УДК 532.546

НИЗКОЧАСТОТНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ВОЛНЫ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ПРОНИЦАЕМЫХ ПЛАСТАХ

А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
453103 Стерлитамак, Россия
E-mails: tfmo@sspa.bashtel.ru, ahoksana@yandex.ru, aakov68@mail.ru

Построены аналитические частотные зависимости коэффициента поглощения, волнового числа и фазовой скорости для фильтрационно-волновых полей в высокопроницаемом пропластке, ограниченном сверху и снизу пластами, имеющими высокую проницаемость в вертикальном направлении. Показано, что при уменьшении частоты фазовая скорость волны уменьшается до значений, меньших значений этой скорости в пористой среде, и имеет место низкочастотное торможение.

Ключевые слова: волновое уравнение, волновое поле давления, фильтрация, анизотропная среда, коэффициент поглощения, волновое число, фазовая скорость.

DOI: 10.15372/PMTF20180311

В работах [1–5] предложена модель фильтрационно-волнового процесса в виде плоской волны в центральном слое трехслойной проницаемой анизотропной пористой среды, отличающаяся от известных подходов к описанию фильтрации жидкостей в пористых средах. Выражения для поля давления, полученные из точного решения для ближней зоны, совпадают с выражениями, полученными с использованием “в среднем точного” асимптотического метода [6–8]. В настоящей работе найдены аналитические зависимости коэффициента поглощения, волнового числа и фазовой скорости от частоты и параметров среды.

1. Постановка задачи. Постановка задачи осуществлена в прямоугольной декартовой системе координат, ось z_d которой совпадает с осью скважины. Неоднородная среда представлена тремя областями с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$, перпендикулярными вертикальной оси. Покрывающий и подстилающий пласты полагаются слабопроницаемыми в горизонтальном направлении, средняя область толщиной $2h$ $(-h < z_d < h)$ является хорошо проницаемой и в горизонтальном, и в вертикальном направлениях. Течение полагается двумерным и не зависящим от y_d.

В сделанных предположениях математическая постановка задачи включает волновые уравнения для верхнего и нижнего пластов [4], учитывающие преобладание проницаемости в вертикальном направлении:

$$\frac{1}{c_1^2}\,\frac{\partial^2 P_{d1}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\chi_1}\,\frac{\partial P_{d1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_{d1}}{\partial z_d^2} = 0, \qquad \tau > 0, \quad z_d > h; \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{c_2^2}\,\frac{\partial^2 P_{d2}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\chi_2}\,\frac{\partial P_{d2}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_{d2}}{\partial z_d^2} = 0, \qquad \tau > 0, \quad z_d < -h, \tag{1.2}$$

а также волновое уравнение для центрального пласта

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 P_d}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\chi}\,\frac{\partial P_d}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_d}{\partial z_d^2} - \frac{\partial^2 P_d}{\partial x_d^2} = 0, \qquad \tau > 0, \quad -h < z_d < h, \quad x_d > 0, \tag{1.3}$$

где $\chi_1 = k_1/(\mu\beta^* m_0)$, $\chi_2 = k_2/(\mu\beta^* m_0)$, $\chi = k/(\mu\beta^* m_0)$ — коэффициенты пьезопроводности; c — скорость упругих волн; μ — вязкость; β^* — сжимаемость пористой среды; τ — время; P_d — давление; m_0 — пористость; k — проницаемость; нижний индекс d соответствует размерным величинам, индексы 1, 2 — номеру пласта.

В начальный момент времени возмущения отсутствуют и поле давления совпадает с гидростатическим:

$$\begin{gathered} P_{d1}\big|_{\tau=0} = -\rho g z_d + P_{11}, \qquad P_{d2}\big|_{\tau=0} = -\rho g z_d + P_{11}, \qquad P_d\big|_{\tau=0} = -\rho g z_d + P_{11}, \\ \frac{\partial P_{d1}}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \qquad \frac{\partial P_{d2}}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \qquad \frac{\partial P_d}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

(ρ — плотность насыщающего флюида; g — ускорение свободного падения). На границе раздела сред задаются равенства давлений и величины потоков:

$$\begin{gathered} P_{d1}\big|_{z_d=h} = P_d\big|_{z_d=h}, \qquad P_{d2}\big|_{z_d=-h} = P_d\big|_{z_d=-h}, \\ k_1\,\frac{\partial P_{d1}}{\partial z_d}\Big|_{z_d=h} = k\,\frac{\partial P_d}{\partial z_d}\Big|_{z_d=h}, \qquad k_2\,\frac{\partial P_{d2}}{\partial z_d}\Big|_{z_d=-h} = k\,\frac{\partial P_d}{\partial z_d}\Big|_{z_d=-h}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Давление на левой границе изменяется по гармоническому закону

$$P_d\big|_{x_d=0} = P_{d0}\cos(\omega_d \tau) - \rho g z_d + P_{11} \tag{1.6}$$

(ω — циклическая частота). С использованием соотношений

$$\begin{gathered} \tilde P_j = \frac{P_{dj} - (-\rho g z + P_{11})}{P_{10}}, \quad x = \frac{x_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad t = \frac{\tau\chi}{h^2}, \quad \eta_j = \frac{\chi}{\chi_j}, \\ A = \frac{\chi^2}{h^2 c^2}, \quad \varkappa_j = \frac{k_j}{k}, \quad \omega = \frac{h^2\omega_d}{\chi}, \quad \nu_j = \frac{c^2}{c_j^2}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где P_{10} — максимальный перепад давления; j — номер области, задача (1.1)–(1.6) приводится к безразмерному виду. Для комплексного давления $\tilde P$ задача записывается следующим образом:

$$A\nu_1\,\frac{\partial^2 \tilde P_1}{\partial t^2} + \eta_1\,\frac{\partial \tilde P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde P_1}{\partial z^2} = 0, \qquad t > 0, \quad z > 1; \tag{1.8}$$

$$A\nu_2\,\frac{\partial^2 \tilde P_2}{\partial t^2} + \eta_2\,\frac{\partial \tilde P_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde P_2}{\partial z^2} = 0, \qquad t > 0, \quad z < -1; \tag{1.9}$$

$$A\,\frac{\partial^2 \tilde P}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde P}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde P}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde P}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0, \quad -1 < z < 1, \quad x > 0; \tag{1.10}$$

$$\tilde P_1\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde P_2\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde P\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde P_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde P_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde P}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered}\tilde{P}_1\big|_{z=1}=\tilde{P}\big|_{z=1},\qquad \tilde{P}_2\big|_{z=-1}=\tilde{P}\big|_{z=-1},\\ \varkappa_1\,\frac{\partial\tilde{P}_1}{\partial z}\Big|_{z=1}=\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z}\Big|_{z=1},\quad \varkappa_2\,\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z}\Big|_{z=-1}=\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z}\Big|_{z=-1};\end{gathered}\tag{1.12}$$

$$\tilde{P}\big|_{x=0}=P_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,.\tag{1.13}$$

Установившееся решение задачи (1.8)–(1.13) находим в виде

$$\tilde{P}_1=P_1\,\mathrm{e}^{i\omega t},\qquad \tilde{P}_2=P_2\,\mathrm{e}^{i\omega t},\qquad \tilde{P}=P\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,.\tag{1.14}$$

Задача для амплитуд давления P_1, P_2, P принимает вид

$$\varphi_1^2P_1-\frac{\partial^2P_1}{\partial z^2}=0,\quad z>1,\qquad \varphi_2^2P_2-\frac{\partial^2P_2}{\partial z^2}=0,\quad z<-1;\tag{1.15}$$

$$\varphi^2P-\frac{\partial^2P}{\partial z^2}-\frac{\partial^2P}{\partial x^2}=0,\qquad -1<z<1,\quad x>0;\tag{1.16}$$

$$\begin{gathered}P_1\big|_{z=1}=P\big|_{z=1},\qquad P_2\big|_{z=-1}=P\big|_{z=-1},\\ \varkappa_1\,\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=1}=\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1},\quad \varkappa_2\,\frac{\partial P_2}{\partial z}\Big|_{z=-1}=\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=-1};\end{gathered}\tag{1.17}$$

$$P\big|_{x=0}=P_0.\tag{1.18}$$

В (1.15)–(1.18) $\varphi_1=\sqrt{i\omega\eta_1-A\nu_1\omega^2}$, $\varphi=\sqrt{i\omega-A\omega^2}$, $\varphi_2=\sqrt{i\omega\eta_2-A\nu_2\omega^2}$. Решение полагается регулярным на бесконечности, т. е. при стремлении пространственных координат к бесконечности искомое решение, а при необходимости и его производная обращаются в нуль.

2. Точное решение задачи. Для решения задачи используется интегральное синус-преобразование Фурье по переменной x

$$f^u(s)=\int\limits_0^\infty f(x)\sin{(sx)}\,dx.$$

В математической постановке задача (1.15)–(1.18) в пространстве изображений принимает вид

$$\varphi_1^2P_1^u-\frac{\partial^2P_1^u}{\partial z^2}=0,\quad z>1,\qquad \varphi_2^2P_2^u-\frac{\partial^2P_2^u}{\partial z^2}=0,\quad z<-1;\tag{2.1}$$

$$(\varphi^2+s^2)P^u-\frac{\partial^2P^u}{\partial z^2}=sP_0,\qquad -1<z<1;\tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}P_1^u\big|_{z=1}=P^u\big|_{z=1},\qquad P_2^u\big|_{z=-1}=P^u\big|_{z=-1},\\ \varkappa_1\,\frac{\partial P_1^u}{\partial z}\Big|_{z=1}=\frac{\partial P^u}{\partial z}\Big|_{z=1},\qquad \varkappa_2\,\frac{\partial P_2^u}{\partial z}\Big|_{z=-1}=\frac{\partial P^u}{\partial z}\Big|_{z=-1}.\end{gathered}\tag{2.3}$$

С учетом граничных условий (2.3) решения уравнений (2.1) представляются в следующем виде:

$$P_1^u=P^u\,\mathrm{e}^{-\varphi_1(z-1)},\qquad P_2^u=P^u\,\mathrm{e}^{\varphi_2(z+1)}\,.\tag{2.4}$$

С использованием выражений (2.4) найдем из внешних областей следы производных

$$\frac{\partial P_1^u}{\partial z}\Big|_{z=1}=-\varphi_1P^u,\qquad \frac{\partial P_2^u}{\partial z}\Big|_{z=-1}=\varphi_2P^u.\tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.2) записывается следующим образом:

$$P^u = sP_0\varepsilon/\varkappa^2 + C_1 \operatorname{sh}(\varkappa z) + C_2 \operatorname{ch}(\varkappa z) \tag{2.6}$$

($\varkappa = \sqrt{\varphi^2 + s^2}$; ε — параметр асимптотического разложения). Подставляя (2.5), (2.6) в условия для производных (2.3), получаем уравнения для определения постоянных

$$\begin{gathered} C_1[\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa) + \varphi_1\varkappa_1 \operatorname{sh}(\varkappa)] + C_2[\varkappa \operatorname{sh}(\varkappa) + \varphi_1\varkappa_1 \operatorname{ch}(\varkappa)] = -\varphi_1\varkappa_1 sP_0/\varkappa^2, \\ C_1[\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa) + \varphi_2\varkappa_2 \operatorname{sh}(\varkappa)] - C_2[\varkappa \operatorname{sh}(\varkappa) + \varphi_2\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa)] = \varphi_2\varkappa_2 sP_0/\varkappa^2. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Решение системы уравнений (2.7) принимает вид

$$C_1 = \frac{sP_0}{\varkappa^2}\, \frac{(\varphi_2\varkappa_2 - \varphi_1\varkappa_1)\varkappa \operatorname{sh}(\varkappa) + [(\varphi_2\varkappa_2)^2 - (\varphi_1\varkappa_1)^2] \operatorname{ch}(\varkappa)}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)},$$

$$C_2 = -\frac{sP_0}{\varkappa^2}\, \frac{(\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa) + 2\varphi_2\varkappa_2\varphi_1\varkappa_1 \operatorname{sh}(\varkappa)}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)}.$$

Искомое выражение для комплексной амплитуды поля давления в центральной области имеет вид

$$\begin{aligned} P^u = \frac{sP_0}{\varkappa^2}\Big[1 &- \frac{2\varphi_2\varkappa_2\varphi_1\varkappa_1 \operatorname{sh}(\varkappa) \operatorname{ch}(\varkappa z)}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)} - \\ &- \frac{\varphi_2\varkappa_2\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa(z+1)) + \varphi_1\varkappa_1\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa(z-1))}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)} - \\ &- \frac{[(\varphi_2\varkappa_2)^2 - (\varphi_1\varkappa_1)^2] \operatorname{ch}(\varkappa) \operatorname{sh}(\varkappa z)}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)}\Big]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Выражения (2.4), (2.8) представляют собой искомое решение задачи в пространстве изображений. Комплексные значения амплитуд поля давления находятся с помощью обратного синус-преобразования Фурье полученных решений. Например, для центрального слоя оно принимает вид

$$\begin{aligned} P = \frac{2P_0}{\pi\varkappa^2}\int\limits_0^\infty \Big[1 &- \frac{\varphi_2\varkappa_2\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa(z+1)) + \varphi_1\varkappa_1\varkappa \operatorname{ch}(\varkappa(z-1))}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)} - \\ &- \frac{[(\varphi_2\varkappa_2)^2 - (\varphi_1\varkappa_1)^2] \operatorname{ch}(\varkappa) \operatorname{sh}(\varkappa z)}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)} - \\ &- \frac{2\varphi_2\varkappa_2\varphi_1\varkappa_1 \operatorname{sh}(\varkappa) \operatorname{ch}(\varkappa z)}{(\varkappa^2 + \varphi_1\varkappa_1\varphi_2\varkappa_2) \operatorname{sh}(2\varkappa) + (\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2)\varkappa \operatorname{ch}(2\varkappa)}\Big] s \sin(sx)\, ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Аналогичный вид имеют решения для окружающих сред.

3. Волновое поле в ближней зоне. Решение (2.9) с учетом (1.14) позволяет определить фазовую скорость волны в любой точке центрального пласта. Рассмотрим волновое поле в ближней к источнику колебаний зоне, а также осредненное по толщине центрального слоя поле давления.

Анализ полученного решения показывает, что первое слагаемое в (2.8) представляет собой решение для изолированной среды, остальные слагаемые описывают вклад среды, окружающей центральный слой. В ближней зоне этот вклад мал.

Согласно теореме о соответствиях для синус-преобразования Фурье из (2.8), (2.4) получаем асимптотическое выражение для комплексной амплитуды в пространстве изображений в ближней зоне в нулевом приближении:

$$P^{(0)u} = \frac{sP_0}{\varphi^2 + s^2 + \varkappa_1\varphi_1/2 + \varkappa_2\varphi_2/2}, \qquad P_1^{(0)u} = \frac{sP_0\,\mathrm{e}^{-\varphi_1(z-1)}}{\varphi^2 + s^2 + \varkappa_1\varphi_1/2 + \varkappa_2\varphi_2/2},$$

$$P_2^{(0)u} = \frac{sP_0\,\mathrm{e}^{\varphi_2(z+1)}}{\varphi^2 + s^2 + \varkappa_1\varphi_1/2 + \varkappa_2\varphi_2/2}$$

(верхние индексы в скобках соответствуют номеру асимптотического разложения). Используя обратное преобразование Фурье [9] и соотношение

$$\frac{s}{a^2 + s^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-ax},$$

получаем следующие выражения для нулевого приближения:

$$P^{(0)} = P_0\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\varphi^2+\varkappa_1\varphi_1/2+\varkappa_2\varphi_2/2}\,x}; \tag{3.1}$$

$$P_1^{(0)} = P_0\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\varphi^2+\varkappa_1\varphi_1/2+\varkappa_2\varphi_2/2}\,x}\,\mathrm{e}^{-\varphi_1(z-1)}; \tag{3.2}$$

$$P_2^{(0)} = P_0\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\varphi^2+\varkappa_1\varphi_1/2+\varkappa_2\varphi_2/2}\,x}\,\mathrm{e}^{\varphi_2(z+1)}\,. \tag{3.3}$$

Для получения дисперсионных соотношений выражение (3.1) записывается в виде

$$P^{(0)} = P_0 \exp\left(-(\alpha + i\beta)x\right).$$

Коэффициент поглощения α определяется из выражения

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_2 - 2A\omega^2) + \sqrt{(\varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_2 - 2A\omega^2)^2 + (\varkappa_1\delta_1 + \varkappa_2\delta_2 + 2\omega)^2}}{4}}, \tag{3.4}$$

где

$$\delta_1 = \sqrt{\left(\omega\sqrt{A^2\nu_1^2\omega^2 + \eta_1^2} - A\nu_1\omega^2\right)/2}, \qquad \sigma_1 = \sqrt{\left(\omega\sqrt{A^2\nu_1^2\omega^2 + \eta_1^2} + A\nu_1\omega^2\right)/2},$$

$$\delta_2 = \sqrt{\left(\omega\sqrt{A^2\nu_2^2\omega^2 + \eta_2^2} - A\nu_2\omega^2\right)/2}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\left(\omega\sqrt{A^2\nu_2^2\omega^2 + \eta_2^2} + A\nu_2\omega^2\right)/2},$$

волновое число β — из выражения

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(\varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_2 - 2A\omega^2)^2 + (\varkappa_1\delta_1 + \varkappa_2\delta_2 + 2\omega)^2} - (\varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_2 - 2A\omega^2)}{4}}. \tag{3.5}$$

Выражение для фазовой скорости волны $v = \omega/\beta$ запишем в виде

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{\left[\sqrt{(\varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_2 - 2A\omega^2)^2 + (\varkappa_1\delta_1 + \varkappa_2\delta_2 + 2\omega)^2} - (\varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_2 - 2A\omega^2)\right]/4}}. \tag{3.6}$$

Подставляя в выражения (3.4)–(3.6) соотношения (1.7), нетрудно показать, что в размерных координатах коэффициент поглощения, волновое число и фазовая скорость не зависят от толщины центрального слоя, а являются функциями частоты и параметров среды. В случае однородной среды соотношения (3.4)–(3.6) имеют вид соответственно [10]

$$\alpha_h = \sqrt{(\omega\sqrt{A^2\omega^2 + 1} - A\omega^2)/2}, \qquad \beta_h = \frac{\omega}{2\alpha_h} = \sqrt{\omega(\sqrt{A^2\omega^2 + 1} + A\omega)/2},$$

$$v_h = \frac{\omega}{\beta_h} = 2\alpha_h = \sqrt{2\omega(\sqrt{A^2\omega^2 + 1} - A\omega)}.$$

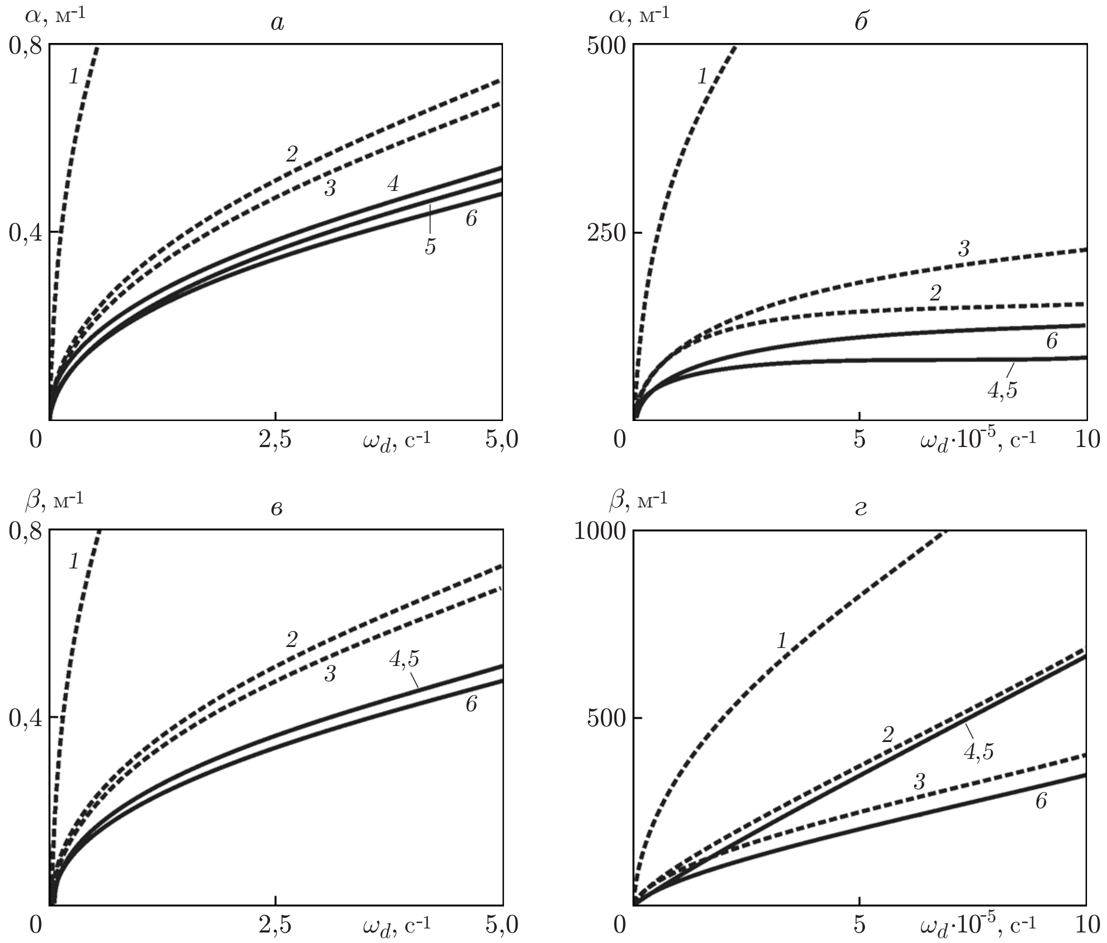

Рис. 1. Зависимости коэффициента поглощения (*а, б*) и волнового числа (*в, г*) фильтрационных волн от частоты для различных сред:

а — малые частоты, *б* — большие частоты; *1–3* — однородная среда (*1* — глинистый песчаник ($\chi = 0{,}42$ м^2/с, $c = 1200$ м/с), *2* — нефтенасыщенный песчаник ($\chi = 4{,}8$ м^2/с, $c = 1500$ м/с), *3* — водонасыщенный песчаник ($\chi = 5{,}5$ м^2/с, $c = 3000$ м/с)); *4–6* — слоисто-неоднородная среда (*4* — среда I, *5* — среда II, *6* — среда III)

Умножая решение задачи в нулевом приближении на $\mathrm{e}^{i\omega t}$, действительную часть решения (3.1)–(3.3) запишем в виде

$$P^{(0)} = P_0 \,\mathrm{e}^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x); \qquad (3.7)$$

$$P_1^{(0)} = P_0 \,\mathrm{e}^{-\alpha x - \delta_1 (z-1)} \cos(\omega t - \beta x - \sigma_1 (z-1)); \qquad (3.8)$$

$$P_2^{(0)} = P_0 \,\mathrm{e}^{-\alpha x + \delta_2 (z+1)} \cos(\omega t - \beta x + \sigma_2 (z+1)), \qquad (3.9)$$

где σ_1, σ_2, δ_1, δ_2 — вспомогательные функции.

Из (3.7)–(3.9) следует, что волновой процесс в нулевом приближении (или “в среднем”) в центральном пласте можно представить в виде плоской затухающей волны, распространяющейся вдоль оси x. Эта волна возбуждает на линии $z = 1$ бегущую по z затухающую в окружающих породах волну со сдвигом фазы $-\beta x$, соответствующим приходу в точку x возбуждающей волны.

4. Анализ результатов расчетов. При расчетах частотных зависимостей параметров фильтрационно-волновых полей в слоисто-неоднородных проницаемых пластах рас-

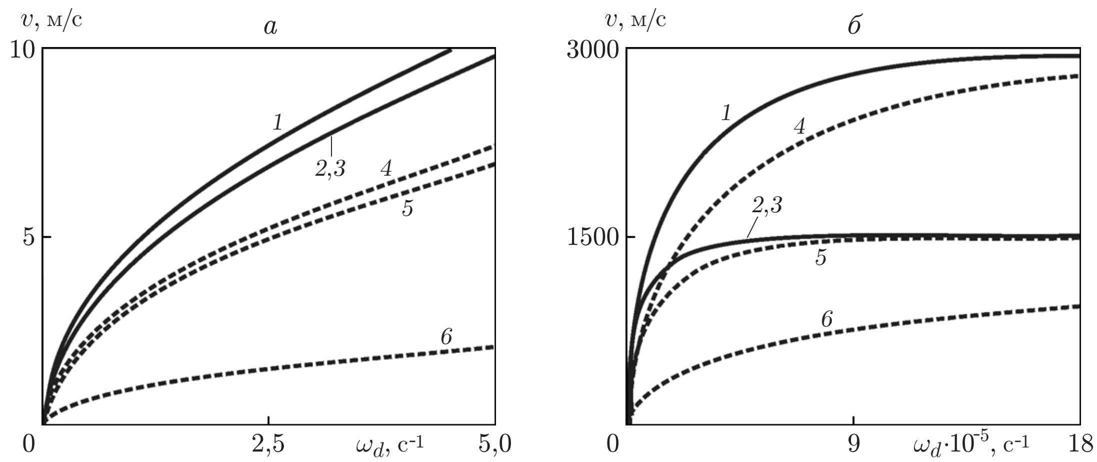

Рис. 2. Зависимости фазовой скорости фильтрационных волн от частоты для различных сред:

а — малые частоты, *б* — большие частоты; *1–3* — слоисто-неоднородная среда (*1* — среда I, *2* — среда II, *3* — среда III), *4–6* — однородная среда (*4* — глинистый песчаник, *5* — нефтенасыщенный песчаник, *6* — водонасыщенный песчаник)

сматривались слоистые проницаемые среды в следующих комбинациях: I — водонасыщенный песчаник (настилающий слой), нефтенасыщенный песчаник (центральный слой), глинистый песчаник (подстилающий слой); II — нефтенасыщенный песчаник (центральный слой), глинистый песчаник (настилающий и подстилающий слои); III — водонасыщенный песчаник (центральный слой), глинистый песчаник (настилающий и подстилающий слои).

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента поглощения и волнового числа фильтрационных волн от частоты в различных средах. Видно, что в слоисто-неоднородной среде коэффициент поглощения меньше во всем диапазоне частот. Из рис. 1 также следует, что высокочастотные гармоники фильтрационных волн быстро затухают.

На рис. 2 представлены зависимости фазовой скорости от частоты для различных сред. На рис. 2,*а* видно, что при малых значениях частоты фазовая скорость фильтрационных волн меньше скорости упругих волн более чем на порядок. При увеличении частоты фазовая скорость возрастает и при высоких частотах приближается к скорости распространения упругих акустических волн (см. рис. 2,*б*).

Приведенные частотные зависимости коэффициента поглощения и фазовой скорости позволяют прогнозировать уменьшение скорости волнового пакета типа ударной волны в пористой среде (низкочастотное торможение). Действительно, высокочастотные гармоники сигнала быстро затухают (см. рис. 1). При этом относительно медленно затухающие низкочастотные гармоники перемещаются на значительные расстояния от источника. Однако согласно рис. 2 они имеют малую скорость. Поэтому экспериментальная регистрация волновых полей в пористой среде позволяет обнаружить аномальное уменьшение скорости фильтрационных волн при малых частотах, обусловленное уменьшением эффективной упругости среды вследствие относительного смещения жидкой или газовой фазы. Низкочастотное торможение имеет место также в однородной среде [10].

Таким образом, развитая теория фильтрационно-волновых полей давления позволяет уточнить представления о распространении возмущений в пористой среде и подтверждает, что в области малых частот скорость существенно уменьшается по сравнению со скоростью распространения упругих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мазо А. Б., Калинин Е. И., Булыгин Д. В.** Моделирование двухфазной фильтрации в окрестности тектонического разлома нефтяного пласта // Георесурсы. 2013. № 3. С. 14–16.
2. **Гурьянов А. И., Ахмеров А. В., Али Ниджрс А. Р. и др.** Моделирование упругого режима двумерной плоско-радиальной фильтрации при обработке призабойной зоны скважины с помощью мобильной пульсационной установки // Вестн. Казан. гос. энерг. ун-та. 2015. № 4. С. 44–51.
3. **Бахтий Н. С., Кутрунов В. Н.** Приток жидкости к несовершенной скважине из радиального пласта // Вестн. Тюм. гос. ун-та. 2010. № 6. С. 134–139.
4. **Ахметова О. В., Михайлов П. Н., Филиппов И. М.** Новый метод исследования полей давления в неоднородном ортотропном пористом пласте // Вестн. Башкир. гос. ун-та. 2013. Т. 18, № 2. С. 363–366.
5. **Ентов В. М., Чехонин Е. М.** Поле давления вокруг скважины в слоисто-неоднородном пласте // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 83–90.
6. **Филиппов А. И., Ахметова О. В.** Представление фильтрационно-волновых полей в слоистой анизотропной среде в виде плоской волны. Ч. 1 // Вестн. Тюм. гос. ун-та. Физ.-мат. моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, № 1. С. 65–76.
7. **Филиппов А. И., Ахметова О. В.** Представление фильтрационно-волновых полей в слоистой анизотропной среде в виде плоской волны. Ч. 2 // Вестн. Тюм. гос. ун-та. Физ.-мат. моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, № 2. С. 92–103.
8. **Филиппов А. И., Ахметова О. В., Заманова Г. Ф., Ковальский А. А.** Спектральные соотношения для фильтрационно-волновых полей в неоднородных проницаемых пористых пластах // Нефтегазовое дело: Электрон. науч. журн. 2014. № 2. С. 1–13.
9. **Бейтмен Г.** Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1970.
10. **Филиппов А. И., Ахметова О. В.** Одномерные монохроматические плоские фильтрационные волны // Инж.-физ. журн. 2015. Т. 88, № 2. С. 285–290.

Поступила в редакцию 9/XI 2015 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2017 г.