

ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИЛВАРРИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТАТИСТИКИ ФРАГМЕНТАЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В. В. Сильвестров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, silver@hydro.nsc.ru

Показано, что распределение Гилварри хорошо описывает экспериментальные кумулятивные распределения числа и объема (массы) фрагментов от их линейного размера, площади или массы, полученные в экспериментах по динамической фрагментации как хрупких, так и пластичных твердых тел.

Ключевые слова: динамическая фрагментация, статистические теории фрагментации.

ВВЕДЕНИЕ

Общепризнано, что существуют как физические, так и статистические аспекты проблемы фрагментации твердых тел. Последнее обстоятельство привело к тому, что было предложено большое число соотношений, связывающих число фрагментов с их размером, таких как экспоненциальные, логарифмически нормальное, Вейбулла и степенное распределения. Особо следует отметить линейное экспоненциальное распределение (ниже — распределение Грэди), основанное на статистике Пуассона и описывающее статистическую составляющую для широкого круга задач, от разрушения пластичного одномерного кольца до фрагментации Вселенной [1, 2]. Распределение Грэди ориентировано на описание статистики разрушения для относительно крупных фрагментов, полное число которых определяется трещинами Гриффитса, всегда имеющимися в твердом теле. Не менее широкое распространение получило степенное распределение, основанное на представлениях фрактальной теории разрушения [3]. Это распределение связано с понятием саморазвивающейся фрагментации и хорошо описывает экспериментальные распределения числа фрагментов от их размера для наиболее мелких фрагментов (относительно размера разрушаемого объекта).

Необходимо отметить также распределение, предложенное ранее Гилварри для описания однократной фрагментации хрупких тел [4, 5]. Особенностью этого распределения является то, что оно представляет комбинацию экс-

поненциального и степенного законов и при малых размерах фрагментов переходит в степенное распределение. Работ, в которых анализировалась бы применимость распределения Гилварри для описания статистики фрагментации твердых тел в различных ситуациях, нет, за исключением [6], где это распределение было применено для статистической интерпретации разрушения ударника и различных мишеней при высокоскоростном ударе. Цель настоящей работы — восполнить этот пробел. Рассмотрено применение распределения Гилварри для описания данных по динамической фрагментации как хрупких, так и пластичных твердых тел. Во многих случаях это распределение позволяет описать как данные, используемые для доказательства применимости степенного распределения, так и результаты, используемые для подтверждения распределения Грэди. Анализ показывает, что распределение Гилварри имеет более широкую область применения, чем линейное экспоненциальное или степенное распределение.

ТЕОРИЯ ГИЛВАРРИ И МОДИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ДРУГИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДАННЫХ

В этом параграфе приведены формулы, которые используются для статистической интерпретации экспериментальных данных. Формулы (1)–(3), определяющие зависимости от линейного размера фрагментов, взяты из основополагающей работы Гилварри [4].

Общий случай. Для трехмерного тела объемом V_0 (массой M_0 , плотностью ρ) плотность распределения числа геометрически подобных

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (номер НШ-2073.2003.1).

фрагментов $n(x)$ со средним размером x в интервале $[x, x+dx]$ определяется соотношением

$$n(x) dx = \frac{V_0}{\lambda_v} x^{-3} \exp(-Q) dQ \quad (1)$$

или

$$n_G(x) = \frac{V_0}{\lambda_v} x^{-3} \exp \left\{ - \left[\frac{x}{k} + \left(\frac{x}{j} \right)^2 + \left(\frac{x}{i} \right)^3 \right] \right\} \times \\ \times \left(\frac{1}{k} + 2 \frac{x}{j^2} + 3 \frac{x^2}{i^3} \right), \quad (1')$$

где λ_v — объемный форм-фактор фрагментов. Предполагаемое число фрагментообразующих трещин $Q(x)$ внутри фрагмента размером x определяется соотношением

$$Q(x) = (x/k) + (x/j)^2 + (x/i)^3, \quad (2)$$

где i, j, k — параметры с размерностью длины, определяющие плотность числа трещин объемного, поверхностного или реберного типов соответственно (подробности вывода и физической интерпретации величин, входящих в (1), (2), см. в [4, 5]). Для части кумулятивного объема $V(\leq x)$ (или массы) справедливо соотношение

$$\frac{V(\leq x)}{V_0} = \frac{M(\leq x)}{M_0} = 1 - \exp \{-Q(x)\}. \quad (3)$$

При малых x уравнение (1) переходит в степенную зависимость $n(x) \sim x^{-\alpha}$, характерную для фрактальной теории фрагментации твердых тел [3]. Эффективное значение показателя находится в интервале $1 \leq \alpha \leq 3$ в зависимости от того, какой тип трещин определяет разрушение тела. При больших x основную роль в (1) играет экспоненциальный множитель, что является характерной особенностью любого экспоненциального распределения.

Используя связь между массой m и линейным размером фрагмента: $m = \rho \lambda_v x^3$, из (1), (2) получим уравнение, связывающее плотность числа фрагментов $n(m)$ с массой фрагмента:

$$n_G(m) = \frac{M_0}{m} \exp(-Q(m)) \left[\frac{1}{3\mu_1} \left(\frac{\mu_1}{m} \right)^{2/3} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3\mu_2} \left(\frac{\mu_2}{m} \right)^{1/3} + \frac{1}{\mu_3} \right], \quad (4)$$

$$Q(m) = (m/\mu_1)^{1/3} + (m/\mu_2)^{2/3} + (m/\mu_3),$$

где $\mu_1 = \rho \lambda_v k^3$, $\mu_2 = \rho \lambda_v j^3$, $\mu_3 = \rho \lambda_v i^3$ — масштабные параметры распределения. При малых m плотность распределения $n(m) \sim m^{-\beta}$. При вкладе всех типов трещин эффективное значение β лежит в интервале $1 \leq \beta \leq 5/3$.

Формулы (1)–(4) определяют соотношение между числом фрагментов и их размером. Интегрируя (1) или (4), получим зависимость кумулятивного числа фрагментов $N(\geq x|S|m)$ размером, площадью или массой, больше или равных $x|S|m$, от линейного размера, площади или массы фрагмента (эти координаты наиболее часто используются при представлении экспериментальных данных):

$$N(\geq x|m) = \int_{x|m}^{\infty} n(x'|m') d(x'|m'). \quad (5)$$

Формально распределение (1) содержит четыре параметра: λ_v, i, j и k , представления (3), (4) — по три параметра. Распределение (1) определено на интервале $[0, \infty]$. Экспериментальные распределения определяются на конечном интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$, где x_{\min} — минимальный и x_{\max} — максимальный размеры фрагментов, образующихся при разрушении тела объемом V_0 . Поэтому величины V_0, M_0 , характеризующие исходный размер объекта, также следует считать подгоночными параметрами. Но число действительно значимых параметров, как будет показано ниже на конкретных примерах, существенно меньше. Масса и объем разрушаемого тела служат очень хорошими оценками снизу величин M_0 и V_0 , входящих в формулы (1), (3), (4).

Формальная аппроксимация (2) степенной зависимостью $Q \approx (x/k)^\alpha$ приводит (3) к эмпирическому уравнению Розина — Раммлера:

$$\frac{V(\leq x)}{V_0} = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{i} \right)^\alpha \right], \quad (6)$$

а при малых x — к закону Шумана $\frac{V(\leq x)}{V_0} = \left(\frac{x}{i} \right)^\alpha$. В рамках этого подхода параметр Вейбулла $1 \leq \alpha \leq 3$, а приводимые иногда значения α вне указанного диапазона обусловлены, по-видимому, ошибками эксперимента или слишком формальным использованием уравнения Розина — Раммлера [7, 8]. Перепишем основные формулы для разрушения одно- и двухмерных объектов.

Одномерное приближение. Фрагмент характеризуется только длиной x (или массой $m = \rho x$):

$$n_G(x|m) = \frac{L_0}{x} \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \frac{1}{k} = \frac{M_0}{m} \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right) \frac{1}{\mu}, \quad (7)$$

где M_0 , L_0 — масса и длина объекта, μ — масштабный параметр. При $m \rightarrow 0$ общее число фрагментов стремится к бесконечности, но масса объекта конечна.

Двухмерное приближение. Фрагмент характеризуется размером x и площадью $S = \lambda_S x^2$ (или массой $m = \rho S$), где λ_S — площадный форм-фактор фрагмента. Введем параметры $\sigma_1 = \lambda_S k^2$, $\sigma_2 = \lambda_S j^2$, тогда

$$n_G(S) = \frac{S_0}{S} \exp\left\{-\left[\left(\frac{S}{\sigma_1}\right)^{1/2} + \frac{S}{\sigma_2}\right]\right\} \times \left(\frac{1}{2\sigma_1}\left(\frac{S}{\sigma_1}\right)^{-1/2} + \frac{1}{\sigma_2}\right), \quad (8)$$

где S_0 — площадь разрушаемого объекта. По-прежнему общее число фрагментов стремится к бесконечности, но площадь (или масса) объекта конечна. При малых размерах $n(S) \sim S^{-\beta}$, где $1 \leq \beta \leq 1,5$ в зависимости от типа трещин, определяющих фрагментацию.

Неоднородная фрагментация. При разрушении реальных объектов часто реализуется неоднородная фрагментация, т. е. вероятность образования больших и маленьких фрагментов из разных частей тела не одна и та же. В этом случае для интерпретации статистической составляющей применяются бимодальные [1, 2], а в некоторых случаях и тримодальные распределения [6, 8]. В данной работе также использовались би- или тримодальные распределения, для которых плотность распределения определялась как

$$n_{mm}(x|m) = (1 - \delta - \gamma) n_{G1}(x|m) + \delta n_{G2}(x|m) + \gamma n_{G3}(x|m), \quad (9)$$

где δ , γ — объемные доли 2-й и 3-й частей тела. Иначе, предполагается, что объем тела можно разделить на части, в каждой из которых реализуется однородная фрагментация. Для тримодального распределения $V_0 = V_1 + V_2 + V_3$, где $V_1 = (1 - \delta - \gamma) V_0$, $V_2 = \delta V_0$, $V_3 = \gamma V_0$. Для бимодального распределения $\gamma = 0$.

Распределение Грэди. Отметим еще одно часто используемое распределение, так называемое линейное экспоненциальное распределение, развитое в работах Грэди [1, 2]. Было показано, что это распределение и его бимодальный вариант позволяют описать статистическую компоненту фрагментации для очень широкого круга объектов. Распределение Грэди определяется соотношениями

$$n_{GK}(m) = \frac{M_0}{\mu^2} \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right), \quad (10)$$

$$N(\geq m) = N_0 \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right),$$

где $N_0 = M_0/\mu$ — априорное число фрагментов, μ — масштабный коэффициент. В качестве переменной m используется масса, площадь или линейный размер фрагмента в зависимости от геометрической размерности разрушаемого объекта.

В предположении геометрически подобных фрагментов для кумулятивного объема фрагментов со средним размером не более x можно показать, что

$$\frac{V(\leq x)}{V_0} = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{i}\right)^\alpha\right] \exp\left[-\left(\frac{x}{i}\right)^\alpha\right], \quad (11)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. При малых x кумулятивный объем $\frac{V(\leq x)}{V_0} \sim x^{2\alpha}$, т. е. стремится к нулю в два раза быстрее, чем в случае распределения Гилварри. Согласно теории Гилварри при $x \rightarrow 0$ $\frac{V(\leq x)}{V_0} \sim x^\alpha$. Это обстоятельство определяет неприменимость соотношения (11), например, для описания данных по разрушению стеклянных сфер, так как в координатах $[\lg(V(\leq x)/V_0), \lg(x)]$ наклон экспериментальных распределений при малых x близок к единице [5].

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИЛВАРРИ

Рассмотрим возможности распределения Гилварри для описания статистической составляющей при фрагментации механических и физических объектов. В ряде случаев геометрия разрушаемых объектов близка к двухмерной или одномерной. Но использовались формулы для трехмерных объектов, потому что при разрушении реальных объектов практически

всегда для части тела реализуется трехмерная фрагментация. Кумулятивные распределения определялись численным интегрированием соответствующих дифференциальных распределений. В некоторых примерах рассматриваемые величины (число фрагментов и их размер) изменяются в пределах нескольких порядков. Поэтому все формулы были переписаны в логарифмических переменных $\bar{n} = \lg n$, $\bar{m} = \lg m$, $\bar{x} = \lg x$ и т. д. В этих переменных изменение всех величин находится в пределах одного порядка, что удобно при численном интегрировании. Интеграл (5) вычислялся методом трапеций при разбиении интервала изменения независимой переменной на $100 \div 200$ частей. Использовались авторские представления данных.

Динамическое растяжение тонких колец. В [1, 9] приведены данные по разрушению тонких колец из пластичных материалов алюминия и меди, растягиваемых в азимутальном направлении под действием электромагнитной силы. Диаметр колец 32 мм, площадь поперечного сечения 1×1 мм, т. е. геометрия разрушаемого объекта близка к одномерной. Кольца разрушались на $9 \div 13$ отдельных фрагментов за счет развития перетяжечных шеек, но далеко не по всем шейкам происходило разрушение, что указывает на то, что ограниченный запас кинетической энергии в расширяющемся кольце ограничивал процесс фрагментации. Фрагменты улавливались опилками, и определялись число фрагментов и масса каждого из них.

На рис. 1 в координатах «кумулятивное число фрагментов — масса фрагмента» приведены данные для колец из меди. Ввиду небольшого числа фрагментов в каждом опыте, была использована сумма фрагментов в четырех опытах, и общее число фрагментов составило 40. Кривыми нанесены результаты приближения данных распределением Грэди (10) при $\mu = 16,5$ мг, $N_0 = 80$ и распределением Гилварри (7) при $\mu = 31$ мг, $M_0 = 1,65$ г (расчетная масса четырех колец 1,42 г). Обе теории практически одинаково передают характер распределений при одинаковом числе (два) подгоночных параметров. В обоих случаях наблюдается превышение расчетных данных по сравнению с экспериментом как в области «мелкодисперсного хвоста» при $m < 15$ мг, так и в области «крупнодисперсного хвоста» при $m > 43$ мг. Первое связано с конечной толщиной кольца, ограниченным запасом энергии в растягиваю-

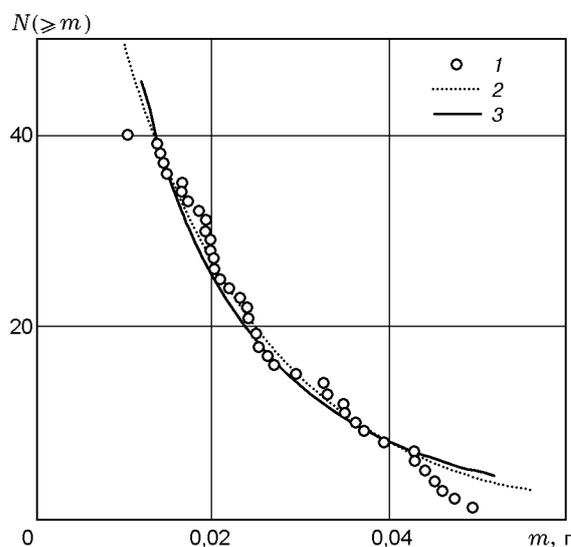


Рис. 1. Динамическая фрагментация колец из меди:

1 — эксперимент [9], 2 — приближение распределением Грэди, 3 — распределением Гилварри

щемся кольце и потерями энергии на образование пластических шеек и фрагментообразующих трещин, ввиду чего количество возможных мелких фрагментов ограничивается. Завышенное расчетное число фрагментов в области «крупнодисперсного хвоста» связано, возможно, с конечной скоростью развития фрагментообразующих трещин. Этот пример в постановке, близкой к одномерной, демонстрирует ограниченные возможности статистического подхода к объяснению минимального и максимального размеров фрагментов, с одной стороны, и применимость обеих теорий для понимания статистической связи числа фрагментов с их массой, с другой стороны.

Взрывное разрушение колец из дюралюминия.

Кольца с внутренним диаметром 80 мм, высотой 10 мм, толщиной $\Delta = 2, 4$ и 8 мм разрушались взрывом заряда взрывчатого вещества, расположенного в центре кольца [8]. Фрагменты улавливались уплотненным снегом. Определялись число фрагментов и масса каждого из них, по массе рассчитывался эффективный линейный размер фрагмента.

Результаты в виде зависимости относительного кумулятивного объема фрагментов от их линейного размера приведены на рис. 2, а. Сплошными кривыми представлены результаты расчета по формулам (2), (3). Параметры распределения Гилварри, которое очень

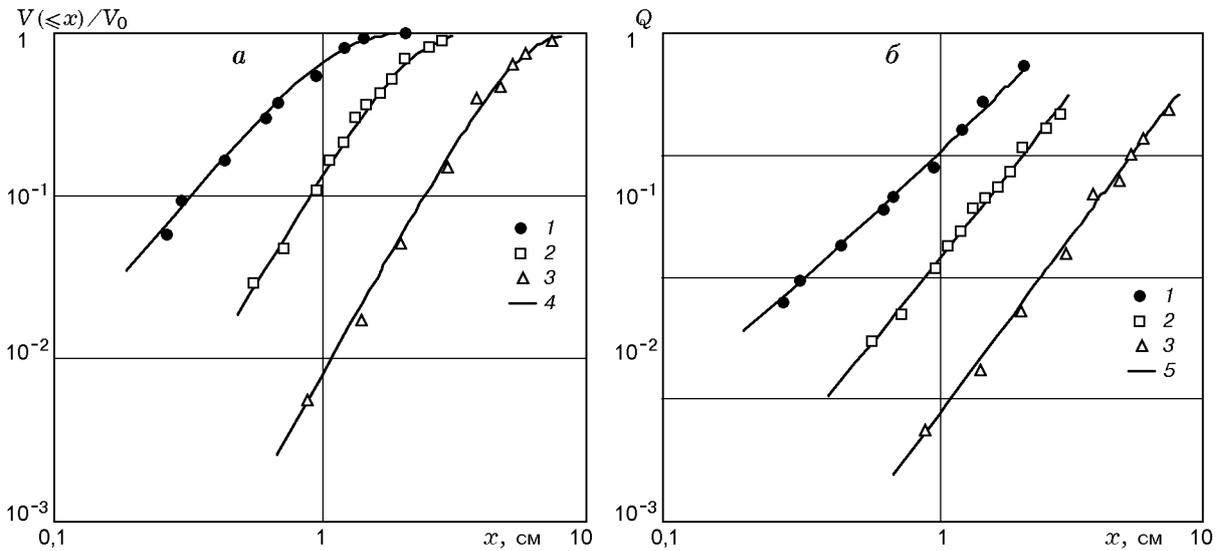


Рис. 2. Взрывная фрагментация колец из алюминия [8] различной толщины: 1 — 2 мм, 2 — 4 мм, 3 — 8 мм; 4 — приближение распределением Гилварри, 5 — расчет по (2) при параметрах из табл. 1

Таблица 1
Взрывная фрагментация колец из дюралюминия

Δ , мм	j , см	i , см	α	α [8]
2	1,09	1,75	2,13	2,2
4	7	2,09	2,81	2,8
8	∞	5,11	3,0	3,3

хорошо описывает эксперимент, приведены в табл. 1 ($k = \infty$ для всех Δ). Для наиболее толстого кольца реализуется чисто объемная фрагментация, для более тонких колец существенное значение имеет и квадратичный член в (2). Приблизить данные рис. 2,а уравнением (11), следуемым из теории Грэди, невозможно, так как наклон экспериментальных распределений не превышает 3.

На рис. 2,б в двойных логарифмических координатах приведены значения функции $Q(x)$, см. уравнение (2). В качестве «данных» принимались значения $Q(x) = -\ln[1 - V(\leq x)/V_0]$, см. уравнение (3). Это представление совпадает с принятым при обработке данных по уравнению Розина — Раммлера [7, 8]. Если данные приближаются прямой, то говорят, что результаты описываются уравнением Розина — Раммлера. Сплошные кривые на рис. 2,б соответствуют уравнению (2) при параметрах из табл. 1. В четвертой графе таблицы приведены значения парамет-

ра Вейбулла α , вычисленные методом наименьших квадратов по данным для $Q(x)$ приближением их прямой. Они практически совпадают со значениями α из [8] (последняя графа таблицы). Это означает, что и уравнение Розина — Раммлера, и распределение Гилварри описывают экспериментальные данные. Это понятно, так как уравнение Розина — Раммлера получается из (3) в результате приближения $Q(x)$ степенной функцией, как отмечалось выше.

Фрагментация длинного тонкого стержня из стекла. Стержень диаметром 2 мм, длиной 1500 мм, заключенный в стальную трубу с внутренним диаметром 25 мм и длиной 2 м, бросали горизонтально с высоты $h = 1,2 \div 10$ м на твердый пол [10]. При этом стержень разбивался на отдельные фрагменты размером от 1 до 900 мм. Определялись число фрагментов и масса каждого фрагмента. На основе полученных данных авторы [10] сделали вывод, что при увеличении высоты падения распределение числа фрагментов по массе изменяется от логарифмически нормального при $h = 1,2$ м до бимодального степенного закона при $h \geq 4,8$ м.

На рис. 3 приведена зависимость кумулятивного числа фрагментов от их массы (сумма для 10 одинаковых опытов) для двух высот бросания — 1,2 и 4,8 м. Примем плотность материала стержня $2,2 \div 2,3$ г/см³, тогда масса 10 стержней равна $M_0 = (107 \pm 1)$ г. Кривыми 2 показан расчет по формулам (4), (5),

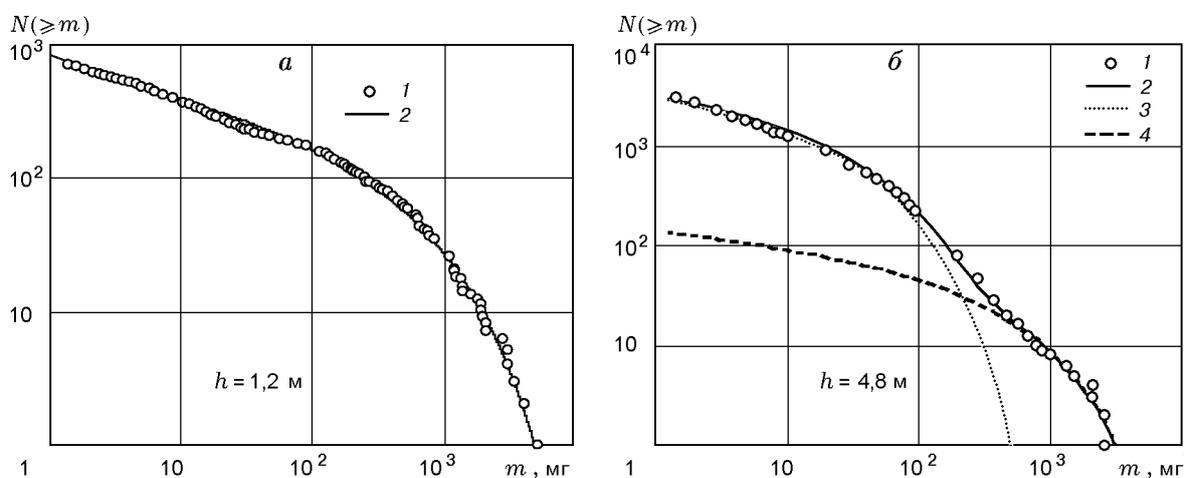


Рис. 3. Динамическая фрагментация длинных тонких стержней из стекла:

1 — данные [10], 2 — бимодальное распределение Гилварри и 3 — его «мелкодисперсная», 4 — «крупнодисперсная» моды

Таблица 2
Динамическая фрагментация
стержней из стекла

h , м	δ	μ_2 , г	μ_3 , г
1-я мода			
1,2	0,77	∞	1,85
4,8	0,33	∞	1,45
2-я мода			
1,2	—	1,5	0,45
4,8	—	∞	0,1

(9) для бимодального распределения Гилварри с параметрами из табл. 2, линиями 3, 4 — вклады 1-й и 2-й мод. Для обеих мод $\mu_1 = \infty$, но одномерное приближение, при котором значим только параметр μ_3 , не реализуется. Авторы [10] отмечают, что образуются два морфологических типа осколков. Большие фрагменты имеют форму цилиндров диаметром 2 мм и длиной до 200 ÷ 900 мм. Имеются и малые фрагменты, которые не являются цилиндрами и образованы за счет трехмерного разрушения элементов стержня. Поэтому для детального приближения данных целесообразно использовать значимые значения и для параметра μ_2 (см. табл. 2). Вклад «крупнодисперсной» моды распределения, характеризуемый параметром δ , и значения коэффициентов μ_3 уменьшаются при увеличении высоты падения стержня. Трех-четырёх подгоночных параметра доста-

точно для описания данных в диапазоне масс фрагментов от 1 мг до 5 г в рамках только распределения Гилварри.

Взрывная фрагментация толстых металлических цилиндров. В [11] приведены результаты взрывного разрушения металлических толстостенных цилиндров из пластичного арможелеза и закаленной стали HF-1. Внутренний диаметр цилиндров 76 мм, толщина стенки 19 ÷ 22 мм, масса 9 ÷ 11 кг. Фрагменты улавливались слоем опилок. Определялись число фрагментов и масса каждого фрагмента массой $m \geq 64,5$ мг. Исследование морфологии отдельных фрагментов показывает, что реализуется объемная фрагментация материала части оболочки.

Данные для арможелеза приведены на рис. 4. Для приближения использовано бимодальное распределение Гилварри с $\delta = 0,94$, в качестве величины M_0 выбрана полная масса собранных фрагментов ($M_0 = 9100$ г). «Крупнодисперсный хвост», образованный из основной части цилиндра (по массе 94 %), разрушается согласно соотношению (4) при $\mu_1 = \mu_2 = \infty$, $\mu_3 = 80$ г. Остальные 9 % массы цилиндра разрушаются по (4) при $\mu_1 = \mu_3 = \infty$, $\mu_2 = 2,4$ г и образуют «мелкодисперсный хвост», т. е. бимодальное распределение (9) содержит только три значимых параметра. Для бимодального распределения Грэди [1] необходимо использовать четыре параметра при худшем качестве описания «мелкодисперсной» части распределения при $m < 10$ г (рис. 4, б).

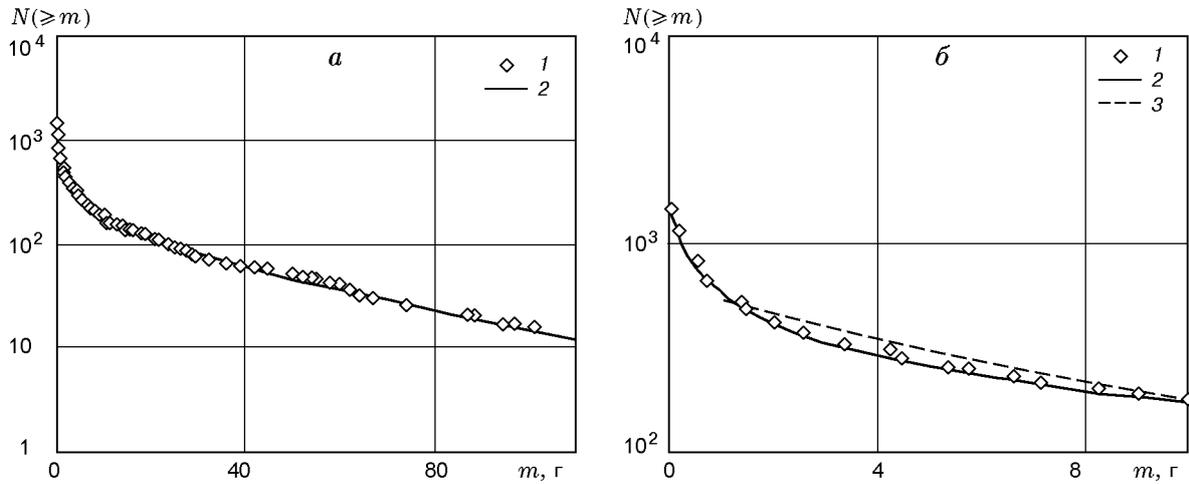


Рис. 4. Взрывное разрушение цилиндров из армо-железа, весь спектр (а) и его «мелкодисперсная» часть (б):

1 — данные опыта 2 [11]; 2 — приближение бимодальным распределением Гилварри, 3 — бимодальным распределением Грэди

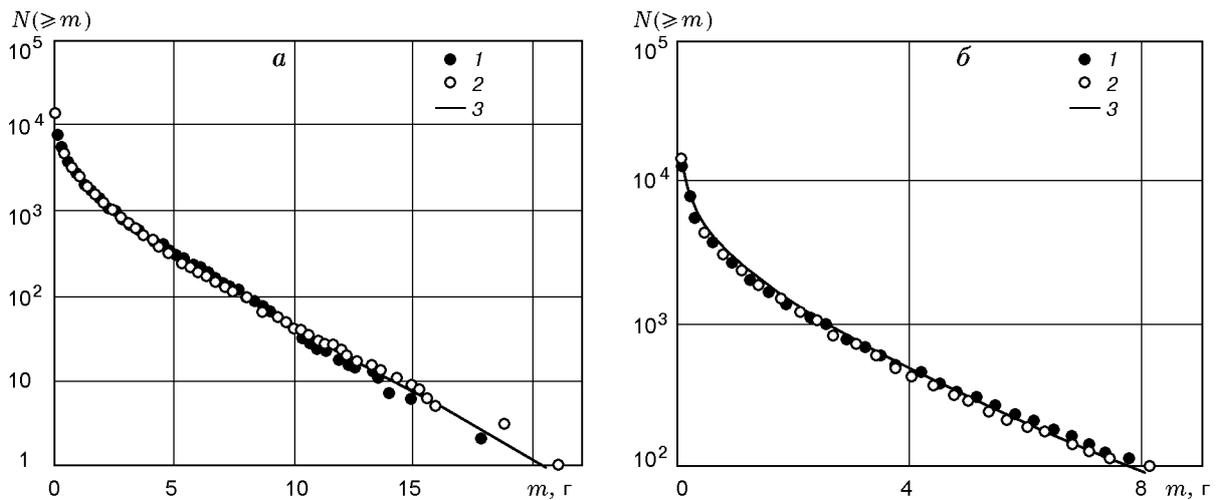


Рис. 5. Взрывное разрушение цилиндров из стали HF-1, весь спектр (а) и его «мелкодисперсная» часть (б):

1, 2 — данные экспериментов 5 и 6 [11]; 3 — распределение Гилварри

Результаты для стали HF-1 приведены на рис. 5. Хорошее согласование с экспериментом, в том числе и для «мелкодисперсной» части распределения (рис. 5,б), достигается при использовании одномодального распределения Гилварри при $M_0 = 10500$ г (масса всех сохранных фрагментов) и $\mu_1 = \infty$, $\mu_2 = 35$ г, $\mu_3 = 4$ г, т. е. достаточно всего двух значимых параметров. Для бимодального распределения Грэди [1] необходимо по-прежнему использовать четыре параметра. При использовании бимодального распределения Вейбулла для описа-

ния подобных данных необходимо пять значимых параметров [12].

Разрушение двумерных атомных структур. В [13] предложено использовать метод молекулярной динамики для исследования разрушения плоских атомных структур при гомогенном адиабатическом расширении предварительно нагретой системы. В этом случае процесс фрагментации не осложнен недостатками постановки эксперимента, связанными с неоднородностью нагружения. При фрагментации отдельные атомы, взаимодействующие по потенциалу

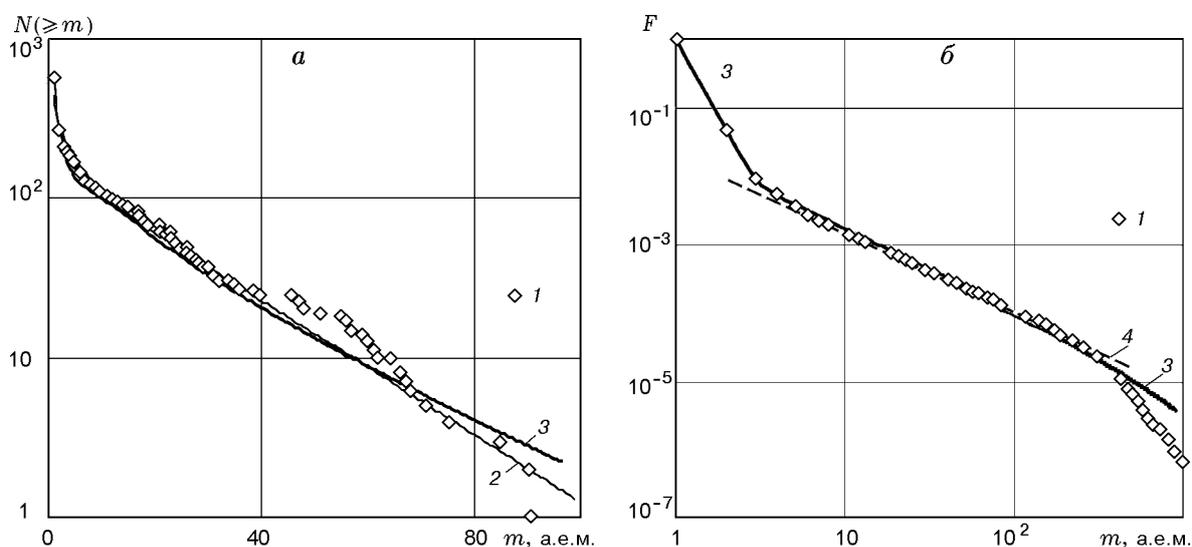


Рис. 6. Кумулятивное распределение числа кластеров по их массе при фрагментации двухмерной системы из 4200 (*a*) и 40000 (*б*) атомов:

1 — численный эксперимент; 2 — бимодальное распределение Грэди [13], 3 — бимодальное распределение Гилварри, 4 — степенное распределение [14]

Леонарда — Джонса, объединяются в отдельные кластеры (фрагменты). Статистика распределения кластеров по их массе и является результатом моделирования, который можно анализировать с позиций статистической теории фрагментации. Аналогичное исследование выполнено в [14] для системы из 40000 атомов.

На рис. 6 приведены данные по фрагментации плоских структур из [13, 14]. Линия 2 на рис. 6, *a* — приближение бимодальным распределением Грэди при $\mu = 1$ и 20,6 а.е.м. [13]; еще два параметра (априорное число частиц N_0) подбираются для каждой моды. На рис. 6, *б* по вертикали нанесено кумулятивное число фрагментов, деленное на текущее значение массы и полное расчетное число фрагментов: $F(m) = \frac{N(\geq m)}{N_0 m}$. Линия 4 на рис. 6, *б* — приближение части распределения степенным законом с показателем $-1,14$ при параметрах, характеризующих удельную энергию и температуру системы: $R = 2,0$, $T^* = 0,37$ (см. [14]). В обоих случаях наблюдаются «мелкодисперсные хвосты» при $m < 2 \div 5$, связываемые с «испарением» отдельных атомов.

Линиями 3 на рис. 6 нанесены приближения данных бимодальным распределением Гилварри для двухмерного случая (8). Для кривой 3 на рис. 6, *a* $M_0 = 4200$ а.е.м., $\sigma_1 = \infty$ для обеих мод; для «мелкодисперсной» моды

$\sigma_2 = 1$, $\delta = 5\%$, для «крупнодисперсной» — $\sigma_2 = 36$. Результаты на рис. 6, *б* также хорошо приближаются бимодальным распределением Гилварри при следующем наборе параметров: $M_0 = 40000$ а.е.м., $\sigma_1 = \infty$; для «мелкодисперсной» моды $\sigma_2 = 1$, $\delta = 0,65\%$; для основной моды $\sigma_2 = 10^5$.

Качество описания данных распределением Гилварри хорошее. Заметная разница на рис. 6, *a* связана с «шумами» при $m = 40 \div 55$, обусловленными, по-видимому, малым числом частиц в расчете. Завышение расчетных данных в области максимальных размеров фрагментов безусловно связано с конечным размером разрушающейся системы. Большое значение σ_2 , использованное при приближении данных на рис. 6, *б*, означает, что для «крупнодисперсной» моды в распределении Гилварри остается только асимптотическая степенная часть при $m \ll \sigma_2$.

Разрушение тонкого листа плавленого кварца. Пластика диаметром 75 мм и толщиной 0,75 мм размещалась между двумя листами из полиметилметакрилата немного большего диаметра. «Сэндвич» жестко закреплялся по периметру, но не лежал на жестком основании. По нормали к поверхности наносился удар падающим грузом диаметром 37 мм со слегка скругленным носиком со скоростью 6 м/с. В результате листочек кварца разбивался на фраг-

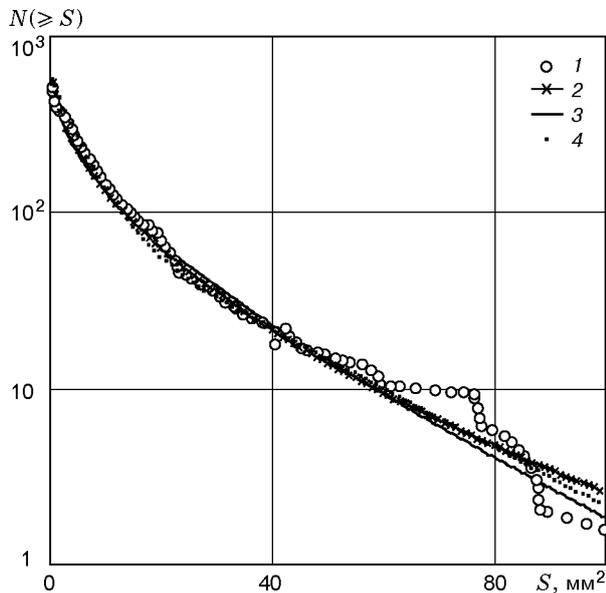


Рис. 7. Динамическая фрагментация тонкой пластинки плавленного кварца:

1 — эксперимент [1]; 2 — распределение Мотта, 3 — распределение Гилварри, 4 — распределение Грэди

менты, но обойма из полиметилметакрилата не разрушалась. Определялись число фрагментов и площадь каждого фрагмента [1].

Результаты эксперимента [1] приведены на рис. 7, где нанесены также три статистических распределения: распределение Мотта $N(\geq S) = N_0 \exp(-\sqrt{S/\sigma})$, содержащее два параметра; бимодальное распределение Грэди (10) с четырьмя параметрами и одномодальное распределение Гилварри (8) с двумя значимыми параметрами: $S_0 = 4900 \text{ мм}^2$, $\sigma_2 = 33 \text{ мм}^2$, $\sigma_1 = \infty$. Расчетные кривые для всех трех распределений практически совпадают. Количество подгоночных параметров для распределений Мотта и Гилварри одинаково, но отдать предпочтение тому или иному распределению трудно.

Взрывное разрушение горных пород. В [8] приведены данные по разрушению известняка взрывом заряда ВВ в центре камня. Гранулометрический состав взорванной массы анализировался при помощи ситового отсева и взвешивания отдельных фракций. На рис. 8,а представлены данные при изменении размера фрагментов от 2 до 20 мм. Результаты [8] очень хорошо описываются одномодальным распределением Гилварри (формулы (2), (3), в которых значим только квадратичный член (табл. 3)).

В [15] приведены данные по разрушению

Таблица 3
Взрывная фрагментация камней из горных пород

Мода*	δ	k , мм	j , мм
Известняк, опыт 4 [8, табл. 2, фиг. 3]			
1	1,0	∞	14,4
Известняк, опыт 1 [15]			
1	0,0004	∞	0,007
2	0,9996	110	400
Песчаник, опыт 2 [15]			
1	0,0006	∞	0,0045
2	0,9234	120	∞
3	0,076	1,3	0,43

Примечание. *Для всех мод $i = \infty$.

цилиндрических блоков известняка и песчаника диаметром 45,7 см, высотой 76,2 см, массой около 267 и 244 кг взрывом заряда ВВ массой 57 г, расположенного в центре блока. Результаты опытов интересны тем, что получены для широкого диапазона изменения размеров фрагментов на пять порядков, от 2 мкм до 100 мм.

Данные для известняка представлены на рис. 8,б. Экспериментальное распределение очень хорошо согласуется с бимодальным распределением Гилварри (уравнения (2), (3), (9) с четырьмя значимыми параметрами (см. табл. 3)). Отметим появление «мелкодисперсной» моды с характерным размером фрагментов $\approx 7 \text{ мкм}$. В соответствии с этой модой разрушается только 0,04 % полной массы камня. Появление двух мод, по-видимому, связано с наличием ближней и дальней зон действия взрыва в объеме камня, разрушающихся с существенно различными размерами фрагментов.

Аналогичные результаты для песчаника представлены на рис. 9. Песчаник как горная порода включает мелкие зерна природного кварца, которые существенно прочнее, чем скрепляющий их материал связующего. Поэтому неудивительно, что кроме «мелкодисперсной» моды с характерным размером $\approx 5 \text{ мкм}$, как и для известняка, появляется еще одна мода с характерным размером фрагмента $\approx 0,5 \text{ мм}$, соответствующим размеру отдельных песчинок (см. табл. 3 и рис. 9,а). Более наглядно появление этой моды иллюстрирует

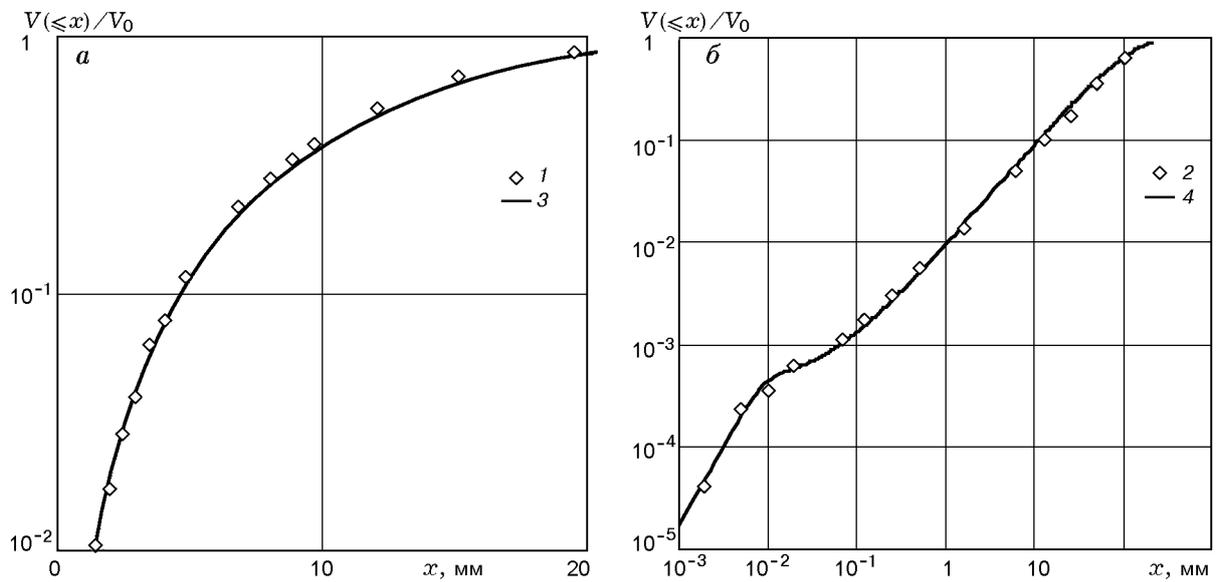


Рис. 8. Взрывное разрушение известняка:

1 — опыт 4 [8], 2 — опыт 1 [15]; 3 — одномодальное и 4 — бимодальное распределение Гилварри

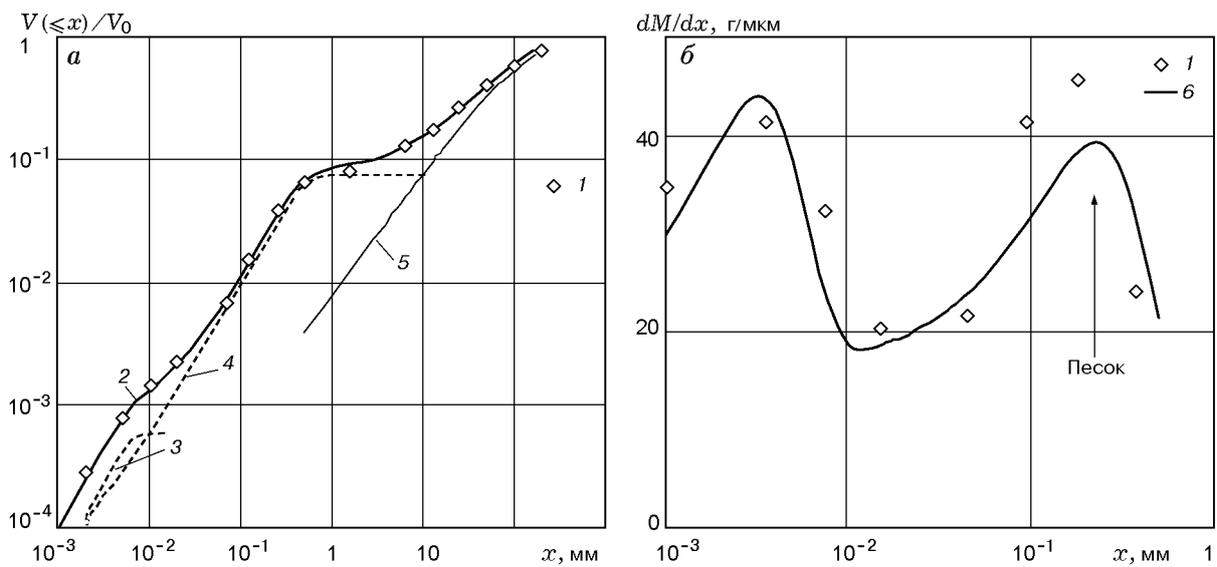


Рис. 9. Взрывная фрагментация песчаника: относительный кумулятивный объем (а) и плотность распределения массы фрагментов (б) по их размеру:

1 — опыт 2 [15]; 2 — тримодальное распределение Гилварри и 3–5 — его составляющие, 6 — плотность распределения массы фрагментов $dM(x)/dx$

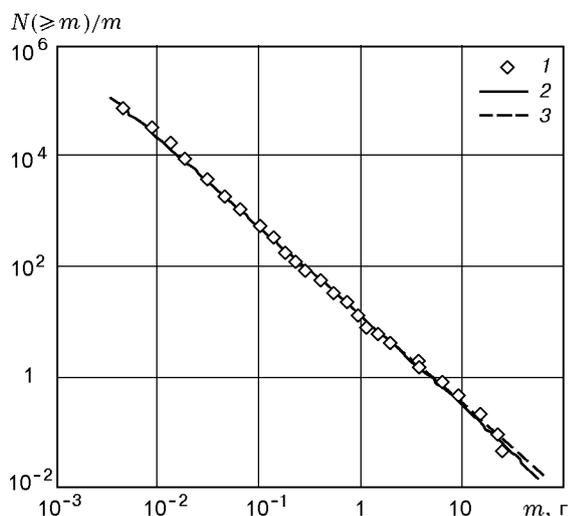


Рис. 10. Динамическая фрагментация сферы из гипса:

1 — данные [16], 2 — приближение распределением Гилварри, 3 — степенным законом

рис. 9, б, на котором приведена плотность распределения массы фрагментов $dM(x)/dx$ в зависимости от размера фрагмента (кривая б). Хорошо видны два максимума — в районе 5 и 300 мкм, удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным [15]. Для известняка наблюдается только первый максимум, далее плотность распределения массы фрагментов монотонно уменьшается.

Фрагментация сферы из гипса. Сфера диаметром 70 мм разбивалась бросанием на твердый пол [16]. Распределение кумулятивного числа фрагментов по их массе получено в диапазоне от 5 мг до 20 г (рис. 10). По оси ординат

нанесена функция $F(m) = \frac{1}{m} \int_m^\infty n(m') dm'$, по

оси абсцисс — масса фрагмента. Авторы [16] рассматривали результаты этого эксперимента как подтверждение степенного закона распределения (линия 3 на рис. 10) с показателем $-1,625$. Но данные также хорошо приближаются распределением Гилварри (4) с тремя значимыми параметрами $\mu_1 = 4000$ г, $\mu_2 = 400$ г, $M_0 = 250$ г (масса сферы 141 г), $\mu_3 = \infty$.

При статическом раздавливании сферы из стекла значимыми в (2) являются члены, соответствующие активации, в основном, «реберных и поверхностных» центров разрушения [5, 6]. Для описания разрушения сферы из гипса при динамическом ударе необходим учет тех

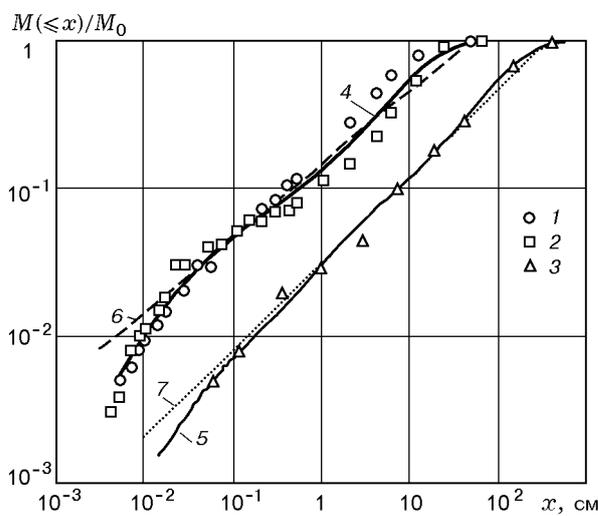


Рис. 11. Фрагментация породы при подземных ядерных взрывах «Piledriver» с заглублением 60 (1) и 43 м (2) и наземном взрыве «Flat Top» химического ВВ (3):

4, 5 — приближения распределением Гилварри, 6, 7 — степенным законом

же членов. При более интенсивном нагружении в условиях высокоскоростного удара значимыми оказываются члены, соответствующие «реберным» и «объемным» фрагментообразующим трещинам [6].

Фрагментация породы при сильных взрывах. В [17] приведены данные по фрагментации горных пород для двух подземных ядерных взрывов мощностью 61 кТ и для наземного взрыва 200 т химического ВВ. Зависимость относительной кумулятивной массы фрагментов $M(\leq x)/M_0$ от их характерного размера представлена на рис. 11. Эти данные достаточно хорошо описываются прямыми с наклоном 0,5 и 0,58 (прямые 6, 7 на рис. 11) при изменении номинального размера фрагментов более чем на четыре порядка и считаются характерными примерами, подтверждающим справедливость степенной зависимости числа фрагментов от их размера [3, 17].

Однако в пределах разброса данных эти же результаты неплохо описываются тримодальным распределением Гилварри (кривые 4, 5 на рис. 11). Ввиду значительного выделения энергии образуются фрагменты, которые можно считать достаточно малыми по сравнению с характерным размером разрушенной области. Поэтому для всех мод $i = j = \infty$, значимыми являются только линейные члены в уравнении (2). Параметры распределений приведены в табл. 4 и дают представление о характер-

Таблица 4
Фрагментация горных пород
при сильных взрывах

Мода	δ	k , см
Ядерные взрывы «Piledriver», 61 кТ		
1	0,93	14
2	0,04	0,3
3	0,03	0,033
Химический взрыв «Flat Top», 0,2 кТ		
1	0,95	140
2	0,045	2
3	0,005	0,06

ных размерах образующихся фрагментов. Данный пример является единственным, в котором число значимых параметров для распределения Гилварри (четыре) превышает аналогичное число при альтернативном описании данных степенным законом. Иное представление данных, например, в виде плотности распределения, позволило бы точнее установить соответствие той или иной теории и эксперимента.

В заключение остановимся на примерах, показывающих, как далеко можно распространить действие статистических механических моделей фрагментации.

Распределение частиц «космического мусора» по размеру. В [18] приведены данные по распределению частиц искусственного происхождения размером от 10 мкм до 10 см на околоземной орбите, обобщающие наблюдательный материал. В основном эти частицы образовались при взрывном разрушении космических аппаратов. Время существования частиц «мусора» относительно невелико, около 40 лет. Поэтому можно полагать, что частицы были образованы в результате однократной фрагментации, практически не сталкивались между собой и не претерпевали дальнейшую фрагментацию. Применим теорию Гилварри для описания распределения частиц «космического мусора» по линейному размеру.

На рис. 12 приведена зависимость полного потока F от x , частиц с размером больше выбранного x , падающих на площадку 1 м^2 в течение года, соответствующая модели NASA ORDEM96 (погрешность по вертикали — половина порядка). Кривой 2 представлены результаты аппроксимации данных бимодальным распределением Гилварри (см. уравнения

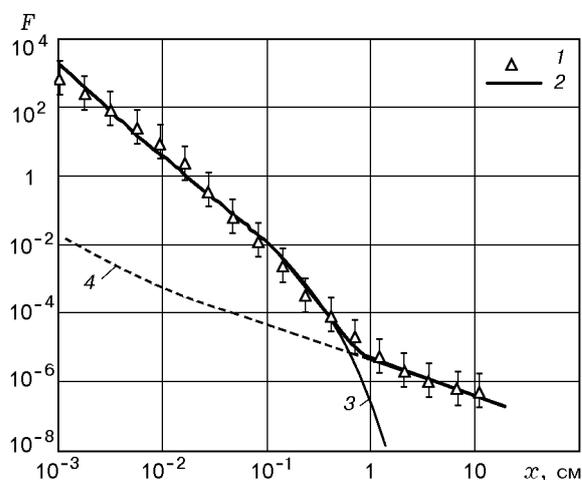


Рис. 12. Кумулятивный поток частиц «космического мусора» на околоземной орбите:

1 — модель NASA ORDEM96, 2 — приближение бимодальным распределением Гилварри и 3 — его «мелкодисперсная», 4 — «крупнодисперсная» моды

(1), (9) при $V_0/\lambda_v = 0,2 \text{ см}^3$). Указаны вклады каждой из мод (кривые 3, 4). Для «крупнодисперсной» моды $i = k = \infty$, $j = 3$ м. Для «мелкодисперсной» моды $i = j = \infty$, $k = 2$ мм, и ее вклад по объему в плотность распределения составляет только 0,005 %. Но эта мода описывает распределение при $x < 5$ мм. В целом, бимодальное распределение Гилварри вполне удовлетворительно приближает распределение частиц «космического мусора» по размеру при четырех подгоночных параметрах.

Фрагментация ядерной материи. При столкновении ядер с релятивистскими скоростями на короткий момент времени порядка 10^{-22} с образуется сгусток сверхплотной ядерной материи, который затем разрушается на фрагменты, разлетающиеся во всех направлениях [19]. Происходит как бы «взрыв» материи на ядерном масштабе размеров, времен и энергий. Длина свободного пробега нуклонов составляет 10^{-15} см и на порядок меньше размера сгустка ядерной материи. В этих условиях возможно применение понятий сплошной среды для анализа разрушения сгустка на отдельные, более легкие ядра. На этом основании в [2] распределение Грэди, учитывающее ограниченное число фрагментов и минимально возможный размер фрагмента в один нуклон, было применено для анализа ядерной фрагментации при столкновении ядра углерода ^{12}C , ускоренного до энергии 70 МэВ на нуклон, с покоящимся ядром серебра ^{108}Ag . При сравнительно неболь-

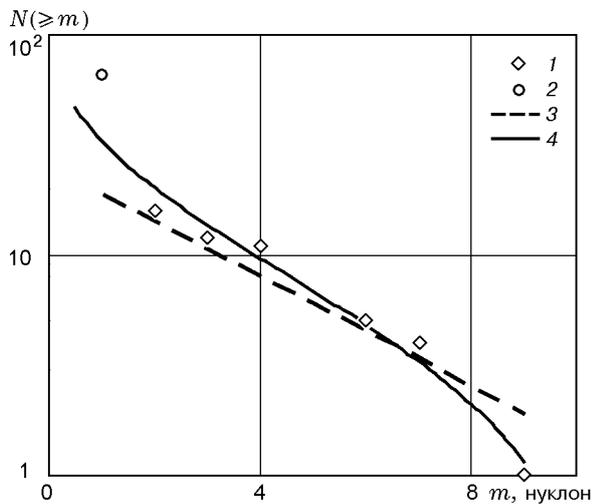


Рис. 13. Фрагментация ядерной материи при столкновении ядер углерода и серебра:

1 — данные [19], 2 — 49 отдельных нуклонов, 3 — биномиальное распределение [2], 4 — распределение Гилварри

шой энергии столкновения образуется 16 фрагментов ядерной материи: четыре ядра дейтерия ${}^2\text{D}$, одно ядро гелия ${}^3\text{He}$ и шесть ядер ${}^4\text{He}$, одно ядро лития ${}^6\text{Li}$ и два ядра ${}^7\text{Li}$, по одному ядру бериллия ${}^7\text{Be}$ и ${}^9\text{Be}$ — общей массой 71 нуклон. Эти данные в виде зависимости кумулятивного числа фрагментов от массы фрагментов (за единицу массы принята масса одного нуклона) приведены на рис. 13. Но в реакции участвуют 120 нуклонов, значит, оставшиеся 49 нуклонов разлетаются в виде протонов и нейтронов. Авторы [2] не ввели в рассмотрение эти 49 нуклонов, хотя их тоже следует рассматривать как фрагменты ядерной материи. После дополнения данных на рис. 13 этой точкой ясно, что распределение Грэди не описывает «мелкодисперсный хвост» экспериментального распределения. Распределение Гилварри в форме (4) при $\mu_1 = \mu_2 = \infty$, $\mu_3 = 9$ позволяет вполне удовлетворительно описать наблюдаемое распределение кумулятивного числа фрагментов по массе и отражает тенденцию к «испарению» отдельных нуклонов. То есть и в этом случае, экзотическом для понятий сплошной среды, распределение Гилварри качественно правильно передает статистическую компоненту разрушения горячей ядерной материи.

Примеры фрагментации, не описываемые теорией Гилварри. Существуют данные, полученные при фрагментации пластинок и стержней из малопрочных материалов: диски и стержни

из гипса [16], пластины из глины [20] и алебаstra [21], которые не удается описать распределением Гилварри. По-видимому, условия случайной фрагментации здесь не реализуются. При постановке этих опытов в условиях относительно слабого динамического нагружения объектов (бросание на твердый пол) могли развиваться механические изгибные колебания и разрушение основной (по массе) части объекта происходило в местах концентрации напряжений при этих колебаниях. Пространственное положение мест разрушения и, соответственно, размер наиболее крупных фрагментов определялись геометрическими размерами объектов и типом возбуждаемых колебаний, а не принципом случайности, положенным в основу теории случайного разрушения.

Еще один пример — распределение по массе каменных метеоритов естественного происхождения [22]. Наклон аппроксимирующей кривой в координатах $\lg N(\geq m) - \lg(m)$ близок к -1 , а из теории Гилварри следует, что наклон не может быть менее $-2/3$ (см. уравнение (4)). По-видимому, это связано с тем, что в данном случае не выполняется условие однократной фрагментации. Ввиду космического масштаба времени существования метеоритов, они неоднократно сталкивались между собой и претерпевали многократную фрагментацию. В результате число крупных метеоритов уменьшалось, а число мелких объектов существенно возрастало. Отметим, что кумулятивное распределение числа крупных железных метеоритов, упавших на Землю, имеет «аномально» малый (по абсолютной величине) наклон от $-0,5$ до $-0,8$ [22, 23]. Эти данные без труда описываются одномодальным распределением Гилварри, но они слишком неточны по разным причинам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На пятнадцати примерах фрагментации различных объектов показано, что распределение Гилварри хорошо описывает экспериментальные распределения кумулятивных числа и объема (или массы) фрагментов от их линейного размера (площади, или массы), полученные в экспериментах по динамической фрагментации как хрупких, так и пластичных твердых тел. Число значимых подгоночных параметров не превышает числа свободных параметров для других распределений. Качество аппроксимации при этом не хуже, а во многих

случаях значительно лучше, чем при использовании иных статистических моделей фрагментации.

Следует отметить, что теория Гилварри, как и другие статистические теории фрагментации, базируется на принципе случайности. В ней не рассматриваются сложная физика и кинетика коллективного образования зародышей будущих трещин, их роста, объединения в поры и слияния в области разрушения, приводящие к разделению тела на фрагменты. Отсюда следуют ограничения теории в области как малых, так и максимальных размеров фрагментов. Трудно предположить, до какой степени можно использовать принцип случайности для предсказания статистического компонента в процессах фрагментации, не рассматривая проблем физики разрушения. Но вполне удовлетворительное сравнение предсказаний теории с имеющимися экспериментальными данными показывает целесообразность подобного подхода. Не используя принцип случайности, невозможно, по-видимому, правильно описывать фрагментацию физических объектов, в частности, связь числа фрагментов с их размером в широкой области изменения величин.

Автор благодарит А. В. Пластинина за помощь при подготовке графических материалов для данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grady D. E., Kipp M. E. Geometric statistics and dynamic fragmentation // *J. Appl. Phys.* 1985. V. 58, N 3. P. 1210–1222.
2. Grady D. E. Particle size statistics in dynamic fragmentation // *J. Appl. Phys.* 1990. V. 68, N 12. P. 6099–6105.
3. Turcotte D. L. Fractals and fragmentation // *J. Geophys. Res.* 1986. V. 91, N B2. P. 1921–1926.
4. Gilvarry J. J. Fracture of brittle solids. I. Distribution function for fragment size in single fracture (Theoretical) // *J. Appl. Phys.* 1961. V. 32, N 3. P. 391–399.
5. Gilvarry J. J., Bergstrom B. H. Fracture of brittle solids. II. Distribution function for fragment size in single fracture (Experimental) // *J. Appl. Phys.* 1961. V. 32, N 3. P. 400–410.
6. Сильвестров В. В. Фрагментация стальной сферы при высокоскоростном ударе по тонкому высокопористому экрану // *Физика горения и взрыва.* 2004. Т. 40, № 2. С. 125–141.
7. Барон Л. И., Сиротюк Г. И. Проверка применимости уравнения Розина — Рамплера для исчисления диаметра среднего куса при взрывной отбойке горных пород // *Взрывное дело.* № 62/19. М.: Недра, 1967. С. 111–120.
8. Кошелев Э. А., Кузнецов В. М., Софронов С. Т., Черников А. Г. Статистика осколков, образующихся при разрушении твердых тел взрывом // *ПМТФ.* 1971. Т. 11, № 2. С. 87–100.
9. Grady D. E., Benson D. A. Fragmentation of metal rings by electromagnetic loading // *Experim. Mech.* 1983. V. 23, N 12. P. 393–400.
10. Ishii T., Matsushita M. Fragmentation of long thin glass rods // *J. Phys. Soc. Japan.* 1992. V. 61, N 10. P. 3474–3477.
11. Mock W., Jr., Holt W. H. Fragmentation behavior of Armco iron and HF-1 steel explosive-filled cylinders // *J. Appl. Phys.* 1983. V. 54, N 5. P. 2344–2351.
12. Одинцов В. А. Бимодальное распределение фрагментов цилиндров // *Физика горения и взрыва.* 1991. Т. 27, № 5. С. 118–122.
13. Holian B. L., Grady D. E. Fragmentation by molecular dynamics: the microscopic «Big Bang» // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 60, N 14. P. 1355–1358.
14. Diehl A., Carmona H. A., et al. Scaling behavior in explosive fragmentation // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62, N 4. P. 4742–4746.
15. Grimshaw H. C. The fragmentation produced by explosive detonated in stone blocks // *Mechanical Properties of Non-Metallic Brittle Materials.* London: Butter Worth Sci. Publications, 1958. P. 380–388. Цит. по: Барон В. Л. Исследования по дроблению каменных блоков действием взрыва в Англии (реферат) // *Взрывное дело.* № 50/7. М.: ГНТИЛ по горному делу, 1962. С. 109–113.
16. Oddeshede L., Dimon P., Bohr J. Self-organizing critically in fragmenting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71, N 19. P. 3107–3110.
17. O'Keefe J. D., Ahrens T. J. Impact and explosion crater ejecta, fragment size, and velocity // *Icarus.* 1985. V. 62. P. 328–338.
18. Belk C. A., Robinson J. H., et al. Meteoroids and orbital debris: effects on spacecraft // *NASA Reference Publication 1408.* August 1997.
19. Greimer W., Stocker H. Hot nuclear matter // *Scient. Amer.* 1985. V. 252. P. 58–66.
20. Meibom A., Balslev I. Composite power laws in shock fragmentation // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76, N 14. P. 2492–2494.
21. Kadano T. Fragment mass distribution of platelike objects // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78, N 8. P. 1444–1447.
22. Dohnanyi J. S. Interplanetary objects in review: statistics of their masses and dynamics // *Icarus.* 1972. V. 17, N 1. P. 1–48.
23. Hawkins G. S. Asteroidal fragments // *Astron. J.* 1960. V. 65, N 5. P. 318–322.

Поступила в редакцию 15/IV 2003 г.