока равна нулю, поэтому на них $R_m j_y = -\partial B / \partial x$, т. е. $B = \text{const}$. Ниже рассматриваются условия, при которых суммарный ток I_k вдоль канала между изолирующими стенками отсутствует, т. е. $B(x, 1) = B(x, 0)$ при $|x| \geq a$, поэтому $I_0 = I_1 = I$. За масштаб магнитной индукции B_* принято ее значение на изоляторах слева от электродов. Если ток I во внешней цепи замыкается справа от электродов, то B_* есть индукция внешнего поля, а если ток замыкается слева от электродов, то B_* — сумма индукции внешнего поля и собственного поля тока I . Таким образом, граничные условия для B на изоляторах имеют следующий вид:

$$B(x, 0) = B(x, 1) = 1 \quad \text{при } x \leq -a \\ B(x, 0) = B(x, 1) = 1 - R_m I \quad \text{при } x \geq a \quad (1.4)$$

Величина тока I может быть определена через разность потенциалов между электродами φ_0 , при этом $\varphi_0 > 1$ соответствует режиму ускорителя, $0 < \varphi_0 < 1$ — режиму генератора, $\varphi_0 < 0$ — режиму тормоза.

На идеально проводящих электродах тангенциальная составляющая напряженности электрического поля равна нулю и граничное условие для суммарного магнитного поля в линейном приближении записывается так:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = H \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.5)$$

2. Для дальнейшего упрощения задачи предполагается, что воздействие электромагнитных сил на поток мало, т. е. в системе (1.3)

$$A^2 M^2 \partial B / \partial x \ll \partial v / \partial y$$

Из полученных ниже решений следует, что это условие выполняется при $A^2 R_m \ll 1$. В этом случае четыре последних уравнения системы (1.3) описывают в линейном приближении поток сжимаемого газа в отсутствие электромагнитных сил. В уравнении индукции первый член правой части учитывает влияние изменяющейся скорости потока сжимаемого газа на распределение электромагнитных величин. В несжимаемом газе, т. е. при $M^2 \ll 1$, этот член пренебрежимо мал.

В сверхзвуковом потоке частные решения газодинамических уравнений системы (1.3) имеют вид

$$v = v_0 \sin(r\pi y) \sin[k_r(x - x_0)], \quad k_r = \frac{r\pi}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \\ u = u(x_0, y) - \frac{v_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \cos(r\pi y) \{\cos[kr(x - x_0)] - 1\} \\ \rho = 1 + \frac{v_0 M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \cos(r\pi y) \cos[k_r(x - x_0)] \quad (2.1)$$

Здесь v_0 и x_0 — константы интегрирования.

Это решение описывает сверхзвуковое адиабатическое течение невязкого газа в плоском канале постоянного сечения с малыми поперечными

перемещениями, которые приводят к периодическим изменениям параметров потока вдоль x с периодом

$$L = 2r^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$$

Такого типа возмущения могут возникнуть, если на входе в канал поток неоднороден по сечению, или под действием поперечных составляющих электромагнитных сил, связанных с токами, вытекающими из межэлектродного промежутка [8].

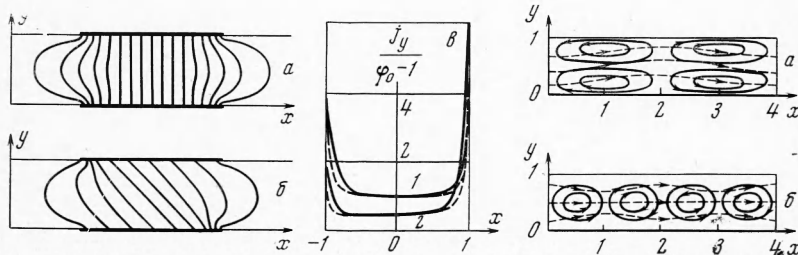
3. Для решения уравнения индукции применялся приближенный метод, предложенный для подобных задач Л. Е. Калихманом и являющийся вариантом метода интегральных соотношений. Зависимость суммарного B от координаты y представлялась в виде полинома четвертой степени с коэффициентами, являющимися функциями x

$$B = B_0 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3 + (B_1 - B_0 - B_2 - B_3 - B_4) y^4 \quad (3.1)$$

Здесь B_0 и B_1 — значения индукции на стенках канала при $y = 0$ и $y = 1$ соответственно.

Для определения этих пяти коэффициентов использовались следующие пять соотношений: граничные условия (1.4) или (1.5) на обеих стенках, само уравнение при $y = 0$ и $y = 1$ и интегральное соотношение, полученное интегрированием уравнения индукции по y от 0 до 1 с использованием (3.1).

Таким образом, решение уравнения в частных производных с неоднородными граничными условиями сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений для трех областей: для межэлектродного промежутка ($|x| \leq a$) и для двух участков канала с изолирующими стенками ($|x| \geq a$). Константы интегрирования определяются конечностью токов при $|x| \rightarrow \infty$ и условиями сшивания решений на границах областей.



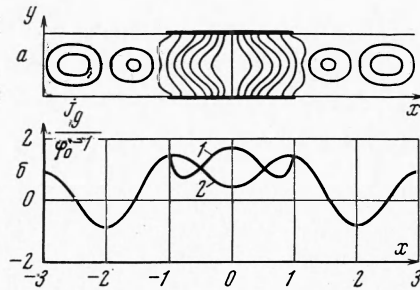
Фиг. 2

Фиг. 3

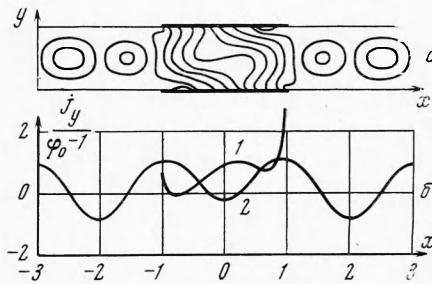
При этом используется непрерывность на границе тангенциальной составляющей напряженности электрического поля и нормальной составляющей плотности тока. В приближенном решении условия сшивания сводятся к неразрывности разности потенциалов на стенках канала и неразрывности B на стенках и на оси канала. Величина I определялась через разность потенциалов φ_0 с помощью соотношения, полученного из линеаризованного уравнения закона Ома

$$\int_0^1 \frac{\partial B}{\partial x} dy = R_m \left[\int_0^1 B dy + \int_0^1 (u - 1) dy - \varphi_0 \right] - H (B_1 - B_0)$$

В работах [1,2] и [4] различными методами задача решена для $A^2 \ll 1$, $R_m \ll 1$, $v_0 = 0$. Полученное описанным выше способом решение приблизительно совпадает с этими решениями. Коэффициент, характеризующий увеличение суммарного тока за счет растекания токов из межэлектродного промежутка, при $H \ll 1$, $R_m \ll 1$, $v_0 = 0$ равен $I / (\varphi_0 - 1) = 2a + 0.53$ вместо $I / (\varphi_0 - 1) = 2a + 0.44$ из точного решения [1]. На фиг. 2 показаны линии электрического тока (т. е. линии $B = \text{const}$) в канале с конечными электродами при $a = 1$, $A^2 \ll 1$, $R_m \ll 1$, $v_0 = 0$, $H \ll 1$ (фиг. 2, а) и $H = 1$ (фиг. 2, б).



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 2, б изображены распределения плотности тока на электродах при $H \ll 1$ (кривая 1) и при $H = 1$ (кривая 2). Сплошные линии получены из приближенного решения, пунктирные — из работы [4]. Плотность тока возрастает к концу электрода, но не до бесконечности, как в точном решении, а до конечной величины.

4. В канале с непроводящими стенками возмущения типа (2.1) приводят к образованию петель тока. Соответствующее решение уравнения индукции при $R_m \ll 1$ имеет следующий вид:

$$B = 1 + V_r \sin [k_r (x - x_0)] \left\{ \frac{1}{2} [y^2 - 2S_r y^3 + 2(S_r - 1)y^4] - \frac{k_r^2 (1/3 - 1/4 S_r) + 5(S_r - 1)}{K_r^2 + n^2} (y - 2y^3 + y^4) \right\}, \quad n^2 = 10 + 1/4 R_m^2$$

$$V_r = \frac{R_m M^2 r \pi v_0}{M^2 - 1}, \quad s_r = 2/3 \text{ при } r = 1, \quad s_r = 1 \text{ при } r = 2$$

Линии электрического тока (сплошные) и линии тока газа (штриховые) при $M^2 = 5$, $R_m \ll 1$, $v_0 = 0.1$ изображены на фиг. 3, а для $r = 1$ и на фиг. 3, б для $r = 2$.

Если поток проводящего газа движется со сверхзвуковой скоростью в канале с электродами и в нем есть возмущения типа (2.1), то на поле токов, протекающих между электродами (фиг. 2), накладываются петли тока, аналогичные показанным на фиг. 3. В области электродов эти петли замыкаются на электродах и изменяют распределение плотности тока на них. Полученное решение уравнения индукции для произвольных H , R_m , v_0 весьма громоздко.

На фиг. 4, а изображены линии электрического тока в канале с электродами при $M^2 = 5$, $R_m \ll 1$, $v_0 / (\varphi_0 - 1)$, $r = 2$, $a = 1$, $x_0 = -1$, $H \ll 1$. На фиг. 4, б показаны распределения плотности тока j_y на электродах (кривая 1) и на оси канала (кривая 2). Для таких же значений параметров, но при $H = 1$, аналогичные распределения показаны на

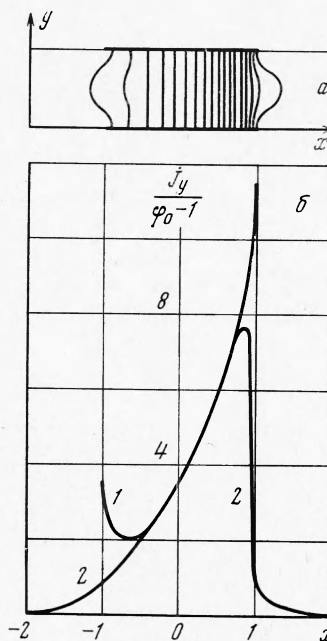
фиг. 5, а, б (кривая 1 — распределение j_y на нижнем электроде; распределение на верхнем симметрично относительно оси $x = 0$). Как видно из решения, при

$$\frac{v_0}{\varphi_0 - 1} \sim \frac{M^2 - 1}{M^2} \frac{k_r^2 + l^2}{2\pi k_r} \quad (l^2 = 60 + R_m^2/4)$$

возмущения в потоке газа значительно изменяют распределение токов в канале и на электродах.

В частности, на некоторых участках электродов плотность тока может быть очень малой. При достаточно больших значениях параметра $v_0/(\varphi_0 - 1)$ решение показывает возможность появления на электродах участков с обратным направлением тока, т. е. петель тока, замыкающихся через электроды (фиг. 5, а). Замыкание линий тока на электроде было обнаружено при численном решении задачи о двумерном магнитогазодинамическом течении в коаксиальной системе [9].

Неоднородность потока изменяет общее сопротивление межэлектродного промежутка. При $H \ll 1$, $R_m \ll 1$ и $r = 2$ суммарный ток равен



Фиг. 6

$$I = \frac{1}{R_m} [B_0(-a) - B_0(a)] = (\varphi_0 - 1) \left(2a + \frac{5}{3n} \right) + \frac{V_r \cos(k_r x_0)}{3l^2 (k_r^2 + n^2)} [5nk_r \cos(k_r a) + (k_r^2 + l^2) \sin(k_r a)]$$

5. Если число R_m не мало, то наряду с эффектами, рассмотренными выше, проявляется «снос» потоком линий электрического тока. Например, решение для однородного потока при $v_0 = 0$, $H \ll 1$ имеет вид

$$B = 1 - \frac{5R_m(\varphi_0 - 1)}{n - 1/2 R_m} \exp[(n + 1/2 R_m)(a + x)] (y - 2y^3 + y^4) \quad \text{при } x \leq -a$$

$$B = B_0(x) + B_3(x)(y^2 - 2y^3 + y^4) \quad \text{при } |x| \leq a$$

$$B_0(x) = 1 + (\varphi_0 - 1) \{1 - \exp[R_m(a + x)]\} + \frac{2}{l^2} \{B_3(-a) \exp[R_m(a + x)] - B_3(x)\}$$

$$B_3(x) = - \frac{25R_m(\varphi_0 - 1)}{2 \operatorname{sh}(2la) (n^2 - 1/4 R_m^2)} \{ [2n \operatorname{ch}(la + 1/2 R_m a) +$$

$$+ R_m \operatorname{sh}(la + 1/2 R_m a)] \exp(-lx + 1/2 R_m x) -$$

$$- [2n \operatorname{ch}(la - 1/2 R_m a) - R_m \operatorname{sh}(la - 1/2 R_m a)] \exp(lx + 1/2 R_m x) \}$$

$$B = B_0(a) + \frac{5R_m(\varphi_0 - 1)}{n + 1/2 R_m} \exp[(n - 1/2 R_m)(a - x)] (y - 2y^3 + y^4) \quad \text{при } x \geq a$$

Линии электрического тока, соответствующие этому решению при $R_m = 1$, изображены на фиг. 6, а, а распределения плотности токов j_y — на фиг. 6, б (кривая 1 — на электродах, кривая 2 — на оси канала).

При $2aR_m \lesssim 0.1$ решение практически совпадает с решением для $R_m \ll 1$. Концентрация тока вблизи выхода из межэлектродного промежутка связана с возрастанием

$$\left| \varphi_0 - \int_0^1 uVdy \right|$$

из-за приблизительно экспоненциального измерения суммарного V .

В заключение авторы выражают благодарность В. Ф. Калитенко за помощь в проведении расчетов.

Поступила 20.XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б. Магнитогазодинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. В а т а ж и н А. Б. Некоторые задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
3. В а т а ж и н А. Б. Электрические поля в магнитогазодинамических каналах при наличии приэлектродного падения потенциала. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
4. Е м е ц Ю. П. Распределение тока в плоском магнитогазодинамическом канале при движении электропроводной среды в сильном магнитном поле. ПМТФ, 1967, № 3.
5. Е м е ц Ю. П. О распределении тока на проницаемых электродах при наличии эффекта Холла в потоке электропроводящей среды. ПМТФ, 1966, № 3.
6. К у л и к о в с к и й А. Г., Л ю б и м о в Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
7. К о р с у н А. Г. Течение в канале проводящего газа с большим магнитным числом Рейнольдса в линейном приближении. ПМТФ, 1968, № 5.
8. Ш е р к л и ф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
9. Б р у ш л и н с к и й К. В., Г е р л а х Н. И., М о р о з о в А. И. Двумерное стационарное течение хорошо проводящей плазмы в коаксиальной системе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.