

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ СХОДЯЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

В. Е. Рагозина*, О. В. Дудко*,**

* Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия

** Дальневосточный федеральный университет, 690950 Владивосток, Россия

E-mails: ragozina@vlc.ru, dudko@iacp.dvo.ru

Решена нестационарная одномерная краевая задача об ударном деформировании среды, ограниченной сферой. Исследованы особенности распространения сходящихся волновых фронтов деформаций в упругом материале с различным сопротивлением растяжению и сжатию. Получено краевое условие, при котором возникает сходящаяся сферическая ударная волна с постоянной скоростью. Определен режим воздействия на границе разномодульной сферы, при котором может возникнуть переходная зона между областями сжатия и растяжения — сферический слой постоянной плотности.

Ключевые слова: упругость, разномодульность, динамика деформирования, разрыв деформаций, сходящаяся сферическая волна, ударная волна.

DOI: 10.15372/PMTF20160414

Введение. Особенности динамического деформирования разномодульных упругих сред исследовались при решении краевых или начальных задач с плоскими одномерными передними волновыми фронтами в полуограниченном или неограниченном пространстве (см., например, [1–6]). Актуальность таких работ, описывающих нестационарные быстропротекающие деформационные процессы, очевидна: если среда достаточно разрежена (зернистая [7], сыпучая или пористая [8]), различие деформаций, достигаемых при ее сжатии и растяжении, может быть значительным. Существует ряд подходов к описанию деформационных свойств подобных материалов. Так, в наиболее простом случае плоских одномерных волн определяющие соотношения в моделях Амбарцумяна — Хачатряна [9] и Мясникова — Олейникова [10, 11] дают одинаковые кусочно-линейные уравнения движения, решения которых в разномодульном полупространстве содержат ударные волны с постоянными и переменными скоростями распространения, центрированные волны, ограничивающие области с нулевыми деформациями, простые разрывы, разделяющие области с одним и тем же деформированным состоянием (сжатие или растяжение) [1, 2, 5, 6]. Аналогичная волновая картина получена в [4] при анализе задачи о растяжении-сжатии разномодульного одномерного стержня с использованием метода малого параметра [12]. В настоящей работе решается задача о возникновении и распространении сходящихся сферических волн в разномодульной упругой среде.

1. Общие модельные соотношения и постановка краевой задачи. Движение разномодульной изотропной упругой среды в адиабатическом приближении при отсут-

ствии массовых сил определяется системой уравнений, записанных в декартовых переменных Эйлера x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & \rho &= \rho_0 \det(\delta_{ij} - u_{i,j}), & v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), & \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\ W &= W(J_1, J_2, J_3), & J_1 &= \alpha_{ii}, & J_2 &= \alpha_{ij}\alpha_{ij}, & J_3 &= \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u_i, v_i — компоненты вектора перемещений и вектора скорости перемещений точек среды; α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши; ρ, ρ_0 — плотность среды в текущем и свободном состояниях; δ_{ij} — символ Кронекера; W — упругий потенциал; частная производная по времени t обозначена точкой ($\dot{f} = \partial f / \partial t$), по пространственной переменной x_j — нижним латинским индексом после запятой ($f_{,j} = \partial f / \partial x_j$). Переход к криволинейным координатам x^1, x^2, x^3 при необходимости проводится по стандартным правилам преобразования тензорных величин. Свойство разномодульности упругой среды учитывается структурой функции $W(J_1, J_2, J_3)$. В модели Мясникова — Олейникова [10] эта функция задана зависимостью

$$W(J_1, J_2, J_3) = \frac{\lambda}{2} J_1^2 + \mu J_2 - \nu J_1 \sqrt{J_2} + \alpha \frac{J_1^3}{\sqrt{J_2}} + \beta \frac{J_3}{\sqrt{J_2}} + \dots, \quad (1.2)$$

в которой слагаемые с коэффициентами Ламе λ и μ соответствуют линейной модели Гука, а разномодульные свойства учитываются за счет дополнительных слагаемых второго и более высоких порядков однородности, являющихся неаналитическими при описании свободного состояния (коэффициенты ν, α, β характеризуют степень микронеоднородности среды). В модели Амбарцумяна — Хачатряна [9] переход от значений модулей упругости при растяжении к значениям этих модулей при сжатии происходит скачкообразно. Наиболее простые определяющие соотношения можно получить для обеих моделей, сохраняя в них только слагаемые второго порядка по деформациям, а в системе (1.1) — выполняя линеаризацию всех соотношений.

Для одномерных краевых задач ($u = u_1(x_1, t), u_2 = u_3 = 0$) в случае кусочной линеаризации соотношений (1.1) получаем уравнение движения

$$c^2 u_{,11} = \ddot{u}, \quad c^2 = \begin{cases} (\lambda + 2\mu + 2\nu) / \rho_0 = a^2, & u_{,1} < 0, \\ (\lambda + 2\mu - 2\nu) / \rho_0 = b^2, & u_{,1} > 0, \end{cases} \quad \nu > 0, \quad a > b, \quad (1.3)$$

где характеристическая скорость a соответствует “быстрому” процессу сжатия среды, характеристическая скорость b — “медленному” процессу растяжения, состояние $u_{,1} = 0$ является особой точкой кусочно-линейной модели. Изменение значений характеристической скорости может происходить, например, в том случае, если растягивающие усилия на границе полупространства заменяются сжимающими (или наоборот). Свойства начальных и краевых задач для уравнения (1.3) изучались в [1, 2].

В предположении геометрической линейности модели (т. е. считая, что $\alpha_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$), решим наиболее простую задачу о распространении волновых поверхностей с ненулевой кривизной — сферических продольных волн в среде, ограниченной сферой радиусом R . Переходя в пространстве к сферическим координатам $x^1 = r$ ($0 \leq r \leq R$), $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$, из (1.1), (1.2) в случае сферической симметрии получаем

$$\begin{aligned} u &= u_r(r, t), & \alpha_{rr} &= u_{r,r}, & \alpha_{\varphi\varphi} &= \alpha_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \\ J_1 &= u_{r,r} + 2 \frac{u_r}{r}, & J_2 &= u_{r,r}^2 + 2 \left(\frac{u_r}{r} \right)^2, & W &= \frac{\lambda}{2} J_1^2 + \left(\mu - \nu \frac{J_1}{\sqrt{J_2}} \right) J_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из выражения для функции W в (1.4) следует, что даже если в (1.2) оставить три слагаемых, то и в этом случае модель (1.2) будет описывать различное поведение среды при растяжении ($J_1 > 0$) или сжатии ($J_1 < 0$). При движении вдоль любой траектории в пространстве деформаций будет учитываться различная реакция среды на растяжение и сжатие, поскольку модуль упругости $\mu^* = \mu - \nu J_1 / \sqrt{J_2}$ зависит от направления деформации. Поэтому рассмотрим другое представление функции $W(J_1, J_2)$:

$$W(J_1, J_2) = \frac{\lambda}{2} J_1^2 + \mu J_2 - \nu J_1 |J_1| = \left(\frac{\lambda}{2} - \nu \operatorname{sign}(J_1) \right) J_1^2 + \mu J_2, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{sign}(J_1) = \begin{cases} 1, & J_1 > 0, \\ -1, & J_1 < 0. \end{cases}$$

Подставляя функцию (1.5) в соотношения (1.1), для $u_r(r, t)$ получаем уравнение движения со сферическим оператором в левой части:

$$c^2 \left(u_{r,rr} + 2 \frac{u_{r,r}}{r} - 2 \frac{u_r}{r^2} \right) = \ddot{u}_r, \quad c^2 = \begin{cases} (\lambda + 2\mu + 2\nu)/\rho_0 = a^2, & J_1 < 0, \\ (\lambda + 2\mu - 2\nu)/\rho_0 = b^2, & J_1 > 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь, как и выше, $a > b$ при $\nu > 0$. Это уравнение будем решать при начальном условии

$$u_r(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R$$

и краевом условии

$$u_r(R, t) = \phi(t), \quad t \geq 0, \quad \phi(0) = 0, \quad (1.7)$$

считая $\phi(t)$ известной функцией. Далее рассмотрим несколько вариантов функции $\phi(t)$, соответствующих различным волновым картинам в среде.

2. Режим сжатия-растяжения для сходящихся сферических волн. Пусть на границе сферы функция $\phi(t)$ в (1.7) задана в виде (рис. 1,а)

$$\phi(t)|_{r=R} = v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}, \quad v_0 = \operatorname{const} < 0, \quad a_0 = \operatorname{const} > 0, \quad (2.1)$$

т. е. на начальной стадии деформации происходит сжатие среды, а затем — растяжение. Такое воздействие инициирует в момент времени $t = 0$ в недеформированной среде “быструю” сходящуюся волну с координатой фронта $r_1(t) = R - at$ (рис. 1,б), за которым поле перемещений определяется из уравнения движения (1.6) и условия (2.1):

$$u_r^I(r, t) = \frac{\Phi'(\xi)}{r} - \frac{\Phi(\xi)}{r^2}, \quad \xi = r - R + at,$$

$$\Phi(\xi) = - \left(V_0(\xi + R) + \frac{A_0}{2} (\xi^2 + 2R\xi + 2R^2) \right) + (V_0 R + A_0 R^2) e^{\xi/R}, \quad (2.2)$$

$$\Phi'(\xi) = -(V_0 + A_0(\xi + R)) + (V_0 + A_0 R) e^{\xi/R}, \quad V_0 = \frac{v_0 R^2}{a}, \quad A_0 = \frac{a_0 R^2}{a^2}.$$

Здесь римские цифры в верхних индексах обозначают номера областей, в которых решение (перемещения, деформации) изменяется гладко и непрерывно. Согласно (2.2) инвариант J_1^I в области I (см. рис. 1,б) вычисляется по формуле

$$J_1^I = u_{r,r}^I + 2 \frac{u_r^I}{r} = \frac{\Phi''(\xi)}{r} = -\frac{A_0}{r} + \frac{A_0 + V_0/R}{r} e^{\xi/R}, \quad J_1^I|_{\xi=0} = \frac{V_0}{Rr}.$$

Для одномерной краевой задачи с плоскими волнами при условии (2.1) переход от сжатия к растяжению определяется только заданными константами v_0 , a_0 , деформированное состояние изменяется при $\phi'(t) = 0$ в момент времени $t = -v_0/a_0$. Такое свойство

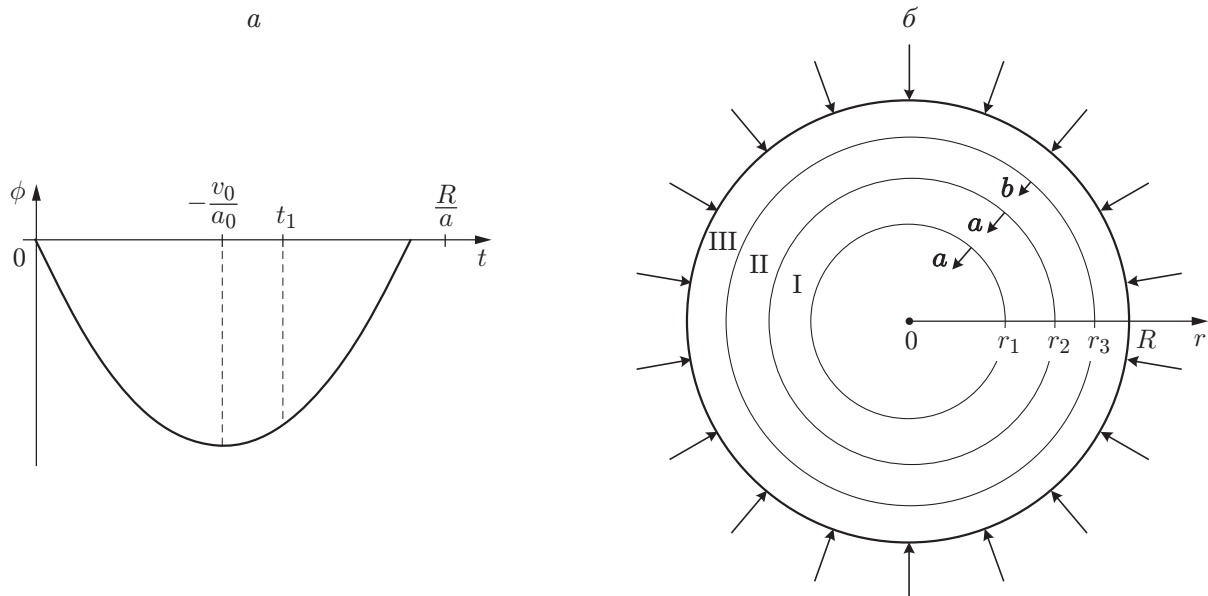


Рис. 1. Радиальное сжатие-растяжение разномодульной сферы:

a — заданная на границе R функция перемещений, соответствующая режиму сжатия-растяжения, b — волновая картина (I — область сжатия, II — переходная область ($J_1^{\text{II}} = 0$), III — область растяжения, a, b — скорости “быстрого” и “медленного” волновых фронтов соответственно)

не является универсальным. Действительно, в данном случае инвариант J_1 изменяется непрерывно за фронтом $r_1(t)$ и впервые становится равным нулю на границе R в момент $t_1 = (R/a) \ln(a_0/(a_0 + v_0 a/R))$, т. е. время перехода от состояния сжатия к состоянию растяжения зависит одновременно от констант среды, положения границы R и констант в краевом условии (2.1). Кроме того, можно показать, что смена знака J_1 для сферических волн происходит позднее, чем для плоских волн ($t_1 > -v_0/a_0$). Возможна ситуация, когда этот переход не возникает за времена, характерные для динамических процессов, или момент прихода переднего фронта (волны сжатия) в центр сферы $t = R/a$ оказывается меньше t_1 . Исключая эти случаи, рассмотрим решение при $t_1 < R/a$. В момент t_1 от границы R отделяются два волновых фронта с координатами $r_2(t) = R - a(t - t_1)$ и $r_3(t) = R - b(t - t_1)$ (см. рис. 1, б). Между “быстрым” $r_2(t)$ и “медленным” $r_3(t)$ фронтами заключен слой II с линейно растущей во времени толщиной: $r_3(t) - r_2(t) = (a - b)(t - t_1)$. Согласно условию непрерывности перемещений на волновых фронтах деформаций перемещение u_r^{I} на переднем фронте $r_2(t)$ такого слоя принимает значение

$$u_r^{\text{I}}(r, t_2) = \frac{\Phi'_\alpha}{r} - \frac{\Phi_\alpha}{r^2}, \quad (2.3)$$

$$\Phi_\alpha = \Phi(at_1) = \text{const}, \quad \Phi'_\alpha = \Phi'(at_1) = \text{const}$$

(t_2 — время прохождения волнового фронта $r_2(t)$ через границу поверхности r). В отличие от задачи с плоскими волнами в рассматриваемом случае нельзя предположить, что в слое II при $r_2(t) \leq r \leq r_3(t)$ перемещения постоянны. Можно считать, что $J_1^{\text{II}} = u_{r,r}^{\text{II}} + 2u_r^{\text{II}}/r = 0$, откуда следует

$$u_r^{\text{II}}(r, t) = \frac{K(t)}{r^2}, \quad (2.4)$$

где $K(t)$ — неизвестная функция. Из условия непрерывности перемещений на фронте $r_2(t)$

$$u_r^{\text{I}}|_{r=r_2(t)} = u_r^{\text{II}}|_{r=r_2(t)}$$

для функции $K(t)$ из (2.2)–(2.4) получаем

$$K(t) = R^2\phi(t_1) - a\Phi'_\alpha(t - t_1).$$

Для такой функции $K(t)$ перемещение (2.4) удовлетворяет уравнению движения в слое II. Этот слой можно рассматривать как центрированную волну, в которой осуществляется непрерывный переход от сжатия к растяжению. Для области III ($r_3(t) \leq r \leq R$) (см. рис. 1, б) решение u_r^{III} строится на основе предположения

$$u_r^{\text{III}}(r, t) = \frac{F'(\eta)}{r} - \frac{F(\eta)}{r^2}, \quad \eta = r - R + b(t - t_1), \quad (2.5)$$

где функция $F(\eta)$ неизвестна. Для данного поля перемещений выполняются краевые условия

$$\begin{aligned} u_r^{\text{III}}|_{r=r_3(t)} &= u_r^{\text{II}}|_{r=r_3(t)}, & J_1^{\text{III}}|_{r=r_3(t)} &= J_1^{\text{II}}|_{r=r_3(t)} = 0, \\ u_r^{\text{III}}|_{\substack{r=R \\ t \geq t_1}} &= v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

из которых следует

$$F'(\eta) = \frac{F(\eta)}{R} + B_0 + B_1\eta + B_2\eta^2, \quad (2.7)$$

$$B_0 = Rv_0t_1 + R\frac{a_0}{2}t_1^2 = R\phi(t_1), \quad B_1 = R\frac{v_0}{b} + R\frac{a_0}{b}t_1 = \frac{R}{b}\phi'(t_1), \quad B_2 = R\frac{a_0}{2b^2}.$$

В результате интегрирования уравнения (2.7) с учетом краевых условий (2.6) на границе $r = r_3(t)$ определяется функция $F(\eta)$:

$$F(\eta) = -R[B_0 + (R + \eta)(B_1 + 2B_2R) + B_2\eta^2] + 2B_2R^3 e^{\eta/R}.$$

Таким образом, решение (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} u_r^{\text{III}}(r, t) &= \frac{2B_2R^2 e^{\eta/R} - R(B_1 + 2B_2R) - 2B_2R\eta}{r} - \\ &\quad - \frac{2B_2R^3 e^{\eta/R} - R(B_0 + (1 + R)(B_1 + 2B_2R) + B_2\eta^2)}{r^2}. \end{aligned}$$

В полученном решении поверхности $r = r_2(t)$ и $r = r_3(t)$ являются волнами слабых разрывов. Внутри области II при $r_2(t) \leq r \leq r_3(t)$ поле деформаций изменяется в соответствии с условием $J_1^{\text{II}} = 0$. Таким образом, в данной задаче, в отличие от плоской задачи [5], область II не является жесткой.

3. Режим растяжения-сжатия для сходящихся сферических волн. Предположим, что на сферической границе R той же среды задано некоторое воздействие, в результате чего до момента времени $t = t_2 > 0$ создается область растяжения (область I на рис. 2, а), при $t \geq t_2$ среда скачкообразно переходит в состояние сжатия (область II на рис. 2, а). С учетом данных о модулях упругости будем считать, что передним фронтом области растяжения (область I) является “медленная” волна $r_1(t)$, а передним фронтом области сжатия (область II) — ударная волна $r_\Sigma(t)$. Изменения параметров напряженно-деформированного состояния на ударной волне определяются динамическими условиями совместности разрывов [13] — следствиями законов сохранения для сплошной среды. В частности, из закона сохранения импульса для данной задачи при $r = r_\Sigma(t)$ следует

$$[\sigma_{ij}]n_j = -\rho_0 G[v_i], \quad [v_i] = v_i^+ - v_i^-, \quad [\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-. \quad (3.1)$$

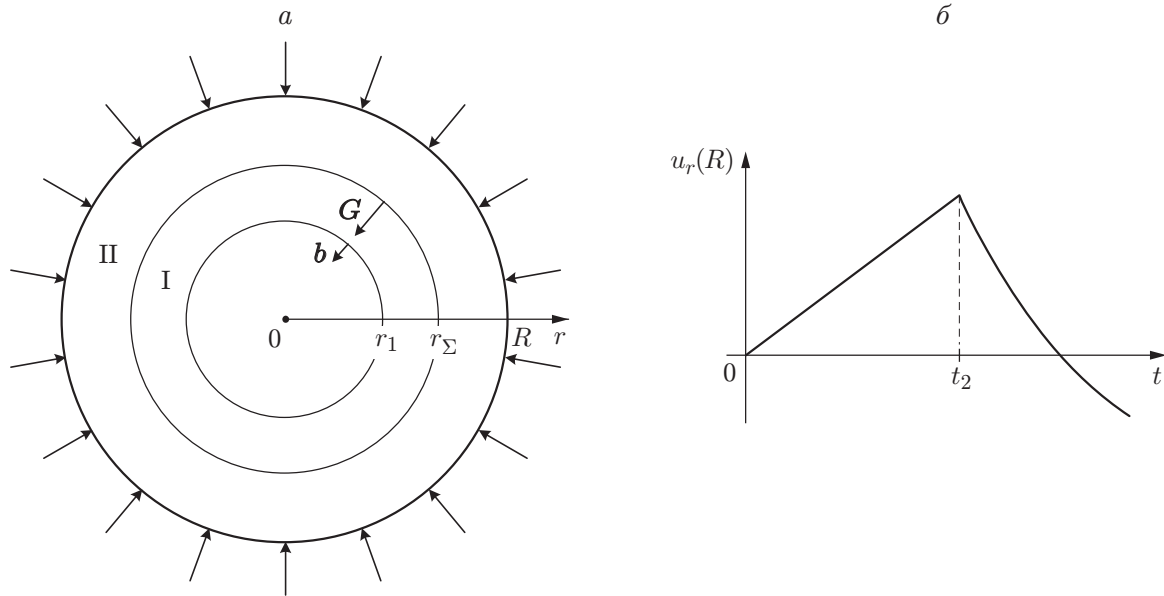


Рис. 2. Радиальное растяжение-сжатие разномодульной сферы: *a* — волновая картина при наличии ударной волны $r_{\Sigma}(t)$ (I — область растяжения, II — область сжатия), *б* — функция перемещений $u_r(R)$, соответствующая режиму растяжения-сжатия

Здесь n_i — компоненты единичной нормали \mathbf{n} к ударной волне, направление которой совпадает с направлением распространения этой волны; G — скорость ударной волны ($\mathbf{G} = G\mathbf{n}$); квадратные скобки обозначают скачок разрывной функции на ударной волне $r_{\Sigma}(t)$; индекс “+” соответствует значению функции непосредственно перед волной, “-” — непосредственно за ней. Из условия (3.1) и соотношений (1.4) с учетом условия непрерывности перемещений на ударной волне

$$\left[\frac{u_r}{r} \right] = 0 \tag{3.2}$$

для скорости G получаем выражение

$$G^2 = a^2 - 4 \frac{\nu}{\rho_0} \frac{J_1^+}{[J_1]} = a^2 - 4 \frac{\nu}{\rho_0} \frac{J_1^+}{[u_{r,r}]}, \tag{3.3}$$

из которого следует, что в общем случае ударная волна $r_{\Sigma}(t)$ движется с переменной скоростью.

Предположим, что до момента времени t_2 (рис. 2, б) на границе R выполняется условие

$$u_r(R, t) = v_0 t, \quad v_0 > 0, \quad 0 \leq t \leq t_2 < R/b, \tag{3.4}$$

которому в области I соответствует решение

$$u_r^I(r, t) = \frac{\Phi'(\zeta)}{r} - \frac{\Phi(\zeta)}{r^2}, \quad \zeta = r - R + bt \geq 0, \tag{3.5}$$

$$\Phi(\zeta) = R^2 \frac{v_0}{b} (-\zeta - R + r e^{\zeta/R}), \quad J_1^I = \frac{\Phi''(\zeta)}{r} = R \frac{v_0}{b} \frac{e^{\zeta/R}}{r}.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, среда за “медленным” фронтом $r_1(t)$ находится в состоянии растяжения ($J_1^I > 0$ при $v_0 > 0$). Будем считать, что начиная с момента $t = t_2$ изменение граничного условия (3.4) приводит к возникновению ударной волны $r_{\Sigma}(t)$

и переходу среды в состояние сжатия в области II. Положение ударной волны определяется из уравнения

$$r_{\Sigma}(\tau) = R - \int_0^{\tau} G(\xi) d\xi, \quad \tau = t - t_2 \quad (3.6)$$

и формулы (3.3), т. е. в общем случае заранее неизвестно.

Соотношения (3.1)–(3.3) являются дополнительными краевыми условиями задачи, которые должны быть выполнены на поверхности (3.6). Координата фронта $r_{\Sigma}(\tau)$ входит в аргументы функций, определяющих решение для волновых сферических операторов, что существенно затрудняет поиск точных решений для задач в прямой постановке. В то же время, если динамика ударной волны известна, то можно выполнить краевые условия на ударной волне, построить решение для области за ударной волной и затем, записывая это решение при $r = R$, определить соответствующие условия для перемещений на границе сферы. Единственным ограничением для построения решения обратным методом является то, что полученные граничные условия не всегда можно реализовать на практике. Рассмотрим данную краевую задачу в предположении, что скорость ударной волны постоянна: $G = G_0 = \text{const}$ ($b < G_0 < a$). В этом случае из (3.4)–(3.6) получаем

$$\begin{aligned} u_r(R, t_2) = v_0 t_2 = u_0, \quad J_1^+|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} &= \frac{v_0 R}{b} \frac{e^{(bt_2 + (b-G_0)\tau)/R}}{R - G_0 \tau}, \\ u_r^{\text{II}}(r, t) &= \left(\frac{\Psi(\omega_1)}{r} + \frac{H(\omega_2)}{r} \right)_{,r}, \quad \omega_1 = r - R + a\tau, \quad \omega_2 = r - R - a\tau, \quad (3.7) \\ J_1^-|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} &= \varkappa J_1^+|_{r=r_{\Sigma}(\tau)}, \quad \varkappa = \frac{a^2 - G_0^2}{b^2 - G_0^2} = \text{const} < 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в (3.7) можно задать либо G_0 , либо \varkappa , поскольку эти константы связаны. Из условий (3.1), (3.2), (3.7) на ударной волне следует

$$\begin{aligned} \{\Psi''(\vartheta_1) + H''(\vartheta_2)\}|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} &= \varkappa \Phi''(\vartheta_3)|_{r=r_{\Sigma}(\tau)}, \\ \left(\frac{\Psi'(\vartheta_1) + H'(\vartheta_2)}{r} - \frac{\Psi(\vartheta_1) + H(\vartheta_2)}{r^2} \right) \Big|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} &= \left(\frac{\Phi'(\vartheta_3)}{r} - \frac{\Phi(\vartheta_3)}{r^2} \right) \Big|_{r=r_{\Sigma}(\tau)}, \quad (3.8) \\ \vartheta_1|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} &= (a - G_0)\tau = s, \quad \vartheta_2|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} = -(a + G_0)\tau = -\frac{a + G_0}{a - G_0} s, \\ \vartheta_3|_{r=r_{\Sigma}(\tau)} &= \frac{b - G_0}{a - G_0} s. \end{aligned}$$

Функции в правых частях соотношений (3.8), определяющие поле деформаций растяжения, определяются решением (3.5). Левые части в (3.8) представляют собой суперпозицию приходящих и отраженных волн. Ниже показано, что наличие отраженных волн (функция $H(\vartheta_2)$) оказывает существенное влияние на решение за ударной волной, особенно если модуль упругости ν одного порядка с λ и μ . В ряде работ (см., например, [4]) при использовании метода малого параметра предполагается, что $\nu/\lambda \ll 1$, $\nu/\mu \ll 1$. Это позволяет утверждать, что при $t \ll 1$ влияние отраженных волн является несущественным. Для реальных материалов модуль упругости ν может на порядки превышать λ , μ [11]. В этом случае применение малого параметра исключено и точное решение целесообразно получать описываемым методом. В рассматриваемой задаче все аргументы ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 пропорциональны одной переменной s , поэтому уравнения (3.8) можно последовательно

проинтегрировать по s необходимое число раз. Это позволяет определить в (3.7) исходные функции $\Psi(\omega_1)$ и $H(\omega_2)$:

$$\begin{aligned} \Psi(\omega_1) &= -E_0 \frac{a+b}{2a} u^* R s_0 e^{-\omega_1/s_0} + C_0 \left(R + \frac{1-\delta}{2} \omega_1 \right)^2 + C_1 \left(R + \frac{1-\delta}{2} \omega_1 \right) + C_2, \\ H(\omega_2) &= \delta^2 \left[E_0 \frac{a+b}{2a} u^* R s_0 e^{\omega_2/(\delta s_0)} - C_0 \left(R - \frac{1-\delta}{2} \frac{\omega_2}{\delta} \right)^2 - C_1 \left(R - \frac{1-\delta}{2} \frac{\omega_2}{\delta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - C_2 + s_0^2 \varkappa u^* E_0 e^{\omega_2/(\delta s_0)} - K_0 \frac{\omega_2}{\delta} + K_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{a+G_0}{a-G_0}, \quad s_0 = -\frac{a-G_0}{b-G_0} R, \quad u^* = \frac{v_0 R}{b}, \quad E_0 = e^{bt_2/R}, \\ K_0 &= \frac{1-\delta}{\delta(1+\delta)} \left(-\frac{1-\delta^2}{2} C_1 + \frac{b}{G_0} R u^* \right), \\ K_1 &= \frac{1}{\delta^2} \left(-C_1 R (1-\delta) \delta - C_2 (1-\delta^2) - \frac{1-\delta}{1+\delta} R^2 u^* \frac{b}{G_0} - R u^* B_0 \right). \end{aligned}$$

В (3.9) величина \varkappa (а следовательно, G_0 , δ , s_0 , u^*) является параметром. Константы C_0 , C_1 , C_2 появляются в результате интегрирования и пока произвольные. Для их конкретизации требуются дополнительные краевые условия, что на первый взгляд вносит неоднозначность в определение перемещений за $r_{\Sigma}(t)$. Слагаемым, входящим в выражения для $\Psi(\omega_1)$ и $H(\omega_2)$ в (3.9) и содержащим константы C_0 , C_1 , C_2 , соответствуют нулевые перемещения, следовательно, эти слагаемые можно отбросить. С учетом этого, подставляя в (3.7), (3.9) координату границы $r = R$, при $t \geq t_2$ получаем граничные перемещения (см. рис. 2,б), соответствующие поставленной задаче:

$$u_r(R, t) = u_0 + v_0 \tau + E_0 u^* \frac{a+b}{2a} \frac{a-b}{G_0-b} \left(e^{-a\tau/s_0} - e^{-a\tau/(\delta s_0)} \right), \quad \tau = t - t_2. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует

$$\dot{u}_r(R, 0) = v_0 \left(1 + e^{bt_2/R} \frac{G_0}{b} \frac{a^2 - b^2}{G_0^2 - a^2} \right) < 0,$$

поскольку $e^{bt_2/R} > 1$, $G_0/b > 1$, $b^2 < G_0^2 < a^2$. Следовательно, при замене на границе $r = R$ в момент времени $t = t_2$ краевого условия (3.3) на условие (3.10) происходит переход от состояния растяжения среды к состоянию сжатия.

Очевидно, что полученное решение можно обобщить на случай более сложных, чем (3.4), краевых условий для состояния растяжения ($t < t_2$), сохраняя при этом предположение $G = G_0 = \text{const}$. Найденное решение (3.9) показывает, что отраженные от ударной волны вторичные волны (функция $H(\omega_2)$) оказывают существенное влияние на поле перемещений и ими можно пренебречь только при $\nu/(\lambda + 2\mu) \ll 1$ и малых значениях τ .

Заключение. Исследована задача о распространении сходящихся сферических волн в разномодульных средах. Показана возможность движения в среде переходной линейно расширяющейся во времени области с нулевым инвариантом J_1 . Эта область расположена между областями сжатия и растяжения, а ее передний и задний фронты представляют собой линии слабых разрывов. Процесс растяжения-сжатия в кусочно-линейной среде сопровождается возникновением ударной волны. В случае постоянной скорости ударной волны с использованием обратного метода построено решение волновой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Маслов В. П., Мосолов П. П.** Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
2. **Маслов В. П.** Теория упругости для разномодульной среды / В. П. Маслов, П. П. Мосолов. М.: Моск. ин-т электрон. машиностроения, 1985.
3. **Куликовский А. Г., Пекуровская Л. А.** О продольных волнах в упругой среде с кусочно-линейной зависимостью напряжения от деформации // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 807–813.
4. **Gavrilov S. N., Herman G. C.** Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound Vibrat. 2012. V. 331, N 20. P. 4464–4480.
5. **Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т.** О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневост. мат. журн. 2005. Т. 6, № 1/2. С. 94–105.
6. **Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.** О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 147–155.
7. **Бессонов Д. Е., Зезин Ю. П., Ломакин Е. В.** Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 9–13.
8. **Садовская О. В.** Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. М.: Физматлит, 2008.
9. **Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.** Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 44–53.
10. **Мясников В. П., Олейников А. И.** Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 332, № 1. С. 57–60.
11. **Мясников В. П.** Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред / В. П. Мясников, А. И. Олейников. Владивосток: Дальнаука, 2007.
12. **Найфэ А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
13. **Бленд Д.** Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 9/VI 2015 г.
