

УДК 517.957:532.529

ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ РЕАКЦИЯ — ДИФФУЗИЯ

А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак*

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
664033 Иркутск, Россия* Институт машиноведения УрО РАН, 620049 Екатеринбург, Россия
E-mails: kazakov@icc.ru, lfs@imach.uran.ru

Рассматривается задача построения точных решений системы двух связанных нелинейных параболических уравнений типа реакция — диффузия. Исследуются решения, имеющие вид диффузионных волн, распространяющихся по нулевому фону с конечной скоростью. Доказана теорема о возможности построения точных решений с помощью редукции к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложена пошаговая процедура численного решения системы реакция — диффузия с использованием разложения по радиальным базисным функциям, которая применяется также для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих точные решения системы реакция — диффузия. Проведен численный анализ и оценена точность решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, использованных для верификации пошаговых решений исходной системы.

Ключевые слова: система реакция — диффузия, диффузионная волна, точное решение, радиальные базисные функции.

DOI: 10.15372/PMTF20210417

Введение. Рассмотрим систему параболических уравнений типа реакция — диффузия

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2/\sigma + F(u, v), \quad v_t = vv_{xx} + v_x^2/\delta + G(v, u), \quad (1)$$

где $\sigma > 0$, $\delta > 0$ — константы; F , G — достаточно гладкие функции. Системы такого вида используются для описания различных процессов в биохимии, физической химии, химической кинетике и термодинамике [1], а также в математической экологии [2, 3]. В большинстве работ, посвященных исследованию таких систем, рассматриваются классические граничные условия Неймана, Дирихле, Робена и начальные условия. При этом имеющие ряд приложений решения типа диффузионных (фильтрационных, тепловых) волн, распространяющихся с конечной скоростью по покоящемуся фону, изучены недостаточно [4]. Авторами настоящей работы были проведены исследования решений указанного типа для одного вырождающегося нелинейного параболического уравнения (см., например, [5–7]). В последнее время начаты работы по использованию полученных ранее результатов для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-07-00407), Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки и технологии Тайваня (код проекта 20-51-S52003).

систем [8], что, как показала практика, является нетривиальной задачей и не сводится к механическому переносу методов и подходов.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [8], основное внимание уделяется не доказательству теорем существования решений, а методам их построения. Исследована возможность построения точных решений при заданном фронте диффузионной волны, доказано утверждение, позволяющее в некоторых случаях свести их построение к решению задачи Коши (ЗК) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Для решения исходной задачи и ЗК для СОДУ предложены приближенные методы с использованием разложений по системе радиальных базисных функций. Проведены численный анализ и оценка точности расчетов. Построенные точные решения использованы для тестирования пошаговых решений исходной задачи.

1. Постановка задачи. Пусть в системе (1) слагаемые, не содержащие производные, являются степенными функциями и имеют вид $F(u, v) = Av^\alpha u^{\gamma-\alpha}$, $G(v, u) = Bu^\beta v^{\gamma-\beta}$, где $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ — константы, причем $\gamma > \alpha > 0$, $\gamma > \beta > 0$. Рассмотрим следующую задачу о движении диффузионной волны:

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2/\sigma + Av^\alpha u^{\gamma-\alpha}, \quad v_t = vv_{xx} + v_x^2/\delta + Bu^\beta v^{\gamma-\beta}; \quad (2)$$

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0, \quad v(t, x)|_{x=a(t)} = 0 \quad (3)$$

($x = a(t)$ — уравнение фронта волны). Заметим, что, если $\gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup 0$, функция $a(t)$ является аналитической в точке $t = 0$ и $a'(0) \neq 0$, задача (2), (3) согласно теореме 1 в [8] имеет единственное ненулевое аналитическое решение. Более того, при $\alpha = \beta = 0$ построение указанного решения сводится к интегрированию ЗК для СОДУ.

2. Теорема о редукции. Из приведенного ниже утверждения следует, что редукцию к СОДУ можно осуществить в более общем случае, чем в работе [8].

Теорема. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 1$, $\gamma > \alpha > 0$, $\gamma > \beta > 0$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 > 0$, $c_3 \neq 0$. Тогда задача (2), (3) допускает редукцию к ЗК для СОДУ второго порядка в следующих случаях: 1) при $a(t) = c_1 t + c_2$, если $\gamma > 0$; 2) при $a(t) = c_3 \ln(c_1 t + c_2)$, если $\gamma = 2$; 3) при $a(t) = c_2 e^{c_1 t}$, если $\gamma = 1$; 4) при $a(t) = (c_1 t + c_2)^{(\gamma-2)/(2\gamma-2)}$, если $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, $\gamma \neq 2$.

Доказательство. Выполним замену независимых переменных. Пусть $u = \psi(t)p(z)$, $v = \psi(t)q(z)$, где $z = x/a_1(t) + a_2(t)$; $\psi(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ — достаточно гладкие функции; $a_1(0) \neq 0$. Тогда фронт тепловой волны задается либо равенством $a(t) = -a_1(t)a_2(t)$, если $a_2(t) \neq 0$; либо равенством $a(t) = a_1(t)$, если $a_2(t) = 0$. Данный анзац является вариантом прямого метода Кларксона — Крускала [9]. Подобные конструкции применялись в аналогичных случаях [6]. После приведения подобных слагаемых и умножения обеих частей на $a_1^2(t)/\psi^2(t)$ система (2) принимает вид

$$pp'' + \frac{1}{\sigma}(p')^2 + \frac{a_1(a_1'z - a_1'a_2 - a_1a_2')}{\psi} p' - \frac{a_1^2\psi'}{\psi^2} p + A\psi^{\gamma-2} a_1^2 q^\alpha p^{\gamma-\alpha} = 0,$$

$$qq'' + \frac{1}{\delta}(q')^2 + \frac{a_1(a_1'z - a_1'a_2 - a_1a_2')}{\psi} q' - \frac{a_1^2\psi'}{\psi^2} q + B\psi^{\gamma-2} a_1^2 p^\beta q^{\gamma-\beta} = 0.$$

Условие на фронте диффузионной волны (3) записывается в виде

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 0. \quad (4)$$

Получим условия, выполнение которых превращает систему (2) в СОДУ, где независимой переменной является z . Для этого необходимо, чтобы следующие множители являлись константами:

$$a_1 a_1' / \psi = \text{const}, \quad a_1(a_1'a_2 + a_1a_2') / \psi = \text{const}, \quad a_1^2 \psi' / \psi^2 = \text{const}, \quad \psi^{\gamma-2} a_1^2 = \text{const}. \quad (5)$$

Система (5) является переопределенной и, вообще говоря, несовместной. Покажем, что она имеет решения при $a'_1 a'_2 = 0$. Более того, данное равенство справедливо для всех случаев, указанных в условии теоремы. Рассмотрим случаи $a'_1(t) = 0$ и $a'_2(t) = 0$.

Пусть $a'_1(t) = 0$, т. е. $a_1(t) = \text{const}$. Для определенности примем $a_1 = 1$. Тогда система (5) имеет вид

$$a'_2(t)/\psi(t) = \text{const}, \quad \psi'/\psi^2 = \text{const}, \quad \psi^{\gamma-2} = \text{const}.$$

Отсюда получаем:

а) a'_2, ψ — константы;

б) $\gamma = 2, a_2(t) = c_3 \ln(c_1 t + c_2), \psi = c_1/(c_1 t + c_2)$.

В случае “а” для удобства примем $\psi = 1$ и положим $a'_2 = a$. Получаем решение $u = p(x + at), v = q(x + at)$, где функции $p(z), q(z)$ удовлетворяют системе

$$pp'' + (p')^2/\sigma - ap' + Aq^\alpha p^{\gamma-\alpha} = 0, \quad qq'' + (q')^2/\delta - aq' + Bp^\beta q^{\gamma-\beta} = 0. \quad (6)$$

Нетривиальное решение системы (6), удовлетворяющее (4), определяет диффузионную волну с фронтом $z = c_1 t + c_2$, где $c_1 = -a; c_2$ — произвольная константа (случай 1).

В случае “б” имеем решение

$$u = \frac{c_1}{c_1 t + c_2} p(x - c_3 \ln(c_1 t + c_2)), \quad v = \frac{c_1}{c_1 t + c_2} q(x - c_3 \ln(c_1 t + c_2)), \quad (7)$$

где функции $p(z), q(z)$ удовлетворяют системе

$$pp'' + (p')^2/\sigma + c_3 p' + p + Aq^\alpha p^{2-\alpha} = 0, \quad qq'' + (q')^2/\delta + c_3 q' + q + Bp^\beta q^{2-\beta} = 0.$$

Нетривиальное решение вида (7) при выполнении условия (4) является диффузионной волной с фронтом $x = c_3 \ln(c_1 t + c_2)$ (случай 2).

Пусть $a'_2(t) = 0$, т. е. $a_2(t) = \text{const}$. Для определенности примем $a_2 = -1$, что позволяет, как и в случае 1, в качестве условия на фронте диффузионной волны рассмотреть (4). Тогда система (5) принимает вид

$$a_1 a'_1/\psi = \text{const}, \quad a_1^2 \psi'/\psi^2 = \text{const}, \quad \psi^{\gamma-2} a_1^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Из второго и третьего уравнений (8) получаем $\psi'/\psi^\gamma = \text{const}$. Имеют место два случая: а) $\gamma = 1$; б) $\gamma \neq 1$.

При $\gamma = 1$ имеем $a'(t)/a_1(t) = \text{const}$, а значит, $a_1(t) = c_2 e^{c_1 t}$, и получаем решение

$$u = c_1 c_2^2 e^{2c_1 t} p\left(\frac{x}{c_2 e^{c_1 t}} - 1\right), \quad v = c_1 c_2^2 e^{2c_1 t} q\left(\frac{x}{c_2 e^{c_1 t}} - 1\right), \quad (9)$$

где функции $p(z), q(z)$ удовлетворяют системе

$$pp'' + (p')^2/\sigma + (z + 1)p' - 2p + A_2 q^\alpha p^{1-\alpha} = 0, \\ qq'' + (q')^2/\delta + (z + 1)q' - 2q + B_2 p^\beta q^{1-\beta} = 0,$$

$A_2 = A/c_1; B_2 = B/c_1$. Нетривиальное решение вида (9) при выполнении условия (4) является диффузионной волной с фронтом $x = c_2 e^{c_1 t}$ (случай 3).

При $\gamma \neq 1, \gamma \neq 2$ имеем $\psi(t) = (c_* t + d_*)^{1/(1-\gamma)}$, где $c_* > 0, d_*$ — константы. Отсюда получаем $a_1(t) = (c_1 t + c_2)^{(\gamma-2)/(2\gamma-2)}$, и решение принимает вид

$$u = \frac{c_1(\gamma - 2)}{2\gamma - 2} (c_1 t + c_2)^{1/(1-\gamma)} p\left(\frac{x}{(c_1 t + c_2)^{(\gamma-2)/(2\gamma-2)}} - 1\right), \\ v = \frac{c_1(\gamma - 2)}{2\gamma - 2} (c_1 t + c_2)^{1/(1-\gamma)} q\left(\frac{x}{(c_1 t + c_2)^{(\gamma-2)/(2\gamma-2)}} - 1\right), \quad (10)$$

где функции $p(z)$, $q(z)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} pp'' + \frac{1}{\sigma} (p')^2 + (z+1)p' - \frac{2}{2-\gamma} p + A_3 q^\alpha p^{\gamma-\alpha} &= 0, \\ qq'' + \frac{1}{\delta} (q')^2 + (z+1)q' - \frac{2}{2-\gamma} q + B_3 p^\beta q^{\gamma-\beta} &= 0, \end{aligned}$$

$A_3 = A[(\gamma-2)/(2\gamma-2)c_1]^{\gamma-2}$; $B_3 = B[(\gamma-2)/(2\gamma-2)c_1]^{\gamma-2}$. Нетривиальное решение (10) при выполнении условия (4) является диффузионной волной с фронтом $x = (c_1 t + c_2)^{(\gamma-2)/(2\gamma-2)}$ (случай 4). Теорема доказана.

3. Об аналитической разрешимости задачи Коши. Рассмотрим вопрос о существовании нетривиальных решений СОДУ, полученных в ходе доказательства теоремы и удовлетворяющих условию (4) (существование соответствующих тривиальных решений очевидно). В общем виде данные системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} pp'' + (p')^2/\sigma + (\mu_1 z + \mu_2)p' + \mu_3 p + Aq^\alpha p^{\gamma-\alpha} &= 0, \\ qq'' + (q')^2/\delta + (\mu_1 z + \mu_2)q' + \mu_3 q + Bp^\beta q^{\gamma-\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для получения условий Коши в левых частях уравнений необходимо положить $z = p = q = 0$ (см. (4)). Получаем систему квадратных уравнений

$$[p'(0)]^2 + \sigma\mu_2 p'(0) = 0, \quad [q'(0)]^2 + \delta\mu_2 q'(0) = 0,$$

которая имеет четыре корня: 1) $p'(0) = 0$, $q'(0) = 0$; 2) $p'(0) = 0$, $q'(0) = -\mu_2\delta$; 3) $p'(0) = -\mu_2\sigma$, $q'(0) = 0$; 4) $p'(0) = -\mu_2\sigma$, $q'(0) = -\mu_2\delta$. Следует отметить, что, поскольку при выполнении (4) система (11) имеет особенность перед старшими производными, для всех других значений $q'(0)$, $p'(0)$ ЗК является несовместной.

Первый из полученных корней приводит в тривиальному решению $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, что нетрудно показать, последовательно дифференцируя уравнения системы (11) по z и полагая $z = 0$. Все полученные значения производных оказываются равными нулю.

Второй и третий корни не рассматриваем, поскольку с физической точки зрения эти случаи не вполне естественны: в них для одной из искомым величин поток на фронте диффузионной волны нулевой, а для второй — ненулевой. Кроме того, выше показано, что для подобных условий Коши у системы (11) может существовать решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только при $z = 0$ (см. [8]). Поэтому рассмотрим более подробно четвертый корень, т. е. условия Коши вида

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad p'(0) = -\mu_2\sigma, \quad q'(0) = -\mu_2\delta. \quad (12)$$

Решение задачи (11), (12) является нетривиальным (если оно существует). При $\gamma \in \mathbb{N}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup 0$ существование и единственность такого решения следует из ранее доказанной теоремы [8], причем соответствующие анзацы при $\alpha = \beta = 0$ были построены в виде степенных рядов. Вопрос о разрешимости задачи (11), (12) при нецелых α , β , γ пока не решен.

4. Алгоритм численного решения. Аналитическое решение задачи (1), (3) в виде ряда, описанное в работе [8], имеет ограниченную область применимости, поскольку радиус сходимости ряда в общем случае не известен. Вследствие этого актуальной является задача построения приближенных решений на заданном промежутке времени. При этом отрезки аналитических решений, а особенно описанные выше точные решения, необходимы для тестирования приближенных решений. В работах [5, 7] построены численно-аналитические алгоритмы решения нелинейных параболических уравнений, близких к составляющим систему (1). При этом использовался пошаговый метод решения, основанный

на итерационном методе граничных элементов (МГЭ) с разностной аппроксимацией по времени. Для сведения решения неоднородных задач к расчетам на границе применялся метод двойственной взаимности [5], предполагающий разложение неоднородности по системе радиальных базисных функций (РБФ). Именно аппроксимация РБФ позволяет построить итерационные процедуры, сходящиеся в широком диапазоне значений параметров задачи, в том числе для нелинейных вырождающихся уравнений с источником и конвективным членом. В последнее время РБФ широко используются для решения дифференциальных уравнений и систем [10]. Эффективность таких подходов подтверждается многими исследователями. В частности, в работах [11, 12] системы вида (1) решаются с помощью РБФ-аппроксимации и метода конечных разностей.

Применять МГЭ для решения каждого уравнения системы не всегда рационально. Поэтому будем использовать метод коллокаций на основе РБФ-аппроксимации. При этом пошаговая процедура решения с разностной аппроксимацией по времени имеет ряд общих особенностей с решением МГЭ. Заметим, что методы решения, предложенные в [11, 12], аналогичны рассматриваемым, однако способы дискретизации и построения решений существенно различаются.

Опишем алгоритм решения. Представим задачу (1), (3) в произвольный момент времени $t > 0$ в виде задачи для системы двух уравнений Пуассона

$$u_{xx} = \frac{1}{u} \left[u_t - \frac{1}{\sigma} u_x^2 - F(u, v) \right], \quad v_{xx} = \frac{1}{v} \left[v_t - \frac{1}{\delta} v_x^2 - G(u, v) \right]; \quad (13)$$

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad u_x|_{x=a(t)} = -\sigma a'(t), \quad v|_{x=a(t)} = 0, \quad v_x|_{x=a(t)} = -\delta a'(t). \quad (14)$$

Условия для производных в (14) следуют из (3). Уравнения (13) фактически образуют ЗК для СОДУ, для решения которых также используются РБФ [13].

Решение будем строить с шагом по времени h . Представим при $t = t_k = kh$ решение задачи (1), (3) в следующем виде:

$$u(t_k, x) = U(x) + U_p(x), \quad v(t_k, x) = V(x) + V_p(x).$$

Здесь $(U_p(x), V_p(x))$ — частное решение системы (13) в момент $t = t_k$; $(U(x), V(x))$ — решение ЗК для однородной системы:

$$\begin{aligned} U'' = 0, \quad U|_{x=L} = -U_p(L), \quad U'|_{x=L} = -\sigma a'(t_k) - U'_p(L), \\ V'' = 0, \quad V|_{x=L} = -V_p(L), \quad V'|_{x=L} = -\delta a'(t_k) - V'_p(L), \end{aligned} \quad (15)$$

$L = a(t_k)$. Решение строится на отрезке $x \in [a(0), L]$. Очевидно, что при найденном частном решении решение задачи (15) определяется однозначно.

В большинстве работ, в которых используются РБФ, разлагаются искомые функции, а коэффициенты разложений определяются с учетом условия удовлетворения уравнениям во внутренних точках коллокации и граничным условиям в граничных точках коллокации. Строить частные решения будем с использованием разложения неоднородностей уравнений (13), а выполнять граничные условия — с помощью решения задачи (15). Аналогичный подход описан для случая использования МГЭ в работе [14].

Частное решение системы (13) будем строить итерационно, при нулевых начальных приближениях $(U_p^{(0)} \equiv 0, V_p^{(0)} \equiv 0)$. На очередной, $(n + 1)$ -й, итерации разложим правые части уравнений (13) для n -й итерации по РБФ:

$$\frac{1}{u^{(n)}} \left[u_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma} (u_x^{(n)})^2 - F(u^{(n)}, v^{(n)}) \right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n+1)} f_i(x); \quad (16)$$

$$\frac{1}{v^{(n)}} \left[v_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma} (v_x^{(n)})^2 - G(u^{(n)}, v^{(n)}) \right] = \sum_{i=1}^m \beta_i^{(n+1)} f_i(x), \quad (17)$$

где $u^{(n)} = U^{(n)} + U_p^{(n)}$; $U^{(n)} = -(\sigma a'(t_k) + U_p^{(n)'}(L))x - U_p^{(n)}(L)$; $v^{(n)} = V^{(n)} + V_p^{(n)}$; $V^{(n)} = -(\delta a'(t_k) + V_p^{(n)'}(L))x - V_p^{(n)}(L)$; $f_i(x) = f_i(|x - x_i|)$ — РБФ, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации x_1, x_2, \dots, x_m , лежащими на отрезке $[0, L]$; для каждой функции $f_i(x)$ существует функция \hat{u}_i , такая что $f_i = \partial^2 \hat{u}_i / \partial x^2$. Коэффициенты $\alpha_i^{(n+1)}$, $\beta_i^{(n+1)}$, $i = 1, \dots, m$ определяются из систем линейных алгебраических уравнений, получаемых из равенств (16), (17), записанных в точках коллокации. Производные по времени вычисляются с помощью метода конечных разностей. Найденные коэффициенты определяют $(n+1)$ -ю итерацию частного решения:

$$U_p^{(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n+1)} \hat{u}_i(x), \quad V_p^{(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i^{(n+1)} \hat{u}_i(x).$$

Итерационный процесс останавливается, когда выполнены условия $|U_p^{(n+1)} - U_p^{(n)}| / |U_p^{(n+1)}| < \varepsilon$, $|V_p^{(n+1)} - V_p^{(n)}| / |V_p^{(n+1)}| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — заданное число). Тогда в качестве решения задачи (1), (3) в момент $t = t_k$ принимаются функции $u(t_k, x) = u^{(n+1)}(x)$, $v(t_k, x) = v^{(n+1)}(x)$, непрерывные по x .

5. О численном решении задачи Коши. Найти решение ЗК (11), (12) в конечной форме удается редко, поэтому разработка методов ее приближенного решения с достаточной точностью является актуальным направлением исследований. Задача (11), (12) аналогична решаемой в п. 4 на каждом шаге задачей (13), (14), и ее можно решить на заданном отрезке $z \in [z_1, z_2]$ с помощью описанной в п. 4 итерационной процедуры. Для этого систему (11) нужно представить в виде

$$\begin{aligned} p'' &= -p^{-1}[(p')^2/\sigma + (\mu_1 z + \mu_2)p' + \mu_3 p + Aq^\alpha p^{\gamma-\alpha}], \\ q'' &= -q^{-1}[(q')^2/\delta + (\mu_1 z + \mu_2)q' + \mu_3 q + Bp^\beta q^{\gamma-\beta}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Область решения $[z_1, z_2]$ определяется видом точного решения (случаем из теоремы) и интервалом времени, на котором необходимо решить задачу (2), (3).

6. Численный анализ и оценка точности решений. Точные решения задачи (2), (3), построенные с помощью задачи (11), (12), могут быть использованы для тестирования численных решений, полученных с помощью предложенного пошагового алгоритма. Для корректности такой верификации необходимо показать, что задача (11), (12) решается достаточно точно. Далее исследуем вид решений этой задачи для всех четырех случаев, рассмотренных в теореме, а также оценим их точность.

1. $\gamma = 1$, $a(t) = c_2 e^{c_1 t}$. Из уравнений (9) следует, что для решения задачи (2), (3) на интервале $t \in [0, T]$ необходимо решить соответствующую задачу (11), (12) на отрезке $z \in [e^{-c_1 T} - 1, 0]$. Для того чтобы получить решение для любого момента времени, требуется решить задачу (11), (12) на интервале $z \in (-1, 0]$.

Рассмотрим случай, когда точное решение существует в конечном виде. Пусть в задаче (11), (12) $a(t) = e^t$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\sigma = \delta$, $A = B = 1$. Тогда имеем точное решение [8]

$$p(z) = q(z) = -\sigma z. \quad (19)$$

Несложно показать, что предложенный численный алгоритм уже на первой итерации приводит к решению (19). Это свидетельствует о корректности метода. Заметим, что в случае $\sigma = \delta$ и $A = B$ при любых допустимых значениях α и β $p(z) = q(z)$, причем при $A = B = 1$

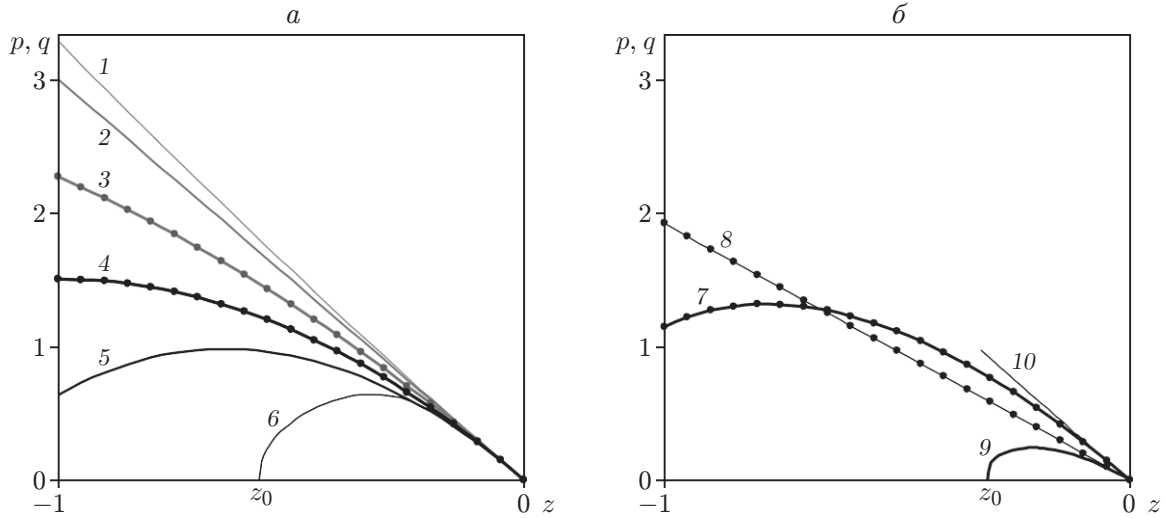


Рис. 1. Решения задачи (11), (12) при $a(t) = e^t$, $c_1 = c_2 = 1$, $\alpha = \beta = 1$ и различных значениях σ, δ, A, B :
 а — $p(z) = q(z)$, $\sigma = \delta = 3$, б — $p(z) \neq q(z)$; 1 — $A = B = 0,2$, 2 — $A = B = 1$, 3 — $A = B = 3$, 4 — $A = B = 5$, 5 — $A = B = 7$, 6 — $A = B = 10$, 7 — $\sigma = 3, \delta = 2, A = 7, B = 1$, 8 — $\sigma = 3, \delta = 2, A = 7, B = 1$, 9 — $\sigma = 2, \delta = 3, A = 7, B = 1$, 10 — $\sigma = 2, \delta = 3, A = 7, B = 1$; 7, 9 — $p(z)$, 8, 10 — $q(z)$

получаем решение (19). Вид решения определяется значениями параметров σ, δ, A, B . На рис. 1 показаны найденные функции при $c_1 = c_2 = 1, \alpha = \beta = 1$ и различных значениях остальных параметров. На рис. 1,а приведены случаи, когда $p(z) = q(z)$ при различных значениях параметра $A = B$, на рис. 1,б представлена зависимость характера решения от значений σ и δ : при $\sigma = 3, \delta = 2$ решение существует на всем отрезке $z \in [-1, 0]$, а при $\sigma = 2, \delta = 3$ функция $p(z)$ обращается в нуль при $z = z_0 = -0,32$. Таким образом, результаты расчетов показывают, что решение может существовать не на всем интервале $z \in (-1, 0]$, а лишь при $z \in [z_0, 0]$, $z_0 > -1$, причем либо $p(z_0) = 0, \lim_{z \rightarrow z_0} p(z) = \infty, q(z_0) \geq 0$, либо $q(z_0) = 0, \lim_{z \rightarrow z_0} q(z) = \infty, p(z_0) \geq 0$. Это означает, что диффузионную волну для исходной постановки задачи можно построить только до момента $T = -1/c_1 \ln(1 + z_0)$, определяемого параметрами задачи. Аналогичный характер имеют некоторые точные решения параболических уравнений, подобных входящим в систему (11) [7], что подтверждено результатами качественного анализа решений и данными расчетов. Также были получены оценки для значения z_0 и точки максимума решения. Подобный анализ для случая систем требует отдельного исследования.

Оценим точность численных решений задачи (11), (12). В качестве оценки точности примем наибольшую из невязок уравнений системы (11) на отрезке $[-1, 0]$ при подстановке этих решений. В табл. 1 приведены значения невязок при различных значениях параметров задачи и числа точек коллокации m . В качестве РБФ приняты функции $f_i(x) = |x - x_i|$. Точки коллокации располагались на отрезке равномерно с шагом $l = 1/(m - 1)$. Точка с координатой $z = 0$, в которой правые части уравнений (18) не определены, была сдвинута внутрь отрезка на $0,1l$. При этом точность при $z = 0$ была не меньше, чем на всем отрезке. Результаты расчетов показали сходимость численных решений относительно числа точек коллокации, а также близость порядков невязок при различных наборах параметров. Заметим, что в случае, соответствующем последней строке табл. 1, невязка при $m = 201$ равна $3,5 \cdot 10^{-6}$ (отсутствует в табл. 1), т. е. требуемая точность достигается путем увеличения числа точек коллокации.

Таблица 1

Невязки уравнений системы (11) при $a(t) = e^t$

σ	δ	α	β	A	B	Невязка		
						$m = 26$	$m = 51$	$m = 101$
3	3	1,0	1,0	0,2	0,2	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
3	3	1,0	1,0	2,0	2,0	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
3	3	1,0	1,0	5,0	5,0	$9,7 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-6}$
3	3	0,5	1,0	0,5	1,0	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$6,7 \cdot 10^{-7}$
3	3	1,0	0,5	0,5	1,0	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$7,0 \cdot 10^{-7}$
3	3	0,5	1,0	2,0	1,0	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$6,4 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$
3	3	1,0	0,5	2,0	1,0	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$7,1 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$
3	2	0,5	1,0	0,5	1,0	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
3	2	1,0	0,5	0,5	1,0	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$9,2 \cdot 10^{-7}$
3	2	0,5	1,0	2,0	1,0	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$	$8,5 \cdot 10^{-7}$
3	2	1,0	0,5	2,0	1,0	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-7}$
2	3	0,5	1,0	0,5	1,0	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$
2	3	1,0	0,5	0,5	1,0	$4,7 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-7}$
2	3	0,5	1,0	2,0	1,0	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$
2	3	1,0	0,5	2,0	1,0	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$

2. $\gamma > 0$, $a(t) = c_1 t + c_2$. В этом случае имеем решение типа бегущей волны. Для построения решения задачи (2), (3) на интервале $t \in [0, T]$ необходимо решить задачу (11), (12) на отрезке $z \in [c_2 - c_1 T, c_2]$. Не уменьшая общности, положим $c_2 = 0$. Рассмотрим сколь угодно большой интервал времени невозможно, поскольку решение задачи (11), (12) существует лишь на отрезке $z \in [z_0, 0]$. Положение точки $z = z_0$, где по крайней мере одна из функций $p(z)$, $q(z)$ обращается в нуль, зависит от числовых параметров системы (11). Решение задачи (2), (3) можно построить до момента $T = -z_0/c_1$. По решениям при двух наборах параметров, показанным на рис. 2, можно судить о влиянии значений параметров A и B : при $A = 2$, $B = 1$ в точке $z = z_0 = -1,61$ в нуль обращается функция $p(z)$, а при

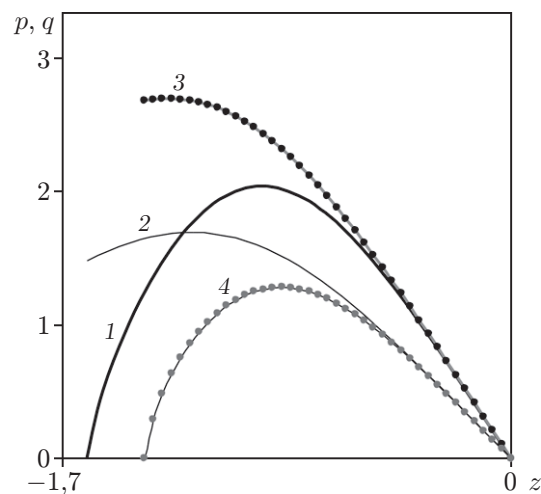


Рис. 2. Решения задачи (11), (12) при $a(t) = t$, $\sigma = 3$, $\delta = 2$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$:

1, 3 — $p(z)$, 2, 4 — $q(z)$; 1 — $A = 2$, $B = 1$, 2 — $A = 2$, $B = 1$, 3 — $A = 1$, $B = 2$, 4 — $A = 1$, $B = 2$

Таблица 2
Невязки уравнений системы (11) при $a(t) = t, B = 1$

σ	δ	α	β	γ	A	Невязка		
						$m = 26$	$m = 51$	$m = 101$
3	3	1,0	1,0	1	0,5	$4,0 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	$2,6 \cdot 10^{-6}$
3	3	1,0	1,0	1	1,0	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$6,4 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$
3	3	1,0	1,0	1	2,0	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$
3	2	0,5	1,0	1	2,0	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
2	3	1,0	0,5	1	0,5	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
3	3	1,0	1,0	2	0,5	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$
3	3	1,0	1,0	2	1,0	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$
3	3	1,0	1,0	2	2,0	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
3	2	0,5	1,0	2	2,0	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$
2	3	1,0	0,5	2	0,5	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$
2	2	1,0	1,0	3	0,5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$
2	2	1,0	1,0	3	1,0	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$
2	2	1,0	1,0	3	2,0	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-4}$
2	3	0,5	1,0	3	2,0	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$
3	2	1,0	0,5	3	0,5	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$

$A = 1, B = 2$ в точке $z = z_0 = -1,39$ — функция $q(z)$. Во всех расчетах $c_1 = 1$. Точность решений оценим с помощью невязок уравнений (11) для решений на отрезке $z \in [-1, 0]$. Приведенные в табл. 2 результаты расчетов также показывают сходимость относительно числа точек коллокации. При этом невязки в среднем на один-два порядка больше, чем в случае 1 (см. табл. 1), т. е. для получения решения с заданной точностью в данном случае требуется большее количество точек коллокации, чем при $a(t) = c_2 e^{c_1 t}$.

3. $\gamma = 2, a(t) = c_3 \ln(c_1 t + c_2)$. В этом случае также строится решение типа бегущей волны. Для решения задачи (2), (3) на интервале $t \in [0, T]$ необходимо решить задачу (11), (12) на отрезке $z \in [c_3 \ln(c_2/(c_1 T + c_2)), 0]$. Решение вновь не может быть построено для произвольного значения T , поскольку функции, удовлетворяющие задаче (11), (12), вообще говоря, не монотонны. Численный анализ показывает, что решение существует на конечном промежутке $z \in [z_0, 0]$ и задачу (2), (3) можно решить только до момента $T = (c_2 e^{-z_0/c_3} - c_2)/c_1$. На рис. 3 представлены решения, описывающие зависимость величины z_0 от A и B . В обоих случаях $q(z_0) = 0$; при $A = 1, B = 2$ $z_0 = -1,4$ и функция $p(z)$ монотонна, тогда как при $A = 2, B = 1$ $z_0 = -1,91$ и функция $p(z)$ имеет максимум. Заметим, что порядок невязок уравнений (11) для решений на отрезке $z \in [-1, 0]$ близок к порядку невязок в случае 2 (см. табл. 2).

4. $\gamma \neq 1, \gamma \neq 2, a(t) = (c_1 t + c_2)^\omega, \omega = (\gamma - 2)/(2\gamma - 2)$. В случае степенной функции $a(t)$ для решения задачи (2), (3) на интервале $t \in [0, T]$ необходимо решить задачу (11), (12) на отрезке $z \in [(c_2/(c_1 t + c_2))^\omega - 1, 0]$. Для построения решения для любого момента времени задачу (11), (12) нужно решить на интервале $z \in (-1, 0]$. Однако не всегда решение существует на всем интервале. Как и для показательной функции $a(t)$, в ряде случаев задачу можно решить только на отрезке $z \in [z_0, 0], z_0 > -1$. Тогда задача (2), (3) может быть решена только до момента $T = (c_2(z_0 + 1)^{-1/\omega} - c_2)/c_1$. Решения для двух случаев приведены на рис. 4. При $\gamma = 0,5$, как и во всем интервале $\gamma \in (0, 1)$, решение существует на отрезке $z \in [-1, 0]$. При $\gamma > 2$ решение существует не всегда, например, в рассмотренном случае при $\gamma = 2,5$ $z_0 = -0,93$. Невязки уравнений имеют тот же порядок, что и в случаях 2, 3.

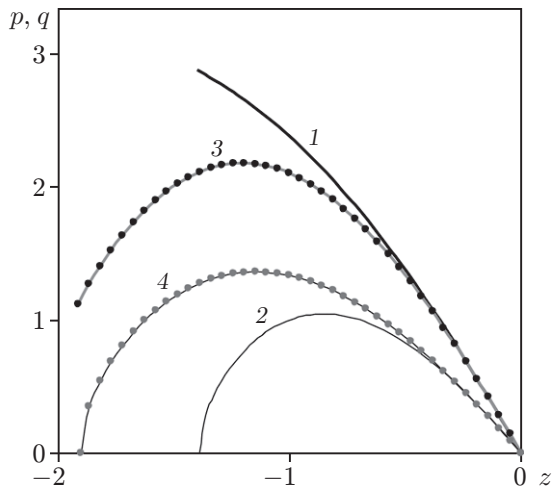


Рис. 3

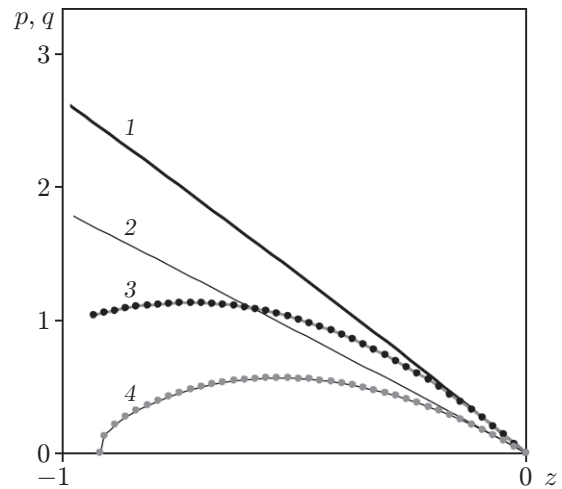


Рис. 4

Рис. 3. Решения задачи (11), (12) при $a(t) = \ln(t+1)$, $\sigma = 3$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$:
1, 3 — $p(z)$, 2, 4 — $q(z)$; 1 — $A = 1$, $B = 2$, 2 — $A = 1$, $B = 2$, 3 — $A = 2$, $B = 1$, 4 — $A = 2$,
 $B = 1$

Рис. 4. Решения задачи (11), (12) при $a(t) = t^{(\gamma-2)/(2\gamma-2)}$, $\sigma = 3$, $\delta = 2$, $A = 2$, $B = 1$:
1, 3 — $p(z)$, 2, 4 — $q(z)$; 1 — $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,5$, 2 — $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,5$, 3 —
 $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 2,5$, 4 — $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 2,5$

В целом проведенный вычислительный эксперимент показал достаточную точность предложенного метода решения ЗК для СОДУ во всех описанных в теореме случаях. Таким образом, построенные с его помощью решения задачи (2), (3) можно принять в качестве эталонных для верификации решений другими методами. Кроме того, численный анализ решений СОДУ показал, что решения могут быть монотонными и немонотонными, соответствовать любому моменту времени или существовать лишь для конечного интервала.

7. Оценка точности пошагового алгоритма решения задачи (2), (3). Протестируем пошаговые численные решения задачи (2), (3) путем сравнения с точными решениями. Рассмотрим случай, когда решение ЗК (11), (12) дает наименьшую невязку уравнений (11) (см. табл. 1): $a(t) = e^t$, $\sigma = 2$, $\delta = 3$, $A = 0,5$, $B = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$. На рис. 5 приведены пошаговые решения задачи (2), (3) при $m = 26$ и различных шагах h , а также точное решение (9). Видно, что численные решения сходятся к точному с уменьшением шага по времени. Таким образом, на каждом шаге по времени получаем непрерывное по x решение, достаточно точное даже при небольшом числе точек коллокации.

Заключение. В работе исследована проблема построения решений параболической нелинейной системы типа реакция — диффузия при заданном фронте диффузионной волны, на котором система вырождается. Получен новый класс точных решений искомого вида, построение которых сводится к интегрированию ЗК для СОДУ, имеющей особенность в исходной постановке. Также предложен численный метод построения приближенных решений с использованием разложений по системе радиальных базисных функций. Проведены оценка точности и численный анализ решений СОДУ, позволивший сделать выводы о свойствах последних. Поскольку доказать какие-либо строгие математические утверждения о сходимости разработанных вычислительных алгоритмов не удалось, большое значение приобретает проблема верификации результатов расчетов, которая была решена за счет использования построенных точных решений. Дальнейшие исследования

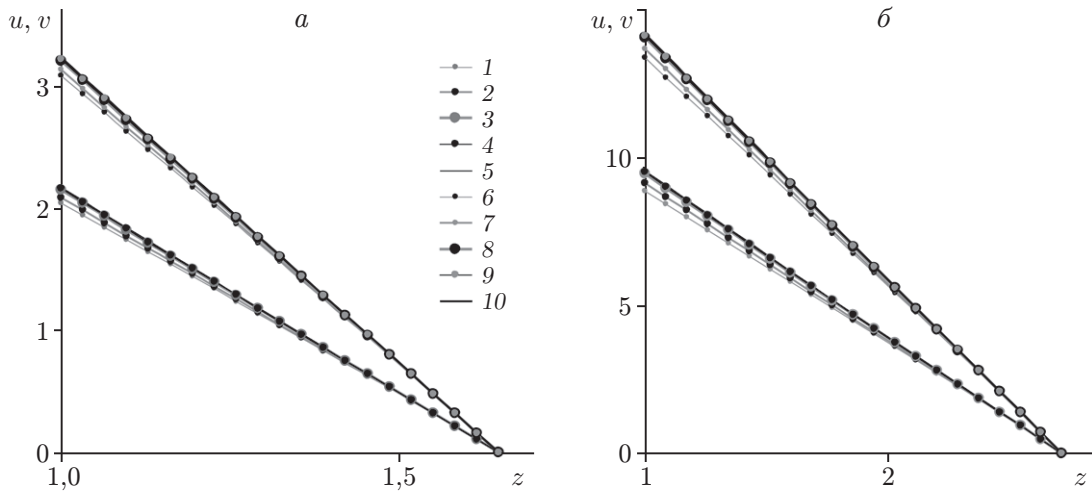


Рис. 5. Решения задачи (2), (3) (1–4, 6–9) и точное решение (9) (5, 10) при $a(t) = e^t$ и различных значениях параметров t, h :
 a — $t = 0,5$, b — $t = 1$; 1–5 — $u(t, x)$, 6–10 — $v(t, x)$; 1, 6 — $h = 0,1$, 2, 7 — $h = 0,05$,
 3, 8 — $h = 0,01$, 4, 9 — $h = 0,005$

в данном направлении могут быть связаны с доказательством разрешимости СОДУ в более широком диапазоне значений параметров, качественным анализом СОДУ, а также с рассмотрением системы типа реакция — диффузия более общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kumar N., Horsthemke W.** Turing bifurcation in a reaction-diffusion system with density-dependent dispersal // *Physica A*. 2010. V. 389. P. 1812–1818.
2. **Cantrell R. S.** Spatial ecology via reaction-diffusion equations / R. S. Cantrell, C. Cosner. Chichester: Wiley, 2003.
3. **Cosner C.** Reaction-diffusion equations and ecological modeling // *Tutorials Math. Biosci.* IV. 2008. P. 77–115. (Lecture notes in mathematics; V. 1922).
4. **Сидоров А. Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
5. **Spevak L. F., Nefedova O. A.** Solving a two-dimensional nonlinear heat conduction equation with degeneration by the boundary element method with the application of the dual reciprocity method // *AIP Conf. Proc.* 2016. V. 1785. 040077.
6. **Казаков А. Л.** О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2019. Т. 16. С. 1057–1068.
7. **Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.** О точных и приближенных решениях задачи с особенностью для уравнения конвекции-диффузии // *ПМТФ*. 2021. Т. 62, № 1. С. 22–31.
8. **Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A.** Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // *Symmetry*. 2020. V. 12. 999.
9. **Полянин А. Д.** Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. М.: Юрайт, 2017.
10. **Fornberg B., Flyer N.** Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numerica*. 2015. V. 24. P. 215–258.
11. **Ardabili P. R.** A numerical investigation of a reaction-diffusion equation arises from an ecological phenomenon // *Comput. Methods Different. Equat.* 2018. V. 6, N 1. P. 98–110.

12. **Toubaei S., Garshasbi M., Jalalvand M.** A numerical treatment of a reaction-diffusion model of spatial pattern in the embryo // *Comput. Methods Different. Equat.* 2016. V. 4, N 2. P. 116–127.
13. **Dehghan M., Nikpour A.** Numerical solution of the system of second-order boundary value problems using the local radial basis functions based differential quadrature collocation method // *Appl. Math. Modell.* 2013. V. 37. P. 8578–8599.
14. **Golberg M. A.** Numerical evaluation of particular solutions in the BEM — a review // *Boundary Element Comm.* 1995. V. 6. P. 99–106.

*Поступила в редакцию 11/V 2021 г.,
после доработки — 11/V 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.*
