Проблемы логики и методологии науки

УДК 51:101.8
DOI:
10.15372/PS20160203

В.В. Целищев

Институт философии и права СО РАН, г. Новосибирск, ул. Николаева, 8, 630090

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНАЯ РОЛЬ НЕЛОГИЧЕСКИХ КОНСТАНТ В ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ*

В статье рассматривается проблема введения в семантическую теорию нелогических констант. Анализируется полемика Д. Гильберта и Г. Фреге о природе неявных определений в аксиоматике в качестве мотива введения теоретико-модельной трактовки переменных. Предлагается индексикальная трактовка нелогических констант в математическом дискурсе.

Ключевые слова: нелогические константы, аксиоматика, переменная, неявное определение, семантика, теория моделей.

V. Tselishchev

Institute of philosophy and Law, SB RAS, Novosibirsk, Nikolaeva str. 8, 630090, Russia

MODEL-THEORETIC ROLE OF THE NON-LOGICAL CONSTANTS IN FORMAL THEORIES

The problem of the introduction of non-logical constants into semantic theory is discussed. The controversy between Hilbert and Frege about the nature of implicit definitions axioms is viewed as a motive for the introduction of model-theoretic interpretation of variables. Indexicals are proposed as interpretation of non-logical constants in mathematical discourse.

Keywords: non-logical constants, axiomatic, variable, implicit definition, semantics, model theory

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 16-03- 00141.

Публикуется в авторской редакции.

«Основания геометрии» Д. Гильберта [1] положили начало спорам, которые имели большое значение для понимания природы аксиоматики. Эти споры не включали деталей математической техники, и скорее, относились к концептуальным основам математического мышления. Явным оппонентом Гильберта был Г. Фреге, а неявным – Р. Дедекинд. Как известно, аксиоматика Гильберта не специфицирует природы объектов, удовлетворяющих аксиомам. Часто цитируемое высказывание Гильберта о том, что вместо точек, прямых и окружностей в качестве таких объектов можно брать столы, стулья и подставки для пивных кружек, было экспромтом, произнесенным на вокзале перед отходом поезда в беседе, которая никак не носила характера научной дискуссии. В основе экспромта лежало твердое убеждение Гильберта, что самих по себе аксиом вполне достаточно для математических целей того, чтобы не определять те объекты, которые удовлетворяют аксиомам. В свою очередь, в основе в основе этого убеждения лежало глубинное стремление Гильберта придать математике автономию, которая бы позволила геометрию сделать «чистой», то есть, независимой от эмпирических концепций о реальном пространстве. Считается, что «Основания геометрии» были завершением этой тенденции. У Гильберта в этом направлении были предшественники, и тем не менее

> мы привыкли отождествлять поворот математики к аксиоматике с *Grundlagen* Гильберта: этот тщательно и фундаментально разработанный образец аксиоматического мастерства был бесконечно убедительнее, что программные и философские спекуляции о пространстве и времени, которые когда-либо выдвигались [2].

Точка зрения Дедекинда состояла в том, что участвующим в аксиомах примитивным терминам следует давать объяснения, а Гильберт полагал такие объяснения излишними. Согласно Дедекинду, примитивные концепции в аксиомах не могут вводиться определениями, будучи примитивными, но они должны обладать некоторой существенностью, которая реализуется через объяснение. Таким образом, если Дедекинд выдвигал на первый план аксиомы, то Дедекинд концепции. Сам по себе подход Дедекинда указывал на важность определений тех объектов, которые входят в аксиомы. Представление о том, что такое объяснение примитивных концепций у Дедекинда, можно получить из следующего[3]. Базисными концепциями является «a есть вещь», объяснением которой будут «под вещью понимается объект нашей мысли», а для другой базисной концепции «$a = b$» объяснением будет «вещь a будет то же самое, что и вещь b, когда все, что может мыслиться как a, может мыслиться как b».

Гильберт полагал такие объяснения излишними, особенно потому, что объяснения Дедекинда были нужны среди прочего для того, чтобы аксиомы были самоочевидными. Гильберт отбросил это требование. Как видно, разногласия подобного рода означают принципиальные разногласия в отношении оснований математики. Эти разногласия в еще более резкой форме проявились в полемике Гильберта с Г. Фреге.

Между 1899 и 1903 гг Д. Гильберт и Г. Фреге обменялись полемическими письмами, в которых были изложены их взгляды на роль определений и аксиом в математике. Эпистемологический аспект этого противостояния заключался в сопоставлении понятий «истина» и «истина-в-структуре». Этот вопрос до сих пор является одним из наиболее актуальных в философии логики и математики. Интерес представляет то обстоятельство, что его разрешение зависит от установки исследователя. Некоторые из них делают упор на структуралистском аспекте подхода Гильберта в противоположность логицисткому подходу Фреге. Так, С. Шапиро утверждает именно этот аспект спора, в конце концов, обнаруживая некоторого рода компромисс между двумя точками зрения [4]. Внимание других исследователей направлено на различие в понимании природы формальных языков. Так, У. Демопулос говорит о важности понимания роли нелогических констант в формальном языке при оценке полемики Гильберта и Фреге[5]. Разговор о нелогических константах приводит непосредственно к теоретико-модельному представлению о формальном языке. В отношении того, в какой степени Гильберт полностью осознал теоретико-модельную точку зрения, мнения также расходятся. Если Я. Хинтикка полагает, что Гильберт уже имел завершенную теоретико-модельную концепцию формального языка [6], то Ходжес говорит об осторожном отношении к теоретико-модельному понятию истины-в-структуре в гораздо более позднем периоде развития логики, в частности, у А. Тарского [7]. В еще более общем контексте различие во взглядах Гильберта и Фреге усматривается исследователями в различии понимания природы языка, а именно, языка как универсального медиума, и языка как исчисления [8].

В конкретном споре Фреге и Гильберта речь шла о роли аксиом т определений. Фреге настаивал на том, что определения в математике должны специфицировать значение определяемого слова в уже известных терминах. Без таких определений аксиомы не могут задавать значения входящих в них терминов, лишаясь при этом истинностного значения. В этом смысле аксиомы, как их понимает Гильберт, никак не могут быть определениями. На это Гильберт отвечал, что самым решительным образом противится тому, чтобы что-либо было заранее известным при аксиоматическом описании. Если для Фреге аксиоматизация представлялась систематизацией уже известных истин, то для Гильберта эти истины создавались аксиом. Как платонист Фреге предполагал, что утверждения математики являются описанием уже существующей объективной математической реальности, как области уже существующих математических объектов. С точки зрения Гильберта, экзистенциальные утверждения математики являются не дескриптивными, а следствием непротиворечивости заданных аксиом. Непротиворечивость для Гильберта является критерием и истинности, и существования. Далее, Гильберт полагал, что определения математических объектов в предлагаемом Фреге стиле не могут быть исчерпывающими в том смысле, что только математическая аксиоматическая система в целом дает такое определение.

> Концепции могут быть фиксированы логически только их отношениями к другим концепциям. Эти отношения, сформулированные в определенных утверждениях, я называю аксиомами, таким образом, приходя к взгляду, что эти аксиомы …являются определениями концепций. Тут я ничего не придумываю, поскольку не нашел ничего лучше, но меня к этому вынудили требования строгости логического вывода и логического конструирования теории. Я убедился, что более тонкие разделы математики …могут трактоваться только таким путем; в противном случае мы попадаем в порочный круг [9].

Фактически это является одной из формулировок структурализма, суть которого состоит в отказе рассматривать изолированные математические объекты и утверждения, не соотносящиеся с системой. Самой простой иллюстрацией структурализма является утверждение о том, что число 2 не есть объект в каком-либо смысле, а есть то, что стоит в ряду натуральных чисел после числа 1 и перед числом 3. В определенном смысле это просто «место» в прогрессии. Существует несколько версий структурализма, в целом разделяющих представление о том, что с точки зрения онтологии главное место занимает не понятие объекта, а понятие структуры в целом [10].

Согласно Фреге, аксиомы должны выражать истины, а определения должны задавать смысл и фиксировать денотат определенного термина. С его точки зрения, если термины предлагаемой аксиомы не имеют изначально смысла или значения, тогда утверждения не могут быть истинными или ложными, и отсюда, не могут быть аксиомами вообще. Если же эти термины имели изначально значение, тогда аксиомы не могут быть определениями. Между тем, для Гильберта аксиомы и были определениями, но только неявными, в отличие от явных определений Фреге. Хотя сам Гильберт не употреблял термина «неявное определение», фактически он это имел в виду с точки зрения Фреге. Дальнейшее обсуждение идеи Гильберта о том, что аксиомы неявно определяют объекты, которые им удовлетворяют, пошло в двух направлениях.

Фреге использовал свою логическую системы для того, чтобы «освоить» многое из того, что имел в виду уже Гильберт. Фреге утверждал, что аксиомы Гильберта не содержат необходимых и достаточных условий для характеристики того, что значит быть объектом, удовлетворяющим аксиомам, например, что значит быть у Гильберта «точкой». Но он признавал, что Гильберт давал необходимые и достаточные условия для системы объектов. Это означало в логическом плане, что Гильберт отношения второго порядка, скажем, отношения не между точками и прямыми, а концепцией точки и концепцией прямой. Неявные определения первого порядка объекта у Гильберта трансформировались у Фреге в явные определения концепций второго порядка. В некотором смысле это можно считать компромиссом в споре Фреге и Гильберта, быть может, с одним не совсем явным ограничением. Предпочтение Гильбертом языка первого порядка, явно выраженное им при обособлении этого языка от остальных [11], хотя и было сделано из других соображений, тем не менее, можно считать неприятием им языков второго порядка. Таким образом, сам Гильберт остался невосприимчивым к аргументации Фреге, тем более, что он шел в другом направлении, а именно, к теоретико-модельному пониманию аксиоматизации.

Различие между подходами Фреге и Гильберта имеет фундаментальное значение с точки зрения понимания структуры формального языка. Фреге понимал логику как язык, в то время как Гильберт рассматривал логику как исчисление. Логическая система Фреге имела в качестве существенных ингредиентов пропозициональные связки и переменные, причем первые имели фиксированное логическое значение. Что касается переменных, то если они являются свободными, тогда они являются «местами» для объектов, которые должны быть поименованы, и эти имена подставляются вместо переменных. Если переменные являются связанными, тогда они являются частью аппарата квантификации. Логика Фреге содержит кванторы (которые, собственно, и являются его изобретением), но это кванторы «над всем», поскольку логика тут является универсальным языком.

У. Ходжес отмечает, что в отличие от логики Фреге, теория моделей включает в дополнение к пропозициональным связкам и переменным еще два рода вещей [12]. Это кванторы, но теперь уже с областью квантификации, ограниченной четкими рамками, поскольку без них понятие квантора становится затруднительным для понимания. Но решающим отличием логики Гильберта от логики Фреге является наличие в первой нелогических констант. К нелогическим константам относятся отношения, функциональные и индивидные константные символы. Набор нелогических констант варьируется от языка к языку, и референты соответствующих символов задаются в зависимости от конкретной ситуации. В результате, предложения языка первого порядка с нелогическими константами не истинны и не ложны изначально, а получают свое истинностное значение при интерпретации нелогических констант и кванторов.

С первого взгляда трудно уловить различие между переменными и нелогическими константами, коль скоро обе подлежат интерпретации. Следует отметить, что нет общего согласия относительно того, какого рода семантика может быть приписана переменным. Не менее сложен вопрос о семантике нелогических констант. По своему статусу, нелогические константы находятся между переменными и логическими константами. С одной стороны, их интерпретация не столь произвольна, как интерпретация переменных, а с другой стороны, интерпретация нелогических констант не является фиксированной, как у логических констант. Последнее обстоятельство является важным, поскольку варьирование интерпретации является как раз тем, что невозможно в языке Фреге. Для него значение или смысл определяют референт, и при отсутствии последнего выражение с точки зрения Фреге выражение становится бессмысленным. Гильберт же полагал нелогические константы имеющими смысл или значение благодаря системе аксиом. Больше того, по Гильберту, нелогические константы определяют в значительной степени структуру аксиоматической теории.

В конечном счете, разногласия между Гильбертом и Фреге упираются в понимание механизма приобретения утверждениями формальной теории в результате интерпретации истинностных значений. Для Фреге, смысл определяет референт выражений, независимо от контекста, и поэтому истинность утверждений абсолютизирована, и обозначающие выражения определяют референцию абсолютно. Гильберт же фактически имеет дело с понятием истины-в-структуре, что требует выделения нелогических констант, референты которых варьируются в зависимости от контекста.

Теоретико-модельная трактовка нелогических констант не вызывает особых вопросов в математическом дискурсе, став вполне обычным инструментом математической теории после работ А. Тарского по теории моделей, в частности, работы, где осторожные приближения Тарского к концепции истины-в-структуре получили завершение в виде явного определения этого понятия.[13]. То, что Тарский, который мог в своих работах, как отмечает Ходжес [14], гораздо раньше ввести понятие нелогической константы, проявлял осторожность, объяснимо, видимо, различением философского и математического дискурсов. Несколько раз Тарский оговаривал в своих статьях стиль изложения материала обращением к конкретной аудитории, философской или математической. На лекции «Что такое логическое понятие» в Новосибирском государственном университете в 1966 г. Тарский говорил о теории типов и аксиоматической теории множеств как альтернативных равноправных средств в исследовании оснований математики, первое из которых предпочтительно для философов, а второе - для математиков [15]. Действительно, знаменитая статья «Концепция истины для формализованных языков» [16] использовала язык Фреге, поскольку Тарский обращался к философской аудитории. Сам Тарский не вводил нелогические константы до тех пор, пока «математический крен» в его творчестве не стал превалирующим.

Этот вопрос различия философского и математического дискурсов напрямую имеет отношение к обсуждаемой теме. Действительно, можно задать вопрос, почему не задать нелогическим константам при интерпретации фиксированное значение. Оказывается, ответ на этот вопрос заключается в удобстве математического исследования. Например, для утверждения о наличии общего свойства у двух структур, весьма желательного в математическом дискурсе, требуются нелогические константы, чья интерпретация является фиксированной в структуре (или модели), но не фиксирована в языке. Ясно, что это невозможно сделать в языке Фреге.

Можно задать и симметричный вопрос о том, почему нелогические константы нельзя трактовать как свободные переменные? Ответ на него также будет мотивирован математическими соображениями: например, когда мы спрашиваем, истинен ли коммутативный закон в группе, мы должны иметь фиксированное имя для операции умножения в группах, но было бы бессмысленно приписывать элементы группы всем свободным переменным формального языка.

Однако помимо чисто математической мотивации введения нелогических констант, имеется и более общее соображение, касающееся того, что значит задать интерпретацию нелогической константе. Более точно, вопрос состоит в том, обладают ли нелогические константы каким-то минимальным значением, независимо от структуры или модели. Дело в том, что если интерпретация состоит лишь в задании структуры, тогда мы получаем весьма обедненное понятие нелогической константы. В самом деле, структуры могут быть достаточно произвольными, не отвечающими никаким интуитивным соображениям. Очевидно, что нелогические константы обладают каким-то минимальным значением, которое обязано не просто структурам, а релевантным структурам. Что в данном случае означает «релевантность»? Ходжес предложил концепцию нелогической константы как индексикального выражения, такого, которое имеет смысл в определенном контексте. Обозначаемое индексикальным выражением сдвигается от одного говорящего к другому, от одного времени к другому времени, от одного места к другому месту. Обращение к такой трактовке нелогических констант вполне обосновано, потому что трудности в понимании как тех, так и других, одинаковы. Действительно, как утверждает Дж. Перри, индексикалы интересны по причине того, что хотя значение этих слов относительно непроблематично, весьма неясно, как встроить эти значения в семантическую теорию [17].

Демопулос придерживается той же точки зрения, что трудности встраивания нелогических констант в семантическую теорию обязано их индексикальному характеру, который теперь уже свойственен конкретным математическим структурам. Именно по этой причине нелогические константы не имеют аналогов в языке Фреге [18].

В качестве примера следует привести чисто математический пример того, какое это имеет отношение к нелогическим константам в математическом контексте.

> Предположим, что мы хотим использовать предложение S формального языка групп для разговора о конкретной группе G, и тогда можно ли говорить, что «.» указывает на операцию умножения групп, или же для связки мне нужны правила языка? Здесь есть небольшая тонкость. Группа G в общем имеет по крайней мере две различных операции умножения. Если «.» одна из них, то имеется дуальная операция «*», задаваемая

$$x * y = y . x$$

> Так какая из операций имеется в виду под «.»? Для ответа на этот вопрос нужно последить за работой математиков, и мы обнаружим следующее: Всякий раз, когда математик описывает группу, он выбирает определенную операцию умножения, называя ее некоторым образом. Иногда он делает ярлык, делая его вторым членом упорядоченной пары, а иногда он приписывает такой символ как «.», или «0». Тщательно написанные учебники правильно определяют группу вместе с операцией навешивания ярлыка, удовлетворяющего определенным условиям.
> Некоторые могут подумать, что такая информация не является частью определения. Нет, имена являются интегральной частью структуры.
> Теперь мы можем видеть, как эти имена оперируют. Если вы хотите использовать предложение S формального языка групп для разговора о конкретной группе G , я должен начать с показа того, какую группу я имею в виду. Но как только я сделал это, символ «.» автоматически указывает на операцию, поименованную в группе G через «.». Мне не нужно делать публичных деклараций для того, чтобы направлять символ к правильной части группы. Точно таким же образом геометр говорит о классе элементов, называемых точками в пространстве [19].

Своего рода философское «оправдание» математической практики, которое мы имеем в данном случае, представляет общий методологический интерес. Трудности встраивания нелогических констант в семантическую теорию, и необходимость их использования в теории моделей, заставляет обращаться к «посторонним» в отношении к математике концепциям индексикальных выражений. С одной стороны, можно апеллировать к автономии математики, стойким сторонником которой был Д. Гильберт, и не искать никакого оправдания подобного рода. С другой стороны, сомнения Г. Фреге, не менее стойкого сторонника логической ясности математических конструкций, оправданы в том, что логический статус таких понятий как нелогическая константа должен быть определен более четко, чем это позволяет математическая практика.

Литература

1. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

2. *Freudenthal H.* The main trends in the foundations of geometry in 19th century // Logic, methodology and philosophy of science / eds. Nagel E. et al. – Stanford: Stanford University Press, 1962. p. 619.

3. *Klev A.* Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences // The Review of Symbolic Logic. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 645–681.

4. *Shapiro S.* Space, Number and Structure: A Tale of Two Debates // Philosophia Mathematica, vol. 4, 1966, p. 148-173.

5. *Demopoulos W.* Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory // History and Philosophy of Logic. 1994. Vol. 15.

6. *Hintikka J.* On the Development of the model-theoretic Viewpoint in Logical Theory //Synthese, vol. 77, 1988. P. 1-36.

7. *Hodges W.* Truth in Structure //Proceedings of the Aristotelian Society, new series. Vol. 86, 1985/1986. P. 135-51.

8. *van Heijenoort I.*, ed. From Frege to Godel: a sourcebook in mathematical logic. Cambridge: Harvard university press, 1967.

9. *Frege G.* Philosophical and Mathematical Correspondence. Oxford, Blackwell, 1980. C. 51.

10. *Shapiro S.* Philosophy of Mathematics. Oxford University Press, 1997.

11. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М.: 1948.

12. *Hodges W.* Truth in Structure //Proceedings of the Aristotelian Society, new series. Vol. 86, 1985/1986. P. 135-51.

13. *Tarski A.*, Vaught R.L. Arithmetical Extensions of Relational Systems // Compositio Mathematica. Vol. 13, 1957. P. 81-102.

14. *Hodges W.* Truth in Structure //Proceedings of the Aristotelian Society, new series. Vol. 86, 1985/1986. P. 135-51.

15. Автор данной статьи присутствовал на этой лекции, которая была произнесена на чистом русском языке образца 1914 г.

16. *Tarski A.* The Concept of Truth in Formalized Languages // Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Oxfrod: Clarendon Press, 1956. P. 152-278.

17. *Perry J.* Indexicals and Demonstratives // The Companion to the Philosophy of Language / eds. Hale B., Wright C. Oxford: Blackwell Publishers, 1997. p. 586-612.

18. *Demopoulos W.* Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory // History and Philosophy of Logic. 1994. Vol. 15. P. 216.

19. *Hodges W.* Truth in Structure //Proceedings of the Aristotelian Society, new series. Vol. 86, 1985/1986. P. 135-51. P. 149.

Дата поступления 05.06.2016