

УДК 539.3; 620.17

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ОРГАНИЧЕСКОГО СТЕКЛА НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ

В. Н. Паймушин<sup>\*,\*\*</sup>, В. А. Фирсов<sup>\*</sup>, В. М. Шишкин<sup>\*\*\*</sup>

\* Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия

\*\* Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия

\*\*\* Вятский государственный университет, 610000 Киров, Россия

E-mails: vpajmushin@mail.ru, vafirsov\_49@mail.ru, tism1@rambler.ru

Разработана методика идентификации наследственных свойств в условиях кратковременной ползучести органического стекла по экспериментальному смещению центра затухающих изгибных колебаний вертикально закрепленных тест-образцов после их предварительной выдержки в статическом изогнутом состоянии. Методика основана на использовании метода конечных элементов и интегральных уравнений теории наследственной вязкоупругости с ядром наследственности Колтунова — Ржаницына. Для идентификации реологических параметров указанного ядра построена целевая функция, для нахождения минимума которой используется метод прямого поиска, не требующий вычисления ее градиента. Получена осредненная на основе данных для нескольких тест-образцов временная зависимость ядра наследственности органического стекла.

**Ключевые слова:** вязкоупругий материал, ядро наследственности, конечный элемент, метод прямого поиска, целевая функция.

DOI: 10.15372/PMTF20180317

**Введение.** Органическое стекло (оргстекло), или полиметилметакрилат (ПММА), представляет собой прозрачный пластик, применяемый преимущественно для изготовления изделий конструкционной оптики (иллюминаторов, обтекателей, фонарей самолетов, перископов подводных лодок и др.), что обусловлено сочетанием необходимых свойств: низкой плотности (приблизительно в два раза меньше плотности обычного стекла), высокой светопропускаемостью (92 ÷ 93 %), безосколочности, водостойкости, высокой ударной вязкости, стойкости к действию авиабензина и смазочных масел.

По реакции на внешнее силовое воздействие оргстекло можно отнести к числу жестких полимерных материалов с вязкоупругими свойствами. При расчете характеристик изделий из таких материалов необходимо учитывать временной фактор, обусловленный ползучестью материала в случае действия постоянной или медленно меняющейся нагрузки. В случае динамических процессов (удар, затухающие и резонансные колебания) определяющее значение при расчете конструкции имеют демпфирующие свойства материала.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-00667).

© Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шишкин В. М., 2018

В настоящее время для учета ползучести и демпфирующих свойств полимерных материалов с выраженными вязкоупругими свойствами, как правило, используются уравнения различного типа. Ползучесть обычно моделируется на основе интегральных уравнений теории наследственной вязкоупругости, содержащих ядра наследственности материала (ядро ползучести или ядро релаксации). В работе [1] обсуждается возможность использования данных уравнений для описания быстро меняющихся процессов деформирования материала. В этом случае в уравнениях состояния конструкции кроме внутренних и внешних сил необходимо учитывать силы инерции, возникающие при ее динамическом деформировании. Однако данная возможность еще не применяется на практике. В работе [2] отмечается перспективность использования наследственных уравнений для описания рассеяния энергии в материале при колебаниях конструкций, однако эта возможность также пока не реализована. Учитывать демпфирующие свойства материала при колебаниях конструкций можно с помощью гистерезисных уравнений, характеризующих неоднозначность кривых нагрузки и разгрузки при циклическом деформировании материала. В случае установившихся гармонических колебаний целесообразно использовать понятие комплексного модуля упругости [3–6] как для динамического расчета элементов конструкций из традиционных материалов, так и при анализе сложных структурно-неоднородных конструкций [7, 8].

В Казанском национальном исследовательском техническом университете им. А. Н. Туполева разработана экспериментальная установка [9] для определения динамических характеристик упругости и демпфирующих свойств жестких и эластичных материалов на основе исследования затухающих изгибных колебаний соответствующих тест-образцов. При динамических испытаниях вертикально расположенных тест-образцов из оргстекла обнаружено достаточно быстрое (приблизительно за 60 с) смещение центра колебаний свободного конца тест-образца относительно линии нулевого прогиба. Указанное смещение обусловлено вязкоупругим последствием, или обратной ползучестью материала [10, 11], которое можно использовать для идентификации наследственных свойств оргстекла в режиме кратковременной ползучести.

Известные подходы к описанию кратковременной ползучести материалов в основном применимы для металлов и их сплавов, работающих в условиях значительного нагрева [12–16] и при небольших деформациях ползучести ( $1 \div 2$  % величины мгновенной деформации). При этом, как правило, используются достаточно простые дифференциальные уравнения, содержащие мгновенную пластическую деформацию, деформацию ползучести и скорость ползучести, зависящую от напряжения и температуры материала [12].

При традиционном подходе к идентификации параметров ядер наследственности вязкоупругих материалов обычно используются экспериментальные кривые ползучести материала, получаемые при длительном растяжении тест-образцов постоянным растягивающим напряжением [17]. Однако результаты проведенных авторами настоящей работы испытаний тест-образца из оргстекла показывают, что применение данного подхода возможно в случае установившейся ползучести, наблюдаемой при сравнительно длительном нагружении тест-образца. Это свидетельствует о том, что для анализа кратковременной ползучести оргстекла и других полимерных материалов необходимы новые методики испытаний и инструментально-аппаратные средства.

**1. Методика проведения эксперимента и обработка виброграммы затухающих изгибных колебаний тест-образца.** Для исследования наследственных свойств полимерных материалов в условиях кратковременной ползучести целесообразно использовать вертикально расположенные консольно закрепленные тест-образцы (с целью исключения статической составляющей прогиба). С этой целью проведена модернизация экспериментальной установки [9], схема которой представлена на рис. 1. Установка состоит из

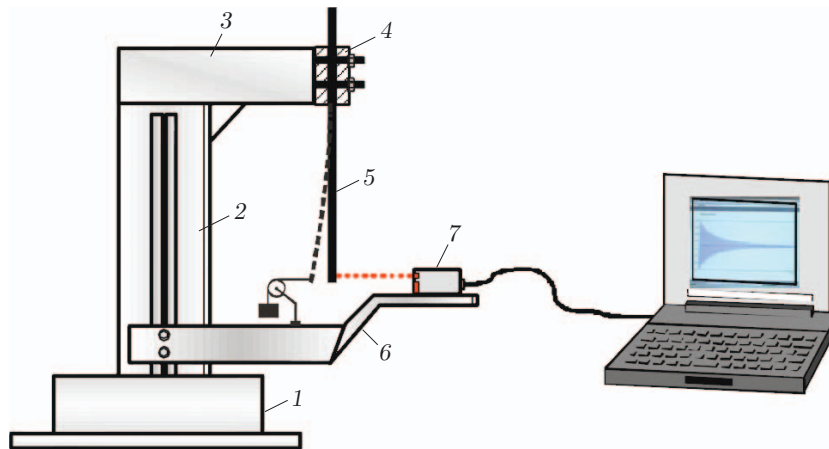


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — основание, 2 — стойка для крепления консоли, 3 — консоль, 4 — захват, 5 — тест-образец, 6 — подвижная платформа, 7 — лазерный датчик перемещений

основания и стойки, жестко соединенных между собой. На стойке неподвижно закреплена консоль с помощью захвата на конце. Защемление тест-образца осуществляется с помощью разнесенных жестких планок, соединенных с консолью с помощью болтов и исключающих поворот тест-образца в сечении заделки. На стойке размещена подвижная платформа для крепления лазерного датчика перемещений, положение которой вдоль стойки можно изменять для измерения прогиба  $w$  свободного конца тест-образца при изменении длины его колеблющейся части (стрелы вылета).

Эксперимент проводится в два этапа: на первом этапе тест-образец выдерживается в статическом изогнутом состоянии под действием подвешенного через блок груза в течение времени  $t_1$ ; на втором этапе груз мгновенно снимается и записывается виброграмма затухающих изгибных колебаний  $w(t)$  свободного конца тест-образца до момента времени  $t_2$  (относительно времени  $t_1$ ), соответствующего практически нулевому прогибу  $w$ . Для записи виброграммы  $w(t)$  используется триангуляционный лазерный датчик фирмы RIFTEK (RF603-X/100), обеспечивающий измерение прогиба с точностью до 0,01 мм. Разработанное математическое обеспечение позволяет осуществлять до 2000 замеров амплитуды в секунду, что обеспечивает высокую точность экспериментальных виброграмм затухающих колебаний исследуемых тест-образцов.

Происходящие после мгновенного снятия груза изгибные колебания тест-образца можно представить как совокупность двух независимых процессов: медленного стремления к нулю центра колебаний свободного конца тест-образца и быстрого затухания колебаний относительно данного центра. Для описания медленного процесса можно использовать физические уравнения теории наследственной вязкоупругости [1, 17], быстрый процесс можно описать с помощью уравнений гистерезисного типа [18–20].

Следует отметить, что на первом этапе испытаний процесс деформирования тест-образца существенно зависит от скорости его нагружения в момент подвешивания груза, которую трудно контролировать (груз на установке опускается вручную). Это не позволяет определять параметры кратковременной ползучести материала по кривой ползучести на первом этапе испытаний. Время  $t_1$  необходимо выбирать таким образом, чтобы результаты второго этапа испытаний практически не зависели от данного времени. Поэтому было выработано эмпирическое правило:  $t_1 \approx t_2$ , т. е. время нахождения тест-образца в статическом изогнутом состоянии должно быть приблизительно равно времени, при котором смещение центра колебаний на втором этапе испытаний практически становится

равным нулю. Это нетрудно определить по виброграмме  $w(t)$ , поскольку время, при котором амплитуда колебаний относительно данного центра в экспериментах обращается в нуль, значительно меньше времени  $t_2$ .

Обработка экспериментальной виброграммы  $w(t)$  при идентификации наследственных свойств в случае кратковременной ползучести материала проводилась с целью построения огибающих  $A^{(+)}(t)$  и  $A^{(-)}(t)$  в областях положительных и отрицательных значений прогиба  $w(t)$  свободного конца тест-образца соответственно. По огибающим  $A^{(+)}(t)$  и  $A^{(-)}(t)$  определяются смещение  $\Delta(t)$  центра колебаний (вязкоупругое последствие) и огибающая колебаний  $A(t)$  относительно данного центра:

$$\Delta(t) = \frac{A^{(+)}(t) + A^{(-)}(t)}{2}, \quad A(t) = \frac{A^{(+)}(t) - A^{(-)}(t)}{2}.$$

**2. Физические зависимости и идентификация наследственных свойств вязкоупругого материала.** При изгибе тест-образец находится в состоянии неоднородного растяжения-сжатия. В случае если материал тест-образца обладает вязкоупругими свойствами, временные зависимости деформаций  $\varepsilon(t)$  и напряжений  $\sigma(t)$  в медленном процессе деформирования можно представить в виде интегральных уравнений теории наследственной вязкоупругости [1, 17]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( \sigma(t) + \int_{-\infty}^t S(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right); \quad (2.1)$$

$$\sigma(t) = E \left( \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad (2.2)$$

где  $t$  — время наблюдения;  $\tau$  — время, предшествующее моменту наблюдения;  $S(t-\tau)$ ,  $R(t-\tau)$  — функции влияния (ядро ползучести и ядро релаксации), зависящие от аргумента  $t-\tau$ ;  $E$  — мгновенный модуль упругости материала. Заметим, что функции  $S(t-\tau)$  и  $R(t-\tau)$  должны быть положительными и монотонно убывающими, так как влияние напряжения  $\sigma(\tau)$  на деформацию  $\varepsilon(t)$  в уравнении (2.1) и, наоборот, деформации  $\varepsilon(\tau)$  на напряжение  $\sigma(t)$  в (2.2) при увеличении аргумента  $t-\tau$  должно уменьшаться.

Соотношения (2.1), (2.2) можно рассматривать как взаимообратные, поскольку каждое из них является решением другого и может использоваться для моделирования процесса деформирования наследственно упругого материала при одноосном напряженном состоянии. При этом ядро ползучести  $S(t-\tau)$  является резольвентой ядра релаксации  $R(t-\tau)$  и наоборот: ядро  $R(t-\tau)$  — резольвента ядра  $S(t-\tau)$ . Зависимость данных ядер от разности  $t-\tau$  свидетельствует о том, что механические свойства материала не меняются во времени. Однако существуют так называемые стареющие материалы [17], свойства которых существенно зависят от времени, например бетон, стареющий приблизительно в течение двух лет. Для описания свойств стареющих материалов рассматриваемые ядра должны быть функциями аргументов  $t$  и  $\tau$  в отдельности.

Полагая, что история нагружения материала начинается не от минус бесконечности, а от некоторого начального момента времени, принимаемого равным нулю, уравнения (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( \sigma(t) + \int_0^t S(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right); \quad (2.3)$$

$$\sigma(t) = E \left( \varepsilon(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (2.4)$$

В предположении, что

$$\int_{-\infty}^0 S(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau = 0, \quad \int_{-\infty}^0 R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau = 0, \quad (2.5)$$

уравнения (2.3), (2.4) совпадают с соответствующими уравнениями (2.1), (2.2). Выражения (2.5) соответствуют начальному естественному состоянию материала, которое не вызывает в нем изменений в дальнейшем.

Основной проблемой при моделировании напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов с наследственными свойствами является выбор ядра наследственности:  $S(t - \tau)$  или  $R(t - \tau)$ . Для полимерных материалов в качестве ядра  $R(t - \tau)$ , как правило, выбирается простое, но достаточно общее слабосингулярное ядро Колтунова — Ржаницына [21, 22] с тремя реологическими параметрами:

$$R(t - \tau) = C(t - \tau)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-\tau)} \quad (C > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0) \quad (2.6)$$

( $C$  — параметр вязкости;  $\alpha$  — параметр сингулярности;  $\beta$  — параметр затухания). Выражение для резольвенты ядра (2.6) имеет вид [22]

$$S(t - \tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t - \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[C\Gamma(\alpha)]^n (t - \tau)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (2.7)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция.

Идентификация наследственных свойств вязкоупругого материала при использовании ядра (2.6) сводится к определению параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  таким образом, чтобы выполнялось условие минимума некоторой целевой функции  $F(C, \alpha, \beta)$  при ограничениях  $C > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 0$ . В качестве функции  $F(C, \alpha, \beta)$  можно использовать выражение

$$F(C, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\Delta(t_i)}{\Delta^*(t_i)} \right)^2, \quad (2.8)$$

где  $\Delta(t_i)$ ,  $\Delta^*(t_i)$  — соответственно расчетные и экспериментальные смещения центра колебаний на втором этапе испытаний тест-образца при заданных моментах времени  $t_i$ .

Для минимизации функции нескольких переменных обычно используется метод координатного спуска или метод скорейшего спуска [23], при этом необходимо вычислять частные производные от данной функции по каждой независимой переменной. Однако согласно (2.8) зависимость  $F(C, \alpha, \beta)$  получается неявной. Поэтому предпочтительны прямые методы поиска нулевого порядка [23] (симплекс-метод, метод конфигураций Хука — Дживса, метод Розенброка), не требующие вычисления указанных производных. Более предпочтительным является метод конфигураций Хука — Дживса, легко реализуемый при любой размерности пространства поиска. Однако значения параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , определенные по результатам испытаний различных тест-образцов, могут иметь некоторый разброс, поэтому необходимо проводить серию экспериментов на тест-образцах, осредняя полученные результаты.

**3. Определение расчетных смещений центра колебаний тест-образца.** Для определения расчетных смещений  $\Delta(t_i)$  центра колебаний свободного конца тест-образца предлагается использовать метод конечных элементов. Тест-образец в продольном направлении представляется совокупностью балочных конечных элементов (рис. 2), узловые

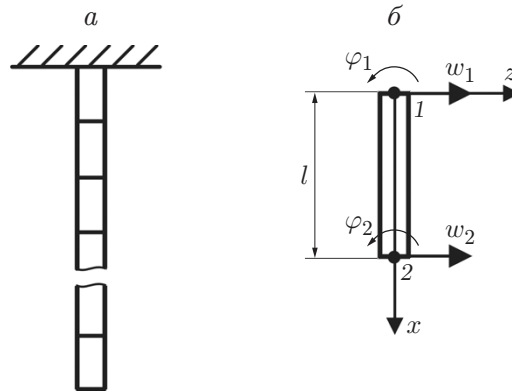


Рис. 2. Конечно-элементная модель тест-образца (а) и отдельный конечный элемент (б)

параметры элемента (прогибы  $w_1$ ,  $w_2$  и углы поворота  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ) определяются вектором  $\mathbf{r}_e(t) = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}$ . Выражение для прогиба  $w(t)$  на расстоянии  $x$  от начала элемента записывается в виде

$$w(t) = \mathbf{N}^T \mathbf{r}_e(t),$$

где

$$\mathbf{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, 0\},$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}.$$

Деформация  $\varepsilon(t)$  на расстоянии  $z$  от срединной поверхности элемента определяется по геометрической зависимости

$$\varepsilon(t) = -z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} = -z (\mathbf{N}'')^T \mathbf{r}_e(t). \quad (3.1)$$

Для получения уравнений равновесия конечного элемента используется принцип Лагранжа

$$\delta A = \delta A_\sigma + \delta A_P = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $\delta A_\sigma$  — работа напряжений  $\sigma(t)$  на возможных деформациях  $\delta\varepsilon(t)$  в объеме конечного элемента;  $\delta A_P$  — возможная работа внешних сил элемента. Работа  $\delta A_\sigma$  определяется выражением

$$\delta A_\sigma = -b \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \delta\varepsilon(t) \sigma(t) dz dx, \quad (3.3)$$

где  $b$ ,  $h$  — ширина и толщина элемента соответственно. Величина  $\delta\varepsilon(t)$  в (3.3) определяется как изохронная вариация зависимости (3.1) по узловым перемещениям  $\mathbf{r}_e(t)$ :

$$\delta\varepsilon(t) = -z \delta\mathbf{r}_e(t) \mathbf{N}'''. \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.3) уравнение (2.4) и вариацию (3.4) с учетом (3.1), получаем

$$\delta A_\sigma = -Eb \delta\mathbf{r}_e^T(t) \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{N}''' (\mathbf{N}''')^T z^2 dz dx \left( \mathbf{r}_e(t) - \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{r}_e(\tau) d\tau \right). \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) можно записать в виде

$$\delta A_\sigma = -\delta \mathbf{r}_e^T(t) K_e \left( \mathbf{r}_e(t) - \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{r}_e(\tau) d\tau \right), \quad (3.6)$$

где  $K_e$  — матрица мгновенной жесткости элемента:

$$K_e = EI \int_0^l \mathbf{N}'' (\mathbf{N}'')^T dx = EI \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}, \quad I = \frac{bh^3}{12}.$$

При вычислении возможной работы  $\delta A_P$  полагается, что в общем случае внешние силы приведены к узлам элемента и представлены вектором  $\mathbf{P}_e$ , медленно изменяющимся со временем  $t$ :

$$\delta A_P = \delta \mathbf{r}_e^T(t) \mathbf{P}_e(t). \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6), (3.7) в (3.2) и учитывая независимость компонент вектора  $\delta \mathbf{r}_e(t)$ , получаем систему уравнений

$$K_e \mathbf{r}_e(t) = \mathbf{P}_e(t) + K_e \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{r}_e(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

В случае достаточно длинных вертикально расположенных тест-образцов к матрице  $K_e$  в левой части системы (3.8) необходимо добавить матрицу геометрической жесткости  $K_{g,e}$  конечного элемента [24], появление которой обусловлено восстанавливающим действием погонных сил тяжести в деформированном состоянии тест-образца:

$$(K_e + K_{g,e}) \mathbf{r}_e(t) = \mathbf{P}_e(t) + K_e \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{r}_e(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Объединяя уравнения (3.9) по всем узловым перемещениям смежных конечных элементов, получаем систему уравнений

$$(K + K_g) \mathbf{r}(t) = \mathbf{P}(t) + K \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau. \quad (3.10)$$

Здесь  $K$ ,  $K_g$ ,  $\mathbf{P}(t)$  — соответственно матрица мгновенной жесткости, матрица геометрической жесткости и вектор внешних узловых сил конечно-элементной модели тест-образца;  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}(\tau)$  — векторы узловых перемещений данной модели в моменты времени  $t$  и  $\tau < t$ . Заметим, что предварительная выдержка тест-образца в статическом изогнутом состоянии осуществляется с помощью переброшенного через блок груза (см. рис. 1), действующего в течение некоторого времени  $t_1$ , после чего груз мгновенно снимается. В этом случае вектор  $\mathbf{P}(t)$  определяется следующим образом:

— при  $t \leq t_1$

$$\mathbf{P}(t) = \{0, 0, 0, \dots, 0, mg, 0\},$$

— при  $t > t_1$

$$\mathbf{P}(t) = \{0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}$$

( $m$  — масса груза;  $g$  — ускорение свободного падения). Количество компонент вектора  $\mathbf{P}(t)$  равно удвоенному числу узлов конечно-элементной модели тест-образца.

Решение системы (3.10) можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_P(t), \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{r}_0(t) = (K + K_g)^{-1} \mathbf{P}(t)$  — мгновенные узловые перемещения тест-образца, вызванные нагрузкой  $\mathbf{P}(t)$ ;  $\mathbf{r}_P(t) = (K + K_g)^{-1} K \int_0^t R(t - \tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau$  — вектор, учитывающий влияние узловых перемещений  $\mathbf{r}(\tau)$  до момента времени  $t$  на узловые перемещения  $\mathbf{r}(t)$ .

Для получения зависимости  $\mathbf{r}(t)$  в некотором временном интервале  $[0; t_n]$  необходимо разделить его на несколько шагов  $\Delta t$  и построить решение (3.11) для каждого момента времени  $t_k$  в указанном интервале:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_k) &= \mathbf{r}_0(t_k) + \mathbf{r}_P(t_k), & \mathbf{r}_0(t_k) &= (K + K_g)^{-1} \mathbf{P}(t_k); \\ \mathbf{r}_P(t_k) &= (K + K_g)^{-1} K \int_0^{t_k} R(t_k - \tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Интеграл в (3.12) находится численно, однако необходимо учитывать, что при  $\tau = t_k$  ядро (2.6) является сингулярным. Поэтому не следует применять квадратурные формулы, в которых используются узлы временной сетки. Наиболее подходящим является метод средних прямоугольников:

$$\int_0^{t_k} R(t_k - \tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau = \Delta t \sum_{j=1}^k R(t_k - \tau_j) \mathbf{r}(\tau_j) \quad (3.13)$$

( $\tau_j$  — время  $\tau$  в середине шага  $j$ ).

**4. Численные эксперименты и их результаты.** Обработаны виброграммы  $w(t)$  затухающих изгибных колебаний семи вертикально закрепленных тест-образцов из оргстекла длиной  $L = 200 \div 800$  мм, шириной  $b = 20$  мм, толщиной  $h = 3,9$  мм после их предварительной выдержки в статическом изогнутом состоянии в течение времени  $t_1$  при действии груза массой  $m$ . Для каждого тест-образца проводилось несколько замеров прогибов  $w(t)$ . В табл. 1 приведены масса груза  $m$ , продолжительность  $t_1$  действия груза и длительность  $t_2$  второго этапа испытаний для тест-образцов различной длины.

Для представления огибающих  $A^{(+)}(t)$  и  $A^{(-)}(t)$  в аналитическом виде использовались полиномы десятой степени (использование полиномов более низкого порядка не позволяет

Таблица 1

Масса груза  $m$ , продолжительность  $t_1$  действия груза и длительность  $t_2$  второго этапа эксперимента для тест-образцов различной длины

$L$ , мм	$m$ , г			$t_1$ , с			$t_2$ , с		
	Замер 1	Замер 2	Замер 3	Замер 1	Замер 2	Замер 3	Замер 1	Замер 2	Замер 3
200	175,0	175,0	—	60,480	61,749	—	60,080	61,051	—
300	91,3	91,3	—	62,578	63,352	—	61,912	61,558	—
400	39,6	39,6	—	62,444	63,884	—	59,706	58,306	—
500	39,6	39,6	39,6	61,000	64,000	65,000	63,650	61,430	61,240
600	22,5	22,5	—	62,424	62,959	—	59,726	60,941	—
700	12,1	12,1	—	67,539	63,312	—	60,421	58,878	—
800	12,1	12,1	—	61,736	59,878	—	62,064	62,312	—



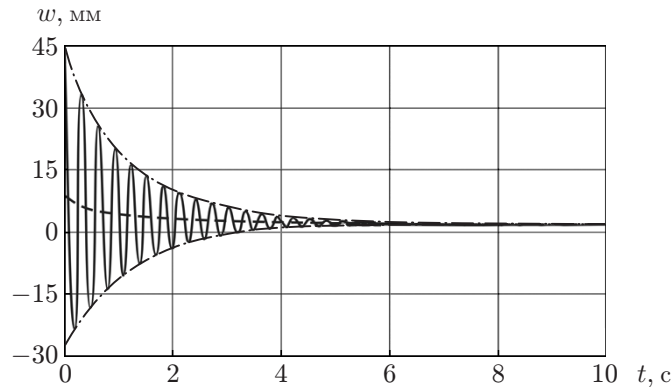


Рис. 3. Экспериментальная виброграмма  $w(t)$  (сплошная линия), огибающие  $A^{(+)}(t)$  и  $A^{(-)}(t)$  (штрихпунктирные линии) и смещение центра колебаний  $\Delta(t)$  (штриховая линия) для тест-образца длиной  $L = 600$  мм (замер 1)

получить удовлетворительного соответствия амплитуд, вычисленных по рассматриваемым зависимостям, и экспериментальных амплитуд колебаний в областях положительных и отрицательных значений  $w(t)$ ):

$$A^{(+)}(t) = \sum_{k=0}^{10} a_k^{(+)} t^k, \quad A^{(-)}(t) = \sum_{k=0}^{10} a_k^{(-)} t^k.$$

Коэффициенты  $a_k^{(+)}$  и  $a_k^{(-)}$  данных полиномов определялись из условий

$$\sum_{i=1}^n [A^{(+)}(t_i) - A_{exp}^{(+)}(t_i)]^2 = \min, \quad \sum_{i=1}^n [A^{(-)}(t_i) - A_{exp}^{(-)}(t_i)]^2 = \min,$$

где  $A_{exp}^{(+)}(t_i)$ ,  $A_{exp}^{(-)}(t_i)$  — экспериментальные амплитуды колебаний свободного конца тест-образца.

На рис. 3 приведена экспериментальная виброграмма  $w(t)$  затухающих изгибных колебаний тест-образца длиной  $L = 600$  мм (замер 1) на интервале времени  $t = [0, 10]$  с. При таких значениях времени можно разделить верхнюю и нижнюю огибающие колебаний тест-образца, при большем значении  $t$  эти огибающие в некоторых точках пересекаются.

Мгновенный модуль упругости оргстекла определялся путем осреднения значений, полученных по мгновенным прогибам  $w_0$  свободных концов тест-образцов при выдержке их в статическом изогнутом состоянии. Эти прогибы полагались равными начальным экспериментальным амплитудам  $A^*$  относительно центра колебаний  $\Delta$  на втором этапе испытаний. В случае вертикального расположения тест-образца на величину  $w_0$  оказывают влияние погонные силы тяжести, действующие в деформированном образце и приводящие к уменьшению  $w_0$ . Для учета этого влияния использовалась система уравнений

$$(K + K_g) \mathbf{r} = \mathbf{P}, \tag{4.1}$$

где  $\mathbf{P} = \{0, 0, 0, \dots, 0, mg, 0\}$ . Мгновенный модуль упругости  $E$  для каждого тест-образца (и при каждом замере  $w(t)$ ) находился из условия  $w_0 = A^*$  в результате итерационного решения системы (4.1) методом половинного деления до выполнения условия

$$(1 - w_0^{(i)}/A_0^*)^2 \leq 10^{-9}$$

( $i$  — номер итерации). Таким образом найден мгновенный модуль упругости оргстекла  $E = 4430$  МПа.

Таблица 2

Значения расчетного времени  $t_r$  отслеживания смещения  $\Delta(t)$  центра колебаний тест-образцов и параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  для тест-образцов различной длины

$L$ , мм	$t_r$ , с			$C$			$\alpha$			$\beta$		
	Замер 1	Замер 2	Замер 3	Замер 1	Замер 2	Замер 3	Замер 1	Замер 2	Замер 3	Замер 1	Замер 2	Замер 3
300	—	3,0	—	—	0,030	—	—	0,012	—	—	0,025	—
400	4,5	4,5	—	0,029	0,030	—	0,014	0,013	—	0,022	0,025	—
500	8,0	8,0	8,0	0,029	0,028	0,029	0,015	0,013	0,012	0,022	0,022	0,021
600	10,0	10,0	—	0,028	0,028	—	0,012	0,010	—	0,022	0,020	—
700	10,0	10,0	—	0,028	0,028	—	0,015	0,011	—	0,023	0,020	—
800	12,0	12,0	—	0,025	0,027	—	0,010	0,012	—	0,022	0,022	—

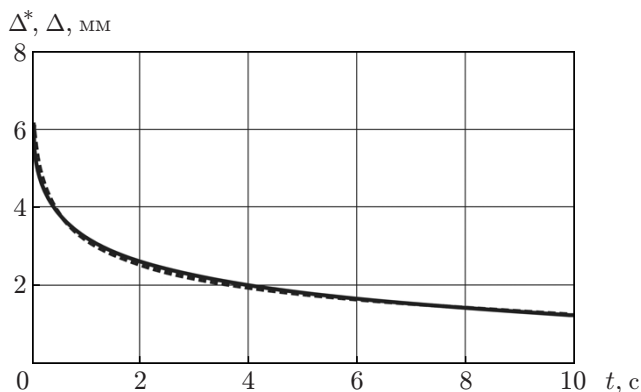


Рис. 4. Экспериментальная (штриховая линия) и расчетная (сплошная линия) зависимости смещения центра колебаний тест-образца длиной  $L = 700$  мм (замер 2) от времени

Поиск параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ядра наследственности (2.6), при которых достигается минимум целевой функции  $F(C, \alpha, \beta)$ , осуществлялся с помощью метода конфигураций Хука — Дживса с шагом 0,001 по каждому искомому параметру.

Результаты расчетов для тест-образцов длиной  $L = 200$  мм (замеры 1 и 2) и  $L = 300$  мм (замер 1) показывают, что параметр  $\alpha$  в процессе поиска минимума функции  $F(C, \alpha, \beta)$  принимает отрицательные значения. Это противоречит условию  $0 < \alpha < 1$ , при котором существует ядро ползучести (2.7), поэтому в дальнейшем результаты для данных тест-образцов не рассматриваются.

В табл. 2 приведены значения расчетного времени  $t_r$  отслеживания смещения центра колебаний  $\Delta(t)$  тест-образцов (относительно времени  $t_1$ ) и реологических параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  оргстекла при различной длине  $L$  тест-образцов. Определенные интегралы в уравнениях (3.10) до моментов времени  $t_k$  (с отсчетом от начала первого этапа испытаний) находились по квадратурной формуле (3.13) с разбиением отрезков времени  $[0; t_1]$  и  $[0; t_r]$  на 500 и 200 шагов соответственно.

На рис. 4 представлены экспериментальная  $\Delta^*(t)$  и расчетная  $\Delta(t)$  зависимости смещения центра колебаний тест-образца длиной  $L = 700$  мм (замер 2) при соответствующих значениях параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , приведенных в табл. 2. Момент времени  $t = 0$  соответствует началу второго этапа испытаний. Представленные зависимости практически совпадают, что свидетельствует об эффективности методики поиска указанных параметров.

Таблица 3

Осредненные на основе данных замеров значения параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$   
для тест-образцов различной длины

$L$ , мм	$C$	$\alpha$	$\beta$
300	0,0300	0,0120	0,0250
400	0,0295	0,0135	0,0235
500	0,0287	0,0133	0,0217
600	0,0280	0,0110	0,0210
700	0,0280	0,0130	0,0215
800	0,0260	0,0110	0,0220

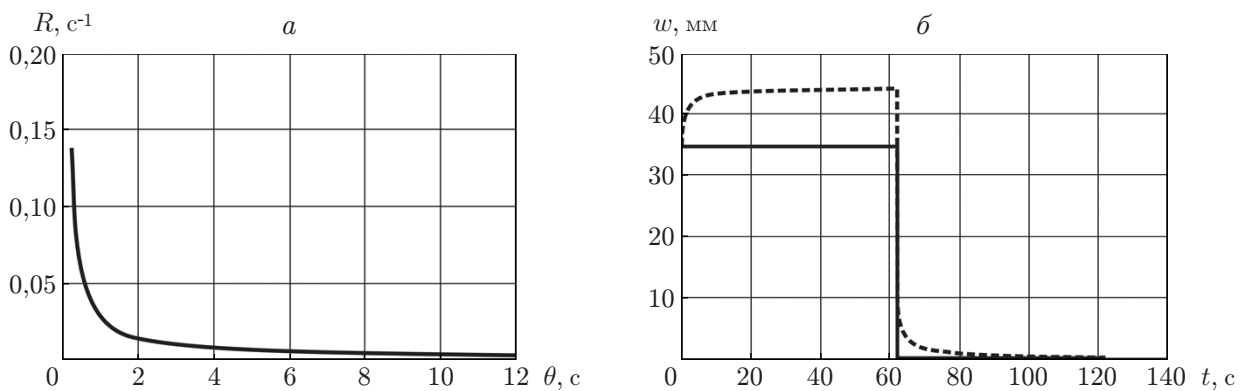


Рис. 5. Зависимости ядра наследственности (2.6) оргстекла от аргумента  $\theta = t - \tau$  (а) и прогиба свободного конца тест-образца длиной  $L = 600$  мм от времени (б) (сплошная линия — мгновенный прогиб в случае кратковременной ползучести)

В табл. 3 приведены осредненные на основе данных замеров (на каждом тест-образце) значения параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  для тест-образцов различной длины. В качестве искоемых реологических параметров оргстекла приняты арифметически осредненные на основе данных для шести тест-образцов значения  $C = 0,02837$ ,  $\alpha = 0,01230$ ,  $\beta = 0,02245$ .

На рис. 5,а представлена зависимость ядра наследственности (2.6) оргстекла от аргумента  $\theta = t - \tau$  при определенных выше значениях параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Зависимость приведена начиная со значения  $\theta = 0,2$ , так как при  $\theta = 0$  ядро (2.6) является сингулярным. При увеличении значения  $\theta$  ядро сначала быстро уменьшается, а затем медленно стремится к нулю, что свидетельствует о свойстве материала достаточно быстро “забывать” историю его нагружения.

На рис. 5,б приведены мгновенный и зависящий от времени прогибы  $w$  свободного конца тест-образца длиной  $L = 600$  мм при найденных значениях параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . После снятия груза ( $t = 62$  с) мгновенный прогиб обращается в нуль, а прогиб, зависящий от времени, скачкообразно уменьшается на величину мгновенной составляющей. Через время  $t = 60$  с после скачка зависящий от времени прогиб (смещения центра колебаний тест-образца) также практически становится равным нулю, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Для сравнения параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , полученных при кратковременной ползучести оргстекла, проведено испытание тест-образца на растяжение в режиме установившейся ползучести. Эксперимент проводился на сервоэлектрической универсальной испытательной

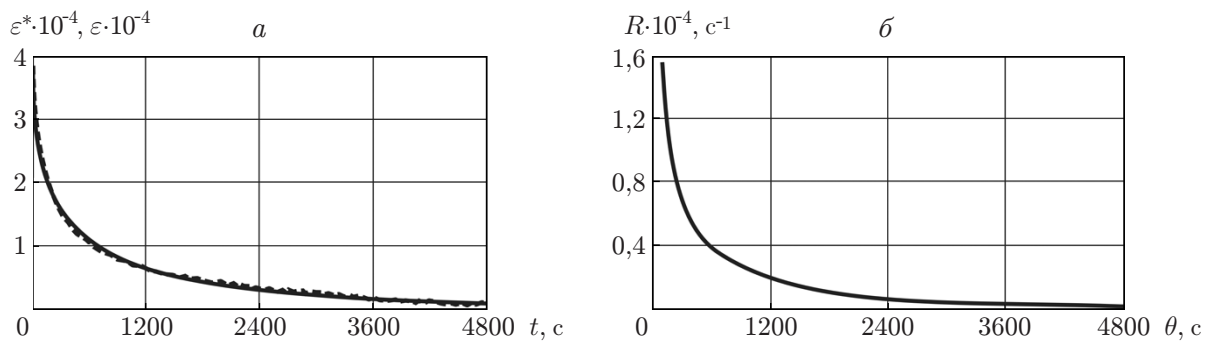


Рис. 6. Экспериментальная  $\varepsilon^*(t)$  (штриховая линия) и расчетная  $\varepsilon(t)$  (сплошная линия) зависимости деформации последействия от времени (а) и зависимость ядра наследственности (2.6) оргстекла от аргумента  $\theta = t - \tau$  (б) в случае растяжения тест-образцов в режиме установившейся ползучести

машине Instron Electropuls E10000. Тест-образец имел следующие размеры: длина рабочей части  $L = 50$  мм, ширина  $b = 9,95$  мм, толщина  $h = 3,9$  мм. Тест-образец растягивался с постоянной скоростью в течение 70 с до достижения значения напряжения  $\sigma = 15$  МПа, при котором выдерживался в течение времени  $t_1 = 20$  мин, после чего напряжение  $\sigma$  снималось. В течение всего времени испытаний проводился замер удлинения  $u(t)$ , продолжавшийся до момента  $t_2 = 80$  мин (относительно времени  $t_1$ ), соответствующего практически нулевому значению  $u$ . На этапе нагружения до достижения значения напряжения  $\sigma = 15$  МПа определен осредненный по данным нескольких замеров статический модуль упругости оргстекла  $E_c = 3240$  МПа, значение которого существенно меньше определенного ранее значения мгновенного модуля  $E = 4430$  МПа.

Параметры  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ядра наследственности (2.6) определялись из условия

$$\Phi(C, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\varepsilon(t_i)}{\varepsilon^*(t_i)} \right)^2 = \min,$$

где  $\varepsilon(t_i)$ ,  $\varepsilon^*(t_i)$  — соответственно расчетные и экспериментальные деформации последействия в моменты времени  $t_i$ . Значения  $\varepsilon(t_i)$  вычислялись по найденной из уравнения (2.4) зависимости

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

при  $\sigma(t) = \sigma[1 - H(t - t_1)]$ , где  $H(t - t_1)$  — функция Хевисайда. Интеграл в (4.2) до каждого момента времени  $t_i$  определялся по формуле средних прямоугольников. Таким образом были найдены значения параметров  $C = 0,00490$ ,  $\alpha = 0,290$ ,  $\beta = 0,000374$ .

На рис. 6,а приведены экспериментальная  $\varepsilon^*(t)$  (с отсчетом времени  $t$  от момента  $t_1$ ) и построенная при найденных значениях параметров  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  расчетная  $\varepsilon(t)$  зависимости деформации последействия от времени. На рис. 6,б приведена зависимость ядра наследственности (2.6) оргстекла от аргумента  $\theta = t - \tau$ .

Результаты, приведенные на рис. 6,б, 5,а, свидетельствуют о неприменимости методики испытаний тест-образцов на растяжение для идентификации наследственных свойств оргстекла в условиях кратковременной ползучести.

**Заключение.** Показана принципиальная возможность идентификации наследственных свойств при кратковременной ползучести оргстекла по экспериментальному смещению центра колебаний тест-образцов в результате вязкоупругого последействия или обратной ползучести после предварительной выдержки этих образцов в статическом изогнутом состоянии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ржаницын Р. А.** Теория ползучести. М.: Госстройиздат, 1968.
2. **Хильчевский В. В.** Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций / В. В. Хильчевский, В. Г. Дубенец. Киев: Вища шк., 1977.
3. **Василенко Н. В.** Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наук. думка, 1974. С. 5–12.
4. **Постников В. С.** Внутреннее трение в металлах. М.: Металлургия, 1969.
5. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960.
6. **Нашиф А.** Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. М.: Мир, 1988.
7. **Liu Bo, Zhao Liang, Ferreira A. J. M., et al.** Analysis of viscoelastic sandwich laminates using a unified formulation and a differential quadrature hierarchical finite element method // Composites. Pt B. Engng. 2017. V. 110, N 1. P. 185–192.
8. **Дубенец В. Г.** Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенец, В. В. Хильчевский. Киев: Вища шк., 1995.
9. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Егоров А. Г.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. 2014. Т. 50, № 2. С. 185–198.
10. **Бронский А. П.** Явление последействия в твердом теле // Прикл. математика и механика. 1941. № 1. С. 31–56.
11. **Работнов Ю. Н.** Равновесие упругой среды с последействием // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 1. С. 53–62.
12. **Работнов Ю. Н.** Кратковременная ползучесть / Ю. Н. Работнов, С. Т. Милейко. М.: Наука, 1970.
13. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
14. **Колебина Н. В., Данилов В. Л., Прижан С.** Исследование кратковременной ползучести перспективной турбинной стали // Наука и образование. 2014. № 11. С. 771–779.
15. **Катанаха Н. А., Семенов А. С., Гецов Л. Б.** Единая модель длительной и кратковременной ползучести и идентификация ее параметров // Пробл. прочности. 2013. № 4. С. 143–157.
16. **Беломытцев М. Ю., Мордашов С. В.** Закономерности кратковременной ползучести стали Ст.3 // Изв. вузов. Черн. металлургия. 2015. Т. 58, № 11. С. 798–802.
17. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
18. **Василенко Н. В.** Зависимость между напряжениями и деформациями в реальных изотропных телах // Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев: Наук. думка, 1966. С. 94–103.

19. **Пановко Я. Г.** Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960.
20. **Писаренко Г. С.** Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев: Наук. думка, 1970.
21. **Колтунов М. А.** Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
22. **Колтунов М. А.** Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М. А. Колтунов, В. П. Майборода, В. Г. Зубчанинов. М.: Машиностроение, 1983.
23. **Шуп Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982.
24. **Клаф Р.** Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. М.: Стройиздат, 1979.

*Поступила в редакцию 27/VII 2017 г.*

---