

УДК 533.6.011:532.529+519.68

## **ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОНТУРОВ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЧАСТЕЙ СОПЕЛ РДТТ С ПОМОЩЬЮ ПРЯМЫХ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ**

**А.Д. РЫЧКОВ**

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск*

Излагаются результаты построения контуров сверхзвуковых частей сопел ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ) больших степеней расширения с помощью прямых вариационных методов. Используется континуальная модель движения двухфазной сплошной полидисперсной среды с учетом процессов взаимодействия как между несущим газом и взвешенными в нем частицами, так и между частицами различных фракций. В качестве численного метода поиска экстремума функции многих переменных используется метод локальных вариаций. Результаты расчетов свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного подхода для оптимизации таких сопел.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Большой практический интерес представляет задача построения оптимальных контуров сверхзвуковых частей сопел ракетных двигателей, работающих на смешанном твердом топливе. Основной ее особенностью для сопел больших расширений является условие недопущения выпадения твердых частиц, всегда присутствующих в поле течения, на стенку сопла, поскольку из-за высокой скорости их движения (несколько километров в секунду) абразивный унос материала стенки сопла приводит к его разрушению. Применение для решения такой задачи вариационных методов, основанных на использовании множителей Лагранжа, наталкивается на серьезные трудности, особенно при учете полидисперсности частиц, процессов их коагуляции и дробления, а также при учете различных конструктивных особенностей таких сопел. Поэтому предлагается использовать здесь прямые вариационные методы, основанные на численных методах поиска экстремума удельного импульса сопла при достаточно произвольно задаваемых дополнительных ограничениях.

### **1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

В качестве модели двухфазных продуктов сгорания смешанного твердого ракетного топлива используется континуальная модель смеси идеального газа и взвешенных в нем частиц. Вторая фаза представляет собой полидисперсную среду жидких частиц окисла алюминия различных размеров. Учитываются процессы теплообмена и силового взаимодействия между несущим газом и частицами, а также процессы коагуляции и дробления частиц при их взаимодействии друг с другом. Основные допущения модели:

- течение является стационарным, осесимметричным и двухфазным;

- несущий газ является идеальным, нетеплопроводным и его движение описывается уравнениями Эйлера. Вязкие эффекты учитываются только при взаимодействии фаз через члены источникового типа, описывающие силовое и тепловое взаимодействия между газом и частицами;

- вторая фаза является полидисперсной, ее движение описывается в рамках континуальной модели. Все частицы имеют сферическую форму и разбиты на ряд фракций по их массам;

- между частицами различных фракций из-за их столкновения имеют место процессы взаимодействия (коагуляция и дробление), в результате которых непрерывно изменяется их распределение по массам, скоростям и температурам. Описание этих процессов проводится в рамках модели Лагранжа;

- объемом, занимаемым частицами, пренебрегается, распределение температуры внутри частицы полагается однородным.

Система уравнений в виде законов сохранения, описывающая такое двухфазное течение, имеет вид

$$\nabla_y \rho \bar{U} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla_y \rho u \bar{U} + \frac{\partial p}{\partial x} = y \sum_{i=1}^N \rho_i C_{Ri} (u_i - u), \quad (2)$$

$$\nabla_y \rho v \bar{U} + \frac{\partial p}{\partial x} - p = y \sum_{i=1}^N \rho_i C_{Ri} (v_i - v), \quad (3)$$

$$\nabla_y p H_0 \bar{U} = y \sum_{i=1}^N \rho_i \{ C_{\alpha i} c_p (T_i - T) + C_{Ri} [u_i (u_i - u) + v_i (v_i - v)] \}, \quad (4)$$

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

$$\nabla_y \rho_i \bar{U}_i = y \left[ n_i \sum_{j=1}^i \bar{K}_{ij} \Phi_{ij} \rho_j - \rho_i \sum_{j=i}^N \bar{K}_{ij} \Phi_{ij} n_j \right], \quad (6)$$

$$\nabla_y n_i U_i = -y n_i \sum_{j=i}^N \bar{K}_{ij} \Phi_{ij} n_j, \quad (7)$$

$$\nabla_y \rho_i u_i \bar{U}_i = y \left\{ \rho_i C_{Ri} (u - u_i) + n_i \sum_{j=1}^i \bar{K}_{ij} \rho_j [u_j - (1 - \Phi_{ij}) u_i] - \rho_i \sum_{j=i}^N \bar{K}_{ij} n_j [u_i - (1 - \Phi_{ij}) u_j] \right\}, \quad (8)$$

$$\nabla_y \rho_i v_i \bar{U}_i = y \left\{ \rho_i C_{Ri} (v - v_i) + n_i \sum_{j=1}^i \bar{K}_{ij} \rho_j [v_j - (1 - \Phi_{ij}) v_i] - \rho_i \sum_{j=i}^N \bar{K}_{ij} n_j [v_i - (1 - \Phi_{ij}) v_j] \right\}, \quad (9)$$

$$\nabla_y p E_i \bar{U}_i = y \left\{ \rho_i [ C_{\alpha i} c_p (T - T_i) + C_{Ri} [u_i (u_i - u) + v_i (v_i - v)] \right\} +$$

$$+ n_i \sum_{j=1}^i \bar{K}_{ij} \rho_j [E_j - (1 - \Phi_{ij}) E_i] - \rho_i \sum_{j=i}^N \bar{K}_{ij} n_j [E_i - (1 - \Phi_{ij}) E_j] \}, \quad (10)$$

где  $H_0 = c_p T + (u^2 + v^2)/2$ ,  $E_i = c_b T_i + (u_i^2 + v_i^2)/2$ ,  $\bar{K}_{ij} = K_{ij} \mathcal{E}_{ij}$ .

Для определения коэффициентов сопротивления  $C_{Ri}$  и теплопередачи  $C_{\alpha i}$  использовались следующие формулы (с учетом поправки на деформацию жидкой частицы  $\alpha_i(\text{Re}_i)$ ):

$$C_{Ri} = \alpha_i C_{R0i} \frac{1 - 0,445 M_i + 4,84 M_i^2 - 9,73 M_i^3 + 6,94 M_i^4}{\sqrt{1 + 3,2 C_{R0i} r_i \rho_{bi} / (\rho a)}}, \quad M_i = \frac{|\bar{U} - \bar{U}_i|}{a}, \quad (11)$$

$$C_{R0i} = 3\mu \left( 21,12 + 6,3\sqrt{\text{Re}_i} + 0,25 \text{Re}_i \right) / \left( 16r_i^2 \rho_{bi} \right), \quad \text{Re}_i = \frac{2r_i \rho |\bar{U} - \bar{U}_i|}{\mu}, \quad \mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n,$$

$$\alpha_i(\text{Re}_i) = \begin{cases} \exp(0,03 \text{We}_i^{1,5}), & \text{Re}_i \geq 700, \\ (1 + 0,03 \text{We}_i)^2, & \text{Re}_i \leq 150, \end{cases} \quad \text{We}_i = \frac{2r_i \rho |\bar{U} - \bar{U}_i|^2}{\sigma_{bi}}, \quad \text{и в промежуточной}$$

области  $\alpha_i = \alpha_i(150) + [\alpha_i(700) - \alpha_i(150)](\text{Re}_i - 150)/550$ . Для окиси алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$  учитывалась зависимость от температуры

$$\rho_{bi} = 3,06 - 0,967 \cdot 10^{-3} (T_i - 2323) \left[ \text{г/см}^3 \right],$$

$$\sigma_{bi} = 669 - 0,2983 (T_i - 2323) \left[ \text{дн/см}^3 \right].$$

$$C_{\alpha i} = C_{\alpha 0i} \text{Nu}_i (1 + 3,42 \mu \text{Nu}_i / (2r_i \rho a \text{Pr}))^{-1} \quad (12)$$

$$\text{Nu}_i = 2 + 0,459 \text{Re}_i^{0,55} \text{Pr}^{0,33}, \quad C_{\alpha 0i} = 3\mu / 2r_i^2 \rho_{bi} \text{Pr}.$$

В константу коагуляции вводилась аналогичная поправка на деформацию жидкой частицы

$$K_{ij} = \pi [\alpha_i r_i + \alpha_j r_j]^2 |\bar{U}_i - \bar{U}_j|.$$

Для коэффициента захвата частиц, учитывающего отклонение траекторий мелких частиц при захвате их более крупными, применялась формула:

$$\mathcal{E}_{ij} = \left[ 1 + \frac{0,75 \ln(4 \text{Stk}_{ij})}{2 \text{Stk}_{ij} - 1,214} \right]^{-2}, \quad \text{Stk}_{ij} = \frac{|U_i - U_j| r_i^2 \rho_{bi}}{9r_j \mu}. \quad (13)$$

Для коэффициента эффективности соударений использовалась формула:

$$\Phi_{ij} = 1 - 0,247 \text{Re}_{ij}^{0,434} \Gamma_j^{0,133} (r_i / r_j)^{0,273} - 0,18 \text{We}_j^{0,67} \text{Re}_{ij}^{0,395} \Gamma_j^{-0,117} (r_i / r_j)^{2,27}, \quad (14)$$

$$\Gamma_j = \frac{\mu_{bj}^2}{2r_j \sigma_{bj} \rho_{bj}}, \quad \text{Re}_{ij} = \frac{2r_i \rho_{bj} |\bar{U}_j - \bar{U}_i|}{\mu_{bj}}, \quad \mu_{bj} [\text{пуаз}] = \begin{cases} 0,234 (T_i / 2670)^{-6,5}, & T_i \leq 2670, \\ 0,234 (T_i / 2670)^{-2,387}, & T_i > 2670. \end{cases}$$

### 1.1. Реализация математической модели

Для численного решения системы уравнений (1)–(10) при расчете дотрансзвуковой области течения применялся метод установления. В этом случае вместо

стационарной системы записывалась нестационарная и проводился расчет течения по времени до тех пор, пока все параметры не переставали зависеть от времени. Такая система для несущего газа имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = \vec{R}, \quad (15)$$

где  $\vec{Q} = \{y\rho, y\rho u, y\rho v, y\rho e\}^T$ ,  $\vec{F} = \{y\rho u, y(\rho u^2 + p), y\rho uv, y\rho(e + p/\rho)\}^T$ ,

$$\vec{G} = \{y\rho v, y\rho v, y\rho(v^2 + p), yv\rho(e + p/\rho)\}^T, \quad e = c_v + (u^2 + v^2)/2,$$

$$\vec{R} = \left\{ 0, y \sum_{i=1}^N C_{Ri} \rho_i (u_i - u), p - y \sum_{i=1}^N C_{Ri} \rho_i (u_i - u), y \sum_{i=1}^N \rho_i \{ C_{\alpha i} c_p (T_i - T) + C_{Ri} [u_i (u_i - u) + v_i (v_i - v)] \} \right\}^T.$$

Для системы (15) задавались следующие начальные и граничные условия. Во входном сечении сопла ( $x = x_0$ ):  $H_0(t, x_0, y) = \text{const}$ ,  $\rho v(t, x_0, y) = 0$ ,  $S(t, x_0, y) = \text{const}$ , на стенке сопла ( $y = Y(x)$ ) — условия непротекания:  $v(t, x, Y(x)) = u(t, x, Y(x))(dY(x)/dx)$ , на оси ( $y = 0$ ) — условия симметрии:  $\partial \rho / \partial y = \partial p / \partial y = \partial u / \partial y = \partial T / \partial y = 0$ ,  $v(t, x, 0) = 0$ . В качестве правой границы дозвуковой области выбиралось сечение, в котором течение всегда оставалось сверхзвуковым, и тогда граничные условия в нем не задаются. В качестве начальных условий задавались результаты одномерного расчета стационарного равновесного течения, дополненные линейным распределением поперечной скорости  $v(t, x, y)$  в каждом сечении сопла, удовлетворяющим условиям непротекания и симметрии.

Начальное значение вектора  $\vec{R} = \{0, 0, p, 0\}^T$ .

Для решения (15) применялась явная двухшаговая разностная схема Мак-Кормака второго порядка точности

$$\frac{\tilde{Q}_{i,j}^{n+1} - \tilde{Q}_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{i+1,j}^n - \tilde{F}_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\tilde{G}_{i,j+1}^n - \tilde{G}_{i,j}^n}{\Delta y} = \tilde{R}_{i,j}^n, \quad (16)$$

$$\tilde{Q}_{i,j}^{n+1} = \left[ \frac{\tilde{Q}_{i,j}^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\tilde{F}_{i,j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{G}_{i,j}^{n+1} - \tilde{G}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} - \tilde{R}_{i,j}^{n+1} \right) \right]. \quad (17)$$

После установления течения решалась стационарная система уравнений частиц для (6)–(10) маршевым методом, определялись значения всех компонент вектора  $\vec{R}$ , с этим новым значением  $\vec{R}$  снова решалась на установление система (15) и процесс повторялся до сходимости итераций.

В сверхзвуковой части сопла (начиная с сечения, в котором минимальное значение числа Маха в транзвуковой области  $M \approx 1,01$ ) стационарная система (1)–(10) решалась маршевым методом также с использованием явной двухшаговой разностной схемы Мак-Кормака.

## 1.2. Метод оптимизации

Построение оптимального сверхзвукового контура сопла проводится с помощью прямых вариационных методов, в качестве дополнительных ограничений

(изопериметрических условий) задавались длина сопла и степень его расширения. Суть этих методов заключается в следующем. Сначала выбирается некоторый базовый контур сверхзвуковой части сопла  $Y_b(x)$ , который, например, можно получить из известного решения вариационной задачи построения оптимального сопла для равновесного двухфазного течения с плоской звуковой линией, или взять какой-то реальный прототип сопла. Далее, искомый контур представляется в виде поправки к базовому контуру:

$$Y(x) = Y_b(x) + \sum_{i=1}^M \alpha_i \varphi_i(x), \quad (18)$$

где  $\alpha_i$  — неизвестные коэффициенты разложения поправки по базисным функциям  $\varphi_i(x)$ . Их значения определяются из решения вариационной задачи на отыскание максимальной величины удельного импульса сопла  $I(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$  при заданных ограничениях на его длину и степень расширения, а также при условии отсутствия выпадения частиц на контур сопла. В качестве базисных функций можно выбрать, например, мономы. Значение удельного импульса определяется из расчета сверхзвуковой части сопла описанным выше методом. Максимальное значение удельного импульса (целевая функция) определяется с помощью какого-либо численного метода поиска экстремума. В данном случае использовался метод локальных вариаций [2], не требующий вычисления производных целевой функции, для реализации условия отсутствия выпадения частиц на контур сопла применялся метод штрафных функций.

## 2. Некоторые результаты расчетов

Расчеты проводились для сопел, дозвуковая часть контура которых состояла из параллельного входного участка и двух окружностей, сопряженных прямой линией, а сверхзвуковая представляла собой полином третьей степени, либо сопрягающийся окружностью радиуса  $R_s$  с дозвуковой частью (сопло без угловой точки в минимальном сечении), либо примыкающий к ней с разрывом первой производной в минимальном сечении (сопло с угловой точкой) (рис. 1). В качестве изопериметрических условий задавались длина сверхзвуковой части сопла  $L = 1$  м и ордината его выходного сечения  $Y_a = 0,5$  м. Радиус минимального сечения  $R_{\min} = 0,1$  м. Набор основных параметров базового варианта выбирался близким к значениям, обычно используемым на практике при проектировании РДТТ: весовая

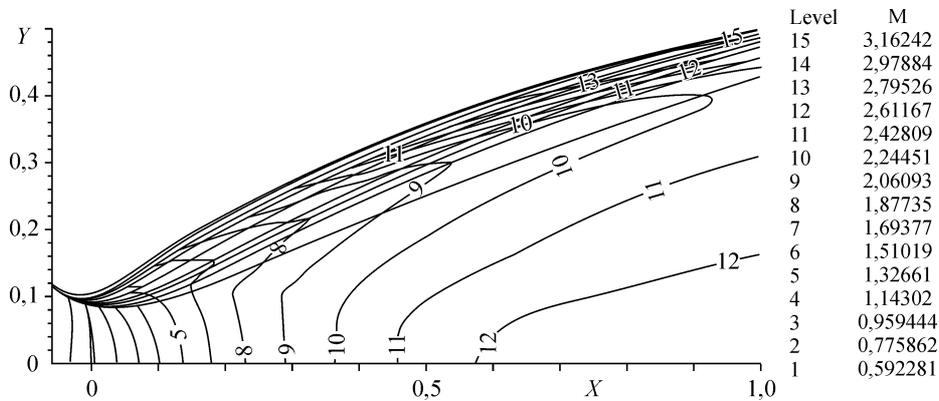


Рис. 1. Течение в базовом сопле.

доля к-фазы  $z = 0,4$ ; среднемассовый размер частиц на входе в сопло  $d_{43} = 4$  мкм; давление в камере сгорания  $p_0 = 4$  МПа, температура  $T_0 = 3500$  К; число фракций частиц  $N_p = 10$ . Число базисных функций в (18), в качестве которых были выбраны мономы, равно трем. Результаты расчетов представлены в табл. 1, 2, где  $I_0, I_{opt}$  — удельные импульсы исходного и оптимального контуров сопел;  $\xi_0, \xi_{opt}$  — потери удельного импульса на непараллельность течения в выходном сечении сопла (потери на рассеивание);  $\xi_{oc}$  — потери удельного импульса на осаждение частиц на стенку контура исходного сопла. Полагалось, что выпадение частиц на стенку сопла приводит к дополнительным потерям удельного импульса  $\xi_{oc}$ , поскольку часть выпадающих частиц поглощается стенкой, часть отражается от нее снова в поток. Коэффициент поглощения  $K_{oc} = 0,3$ . Расчеты проводились как для сопел с угловой точкой ( $R_s = 0$ ), так и со скруглением ее окружностью радиусом  $R_s = 0,01$  м. За исходный (базовый) контур выбирался оптимальный контур сопла для равновесного двухфазного течения, также построенный с помощью изложенной выше методики. Анализ таблиц показывает, что оптимальные контуры, у которых отсутствует выпадение частиц на стенку, имеют практически одинаковый удельный импульс по сравнению с исходным соплом, однако потери на рассеивание в них заметно выше, что связано с появлением отгиба контура сопла вблизи его выходного сечения из-за условия недопущения выпадения частиц на его стенку. В целом профили оптимальных контуров проходят ниже исходных до точек отгиба, а затем становятся близкими к коническим профилям, чем обусловлены их повышенные потери на рассеивание.

На рис. 1, 2 приведены контуры, изолинии чисел Маха и траектории частиц для исходного (базового) сопла и для оптимального контура. Видно, что в оптимальном контуре поле течения более равномерное, профиль сопла более пологий и вблизи выходного сечения действительно имеется “отгиб” контура, препятствующий выпадению частиц на стенку сопла.

Таблица 1

$R_s$ [м]	$z$	$I_0$ [м/с]	$I_{opt}$ [м/с]	$\xi_0$ [%]	$\xi_{opt}$ [%]	$\xi_{oc}$ [%]
0	0,2	2984,5	2980,9	1,19	1,86	3,55
0	0,3	2948,4	2946,6	1,30	2,06	4,61
0	0,4	2921,7	2920,9	1,40	2,21	5,43
0,1	0,2	2992,2	2991,0	1,44	1,90	3,44
0,1	0,3	2957,7	2957,0	1,55	2,09	4,52
0,1	0,4	2917,8	2918,5	1,66	2,23	5,77

Таблица 2

$D_{43}$ [мкм]	$I_0$ [м/с]	$I_{opt}$ [м/с]	$I_0$ [м/с]	$\xi_{opt}$ [%]	$\xi_{os}$ [%]
3	2962,7	2963,3	1,52	2,20	4,26
2	2976,9	2978,9	1,47	2,28	3,69
1	3023,2	3028,8	1,31	2,31	2,00

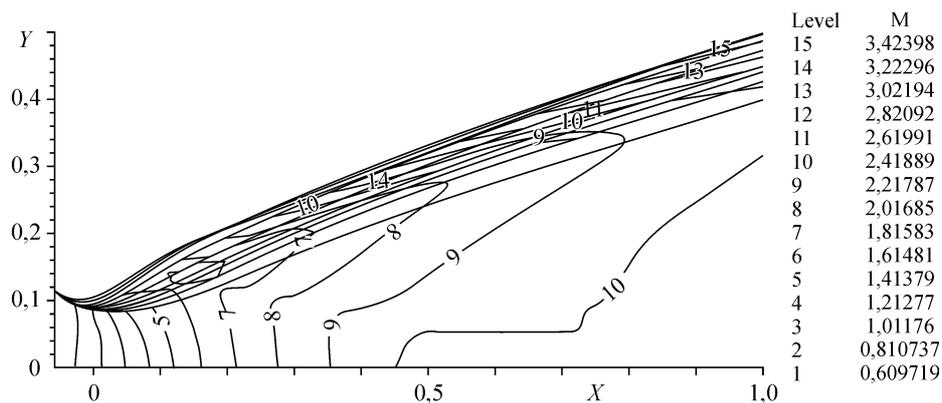


Рис. 2. Течение в оптимальном сопле.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложена методика построения оптимальных контуров сверхзвуковых частей сопел больших расширений ракетных двигателей, работающих на смесевом твердом топливе, не имеющая каких-либо ограничений как на задаваемые изопериметрические условия, так и на конструктивные особенности сопел.

2. Построены оптимальные контуры безуносных сопел для ряда значений весовых долей  $\kappa$ -фазы и среднемассовых размеров частиц на входе в сопло. Отличительной особенностью таких контуров является наличие конической концевой части, препятствующей выпадению частиц на стенку сопел, но увеличивающей потери удельного импульса на рассеивание.

3. Предложенная методика реализована в виде пакета программ и может применяться при проектировании сопел РДТТ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. — 222 с.
2. MacCormac R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper. — 1969. — No. 354. — P. 1–8.
3. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.Л., Столярова Е.М. Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978, — 351 с.

*Статья поступила в редакцию 29 сентября 2005 г.*