

**СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ НЕЛИНЕЙНОГО  
НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА**

**С. И. Мешков**

(Москва)

Рассматриваются установившиеся вынужденные колебания одномассовой системы, совершающей движение под действием внешней моногармонической силы. Роль восстанавливающей силы играет нелинейная функция, учитывающая эффекты наследственности в виде суммы кратных интегралов по теории Вольтерра. Задача решается методом эквивалентной линеаризации и ограничивается учетом трехкратного интеграла наследственного типа. Исследовано влияние наследственной нелинейности на динамические характеристики системы: амплитуду, фазу, динамическую жесткость, площадь петли гистерезиса и добротность. В частности, установлено, что величина, обратная добротности, принимаемая в качестве меры внутреннего трения, не зависит от амплитуды колебаний и совпадает с результатом линейной теории. Другие динамические характеристики оказываются чувствительными к нелинейным свойствам данной системы. В качестве конкретных наследственных функций выбраны дробно-экспоненциальные функции, предложенные Ю. Н. Работновым.

1. Для многих физических явлений связь между возбуждениями  $y(t)$  и откликами  $x(t)$  определяется соотношениями наследственного типа, т. е. отклик системы в данный момент времени  $t$  учитывает возбуждение не только в данный момент, а также и всю предысторию возбуждения во времени. Нелинейные уравнения, связывающие между собой возбуждения и отклики, которые рассматривались еще Вольтерром [1], для системы инвариантной по отношению к изменению начала отсчета времени, можно записать в виде [2]

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} f_m(t_1, t_2, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m y(t-t_i) dt_i \quad (1.1)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n x(t-t_j) dt_j \quad (1.2)$$

Здесь функции  $f_m(t_1, t_2, \dots, t_m)$  учитывают эффекты последствия (ретардации)  $m$ -го порядка, а их соответствующие резольвенты  $g_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$  учитывают эффекты релаксации  $n$ -го порядка; при  $m = n = 1$  из соотношений (1.1) и (1.2) получаются линейные наследственные уравнения Больцмана. Нижний предел интегрирования равен нулю согласно принципу причинности, так как отклик  $x(t)$  не может предшествовать возбуждению  $y(t)$ .

В силу соотношений (1.1) и (1.2) между функциями  $f_m(t_1, t_2, \dots, t_m)$  и  $g_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$  существует связь, которую удобно записать в пространстве Фурье. В самом деле, подвергая соотношения (1.1) и (1.2) преобразованию Фурье, получаем

$$X(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} F_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \delta\left(-\omega + \sum_{i=1}^m \omega_i\right) \prod_{k=1}^m Y(\omega_k) d\omega_k \quad (1.3)$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} G_n(\omega_1', \dots, \omega_n') \delta\left(-\omega + \sum_{j=1}^n \omega_j'\right) \prod_{l=1}^n X(\omega_l') d\omega_l' \quad (1.4)$$

В формулах (1.3) и (1.4) большие буквы означают интегральные преобразования Фурье соответствующих величин

$$X(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad Y(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.5)$$

$$G_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = (2\pi)^{-1/2(n-1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \exp\left(-i \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu} t_{\nu}\right) g_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (1.6)$$

Для  $F_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  записывается формула, аналогичная (1.6). Подставляя (1.4) в (1.3), получаем

$$X(\omega) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} F_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \delta\left(-\omega + \sum_{i=1}^m \omega_i\right) \prod_{k=1}^m \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} G_n(\omega_1', \dots, \omega_n') \delta\left(-\omega_k + \sum_{j=1}^n \omega_j'\right) \prod_{l=1}^n X(\omega_l') d\omega_l' \right\} \quad (1.7)$$

Тождество (1.7) позволяет установить связь между функциями  $F_m$  и  $G_n$  для любых значений  $m$  и  $n$ . Для этого нужно расписать правую часть выражения (1.7), придавая индексам конкретные значения, и коэффициент перед линейным слагаемым  $X(\omega)$  положить равным единице, а каждое нелинейное слагаемое относительно  $X(\omega)$  обратить в нуль. В результате для каждого значения  $m$  и  $n$  получаются формулы обращения, которые ввиду их сложности обычно приводятся лишь для первых трех значений

$$F_1(\omega)G_1(\omega) = 1, \quad G_2(\omega_1, \omega_2) = -F_2(\omega_1, \omega_2)[F_1(\omega_1)F_2(\omega_2)F_1(\omega_1 + \omega_2)]^{-1}$$

$$G_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left[ \prod_{k=1}^3 F_1(\omega_k) F(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \right]^{-1} \left\{ -F_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \sum_{i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i} [F_1(\omega_j + \omega_k)]^{-1} F_2(\omega_j, \omega_k) F_2(\omega_i, \omega_j + \omega_k) \right\} \quad (1.8)$$

Таким образом, в зависимости от конкретной задачи можно пользоваться соотношением (1.1) или (1.2).

2. Рассмотрим стационарный режим одномерного осциллятора, совершающего свое движение под действием внешней моногармонической силы  $P \cos \omega t$ . Считая, что  $x(t)$  играет роль перемещения, а  $y(t)$  — восстанавливающей силы, получаем уравнение движения

$$Mx'' + y(x, x') = P \cos \omega t \quad (2.1)$$

Здесь  $M$  — масса, точка над буквой означает производную по времени.

Решение уравнения (2.1) находится методом эквивалентной линеаризации Крылова — Боголюбова [3]. В этом случае уравнение переписывается в виде

$$Mx'' + \omega^{-1}\eta x' + kx + \varepsilon(x, x') = P \cos \omega t \quad (2.2)$$

Здесь  $\varepsilon(x, x')$  означает погрешность, возникающую при замене нелинейной функции  $y(x, x')$  эквивалентной линейной вязко-упругой частью, т. е.

$$\varepsilon(x, x') = y(x, x') - kx - \omega^{-1}\eta x' \quad (2.3)$$

Стационарное решение уравнения (2.2) при  $\varepsilon(x, x') = 0$

$$x = A \cos \theta, \quad \theta = \omega t - \varphi \quad (2.4)$$

позволяет легко найти амплитуду  $A$  и тангенс угла сдвига фаз

$$A = P[\eta^2 + (k - M\omega^2)^2]^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \eta(k - M\omega^2)^{-1} \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $k$  и  $\eta$  определяются из условия минимальности ошибки  $\varepsilon(x, x')$ , которое записывается в виде двух равенств, осредненных по периоду колебаний  $T = 2\pi\omega^{-1}$  [4, 5]

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \eta} [\varepsilon(x, x')]^2 \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial k} [\varepsilon(x, x')]^2 \right\rangle = 0 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.3) в (2.6), получаем для  $\eta$  и  $k$  формулы, учитывающие нелинейные свойства системы

$$k = (\pi A)^{-1} \int_0^{2\pi} y(A, \theta) \cos \theta d\theta, \quad \eta = -(\pi A \omega)^{-1} \int_0^{2\pi} y(A, \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.7)$$

Величина  $k$  играет роль динамического модуля системы, а величина  $\eta$  пропорциональна площади петли гистерезиса. Нетрудно определить величину, обратную добротности системы  $Q^{-1}$ , принимаемую в качестве меры внутреннего трения

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} = \frac{P}{\pi k A^2} \int_0^T x^*(t) \cos \omega t dt = \frac{P \sin \varphi}{A k} = \frac{\eta}{k} \quad (2.8)$$

Заметим, что величина, обратная добротности  $Q^{-1}$ , совпадает с тангенсом угла сдвига фаз  $\operatorname{tg} \varphi$  в квазистатическом случае, т. е. при  $M = 0$ .

**3.** Метод расчета, изложенный в п. 2, можно применить к системе (1.2). Подстановка (1.2) в (2.7) с учетом (2.4) показывает, что коэффициенты  $k$  и  $\eta$  определяются только нечетными членами равенства (1.2). Ограничение тремя первыми членами в равенстве (1.2) приводит к следующим выражениям для  $k$  и  $\eta$ :

$$k = \operatorname{Re} G_1(\omega) + {}^{3/2}\pi A^2 \operatorname{Re} G_3(\omega, \omega, -\omega) \quad (3.1)$$

$$-\eta = \operatorname{Im} G_1(\omega) + {}^{3/2}\pi A^2 \operatorname{Im} G_3(\omega, \omega, -\omega) \quad (3.2)$$

Здесь  $\operatorname{Re} G_n$  и  $\operatorname{Im} G_n$  — соответственно действительные и мнимые части комплексной величины  $G_n$ , определяемой выражением (1.6). Амплитуда  $A$  как функция частоты и реологических параметров системы определяется из бикубического уравнения, которое получается после подстановки выражений (3.1) и (3.2) в первую формулу (2.5)

$$\begin{aligned} aA^6 + bA^4 + cA^2 + d &= 0 \quad (3.3) \\ a &= ({}^{3/2}\pi)^2 [(\operatorname{Re} G_3)^2 + (\operatorname{Im} G_3)^2], \quad c = (\operatorname{Im} G_1)^2 + [\operatorname{Re} G_1 - M\omega^2]^2 \\ b &= 3\pi [\operatorname{Re} G_1 \operatorname{Im} G_3 + \operatorname{Re} G_3 (\operatorname{Re} G_1 - M\omega^2)], \quad d = -P^2 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что коэффициент  $c$  равен квадрату обратной амплитуды линейного осциллятора, т. е. когда  $a = b = 0$  или  $\operatorname{Re} G_3 = \operatorname{Im} G_3 = 0$ . В этом случае динамические характеристики системы, а именно  $k$ ,  $\eta$ ,  $\operatorname{tg} \varphi$ ,  $Q^{-1}$ , определяются независимо от амплитуды. В нелинейном случае эти динамические характеристики определяются через амплитуду  $A$ , найденную из довольно сложного бикубического уравнения (3.3).

Решение задачи можно несколько упростить специальным выбором функций  $g_1(t_1)$  и  $g_2(t_1, t_2, t_3)$ , если положить [6, 7]

$$g_1(t_1) = g(t_1), \quad g(t_1, t_2, t_3) = g(t_1)g(t_2)g(t_3) \quad (3.4)$$

Тогда

$$\operatorname{Re} G_3 = (2\pi)^{-1} G_* \operatorname{Re} G, \quad \operatorname{Im} G_3 = (2\pi)^{-1} G_* \operatorname{Im} G, \quad G_* = (\operatorname{Re} G)^2 + (\operatorname{Im} G)^2 \quad (3.5)$$

$$a = (3/4)^2 G_*^3, \quad b = 3/2 G_* (G_* - M\omega^2 \operatorname{Re} G), \quad c = G_* - 2M\omega^2 \operatorname{Re} G + M^2 \omega^4 \quad (3.6)$$

$$k = (1 + 3/4 A^2 G_*) \operatorname{Re} G, \quad -\eta = (1 + 3/4 A^2 G_*) \operatorname{Im} G \quad (3.7)$$

Отсюда сразу следует, что внутреннее трение  $Q^{-1}$  не зависит от амплитуды колебаний. В самом деле, подставляя (3.7) в (2.8) получаем, что  $Q^{-1}$  определяется только первым слагаемым соотношения (2.1), т. е. совпадает с результатом линейной теории

$$Q^{-1} = -\operatorname{Im} G(\omega) [\operatorname{Re} G(\omega)]^{-1}, \quad \operatorname{Im} G(\omega) < 0 \quad (3.8)$$

4. Для исследования влияния нелинейности на амплитуду колебаний  $A$  и другие динамические характеристики зададим функцию  $g(t)$  в следующем виде:

$$g(t) = k_\infty [\delta(t) - \nu_\varepsilon \tau_\varepsilon^{-\gamma} \mathcal{D}_\gamma(-1, t, \tau_\varepsilon)],$$

$$\mathcal{D}_\gamma(-1, t, \tau_\varepsilon) \equiv t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_\varepsilon)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (4.1)$$

Здесь  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака,  $\mathcal{D}_\gamma(-1, t, \tau_\varepsilon)$  — дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [8],  $\gamma \in (0, 1)$  — параметр дробности,  $\tau_\varepsilon$  — время релаксации,  $k_\infty$  и  $k_0$  — соответственно нерелаксированное и релаксированное значения упругого модуля,  $\nu_\varepsilon$ ,  $\nu_\sigma$  — дефекты модулей.

$$\nu_\varepsilon = (k_\infty - k_0) k_\infty^{-1}, \quad \nu_\sigma = (k_\infty - k_0) k_0^{-1}$$

Используя (4.1), нетрудно получить следующие выражения для действительной  $\operatorname{Re} G$  и мнимой  $\operatorname{Im} G$  частей функции  $G(\omega)$  в пространстве Фурье:

$$\operatorname{Re} G = k_\infty \left[ 1 - \nu_\varepsilon \frac{\kappa^{-\gamma} + \cos \psi}{\Omega(1, 1)} \right], \quad \operatorname{Im} G = -\nu_\varepsilon k_\infty \frac{\sin \psi}{\Omega(1, 1)} \quad (4.2)$$

$$\Omega(u, v) = u^2 \kappa^\gamma + v^2 \kappa^{-\gamma} + 2uv \cos \psi, \quad \kappa = \omega \tau_\varepsilon, \quad \psi = 1/2 \pi \gamma$$

Подставляя (4.2) в (3.5), (3.6) и (3.7), соответственно получаем

$$a = \frac{9}{16} \left[ \frac{\Omega(k_\infty, k_0)}{\Omega(1, 1)} \right]^3, \quad c = \frac{\Omega(k_\infty - M\omega^2, k_0 - M\omega^2)}{\Omega(1, 1)}$$

$$b = \frac{3}{2} \left[ \frac{\Omega(k_\infty, k_0)}{\Omega(1, 1)} \right]^2 \left\{ 1 - \frac{M\omega [k_\infty \kappa^\gamma + k_0 \kappa^{-\gamma} + (k_\infty + k_0) \cos \psi]}{\Omega(k_\infty, k_0)} \right\} \quad (4.3)$$

$$k = k_\infty \left[ 1 - \nu_\varepsilon \frac{\kappa^{-\gamma} + \cos \psi}{\Omega(1, 1)} \right] \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{A^2 \Omega(k_\infty, k_0)}{\Omega(1, 1)} \right]$$

$$\eta = (k_\infty - k_0) \frac{\sin \psi}{\Omega(1, 1)} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{A^2 \Omega(k_\infty, k_0)}{\Omega(1, 1)} \right] \quad (4.4)$$

В линейном случае поведение амплитуды  $A$ , равной корню квадратному из обратной величины коэффициента  $c$ , в зависимости от частоты  $\omega$  и реологических параметров исследовалось в работах [9, 10]. Для нелинейного случая во избежание громоздких вычислительных операций, связанных с нахождением корней бикубического уравнения (3.3), для выясне-

ния принципиальной картины поведения амплитуды  $A$  в зависимости от частоты  $\omega$  достаточно ограничиться исследованием амплитуд в двух предельных упругих случаях — релаксированном и нерелаксированном. Для этой цели в предположении, что при больших и малых частотах амплитуда  $A$  меняется достаточно медленно, выпишем асимптотические формулы для величин  $k$  и  $\eta$  соответственно при  $\kappa \gg 1$  и  $\kappa \ll 1$ . При этом существенно различаются случаи  $\gamma \neq 1$  и  $\gamma = 1$

$$\begin{aligned} \gamma \neq 1, \kappa \gg 1, \quad k &\approx k_\infty [1 - \nu_\varepsilon \kappa^{-\gamma} \cos \psi + 3/4 A^2 k_\infty^2 (1 - 3\nu_\varepsilon \kappa^{-\gamma} \cos \psi)] \\ \eta &\approx (k_\infty - k_0) (1 + 3/4 A^2 k_\infty^2) \kappa^{-\gamma} \sin \psi \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \kappa \ll 1, \quad k &\approx k_0 [1 + \nu_\varepsilon \kappa^\gamma \cos \psi + 3/4 A^2 k_0^2 (1 + 3\nu_\varepsilon \kappa^\gamma \cos \psi)] \\ \eta &\approx (k_\infty - k_0) (1 + 3/4 A^2 k_0^2) \kappa^\gamma \sin \psi \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma = 1, \kappa \gg 1, \quad k &\approx k_\infty \{1 - \nu_\varepsilon \kappa^{-2} + 3/4 A^2 k_\infty^2 [1 - \nu_\varepsilon \kappa^{-2} (2 + k_0 k_\infty^{-1})]\} \\ \eta &\approx (k_\infty - k_0) (1 + 3/4 A^2 k_\infty^2) \kappa^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \kappa \ll 1, \quad k &\approx k_0 \{1 + \nu_\varepsilon \kappa^2 + 3/4 A^2 k_0^2 [1 + \nu_\varepsilon \kappa^2 (2 + k_\infty k_0^{-1})]\} \\ \eta &\approx (k_\infty - k_0) (1 + 3/4 A^2 k_0^2) \kappa \end{aligned} \quad (4.8)$$

Выбирая предельные значения  $k$  и  $\eta$  из формул (4.5) — (4.8) при  $\tau_\varepsilon \rightarrow \infty$  и  $\tau_\varepsilon \rightarrow 0$  и подставляя в первую формулу (2.5), разрешенную относительно инерционного члена  $M\omega^2$ , получаем два соотношения, которые определяют частотные зависимости для двух амплитуд, соответствующих релаксированному и нерелаксированному колебаниям

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 (1 + 3/4 k_0^2 A^2) \pm P (MA)^{-1}, & \omega_0^2 &= k_0 M^{-1} \\ \omega^2 &= \omega_\infty^2 (1 + 3/4 k_\infty^2 A^2) \pm P (MA)^{-1}, & \omega_\infty^2 &= k_\infty M^{-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Соотношения (4.9) описывают колебательные процессы систем с жесткой характеристикой, подробно рассмотренные, например, в книге [11]. На фигуре, где приведены графики  $A = A(\omega^2)$  для следующих численных значений:

$$\begin{aligned} \omega_\infty^2 &= 1, \quad k_\infty^2 = 4/3, \quad k_0^2 = 1/3, \\ \nu_\varepsilon &= 1/2, \quad PM^{-1} = 1 \end{aligned}$$

наблюдаются два упругих резонанса при  $\omega_\infty^2 = 1$  и  $\omega_0^2 = 1/2$ . Для любых конечных значений времени релаксации  $\tau_\varepsilon$  резонансные амплитуды занимают промежуточное положение, причем, как и в линейном случае, при  $\gamma = 1$  все резонансные амплитуды имеют общую точку пересечения [7, 10]. Отличие состоит в том, что если в линейном случае частота  $\omega_*$ , при которой пересекались резонансные амплитуды, определялась дефектом модуля, или соотношением

$$\omega_*^2 = 1/2 (\omega_\infty^2 + \omega_0^2) \quad (4.10)$$

то в нелинейном случае точка пересечения оказывается амплитудо-зависимой и определяется соотношением

$$\omega_*^2 = 1/2 (\omega_\infty^2 + \omega_0^2) + 3/8 A^2 (k_\infty^2 \omega_\infty^2 + k_0^2 \omega_0^2) \quad (4.11)$$



