

УДК 532.5.032

Анализ поведения естественно-конвективного течения, вызванного вибрациями G-джиттер, при наличии силы Лоренца в вертикальном микроканале

Б. Айна, Т. Пиус, С. Камалуддин

Федеральный университет, Гашуа, Нигерия

E-mail: ainavicdydx@gmail.com

В статье представлен теоретический анализ вызванного вибрациями (G-джиттер) естественно-конвективного потока в вертикальном микроканале в условиях микрогравитации и в присутствии силы Лоренца. При этом также учитываются эффекты скорости проскальзывания и скачка температуры. В работе рассматривается одна составляющая временной гармоника вибраций (G-джиттер). Для профиля скорости и температуры получены решения с комбинированным воздействием движущей силы осциллирующей вибрации (G-джиттер) и индуцированной силы Лоренца; последняя возникает в результате приложения поперечного магнитного поля. На основе решений исследуются четыре предельных случая. Вычисления реализуются при различных активных параметрах: частоте вибраций (G-джиттер), взаимодействии жидкости и стенки, разрежении и числе Хартмана. Результаты исследования показали, что амплитуда скорости уменьшается обратно пропорционально частоте, вызванной вибрацией (G-джиттер), и с увеличением числа Хартмана. Индуцированный поток колеблется с той же частотой, что и влияющая на него вибрация (G-джиттер). Кроме того, магнитное поле может применяться для подавления колебательных потоков вкупе с вибрациями (G-джиттер). Оно более эффективно для демпфирования низкочастотных потоков, но оказывает лишь умеренное демпфирующее воздействие на поток, вызванный высокочастотными вибрациями (G-джиттер). Кроме того, скачок температуры, обусловленный эффектами разрежения и параметром взаимодействия жидкости и стенки, оказывает существенное влияние на естественную конвекцию течения со скольжением.

Ключевые слова: G-джиттер, естественная конвекция, силы Лоренца, микроканал, проскальзывание скорости, скачок температуры.

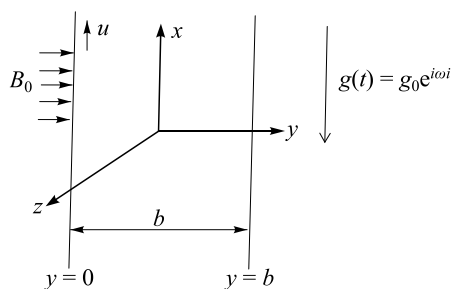
Введение

Явления, связанные с микромасштабными потоками тепла и жидкости, играют важную роль при проектировании и оптимизации микроэлектромеханических систем (МЭМС) и в биомедицинских приложениях. Естественная конвекция, формирующаяся под действием сил плавучести, возникающих при наличии градиента температуры и гравитационного поля, оказывает серьезное влияние на однородность кристаллов, выращенных из расплава на земной орбите. Уменьшение конвекции, обусловленной плавучестью, за счет значительного уменьшения силы тяжести является основной причиной выращивания полупроводниковых или металлических кристаллов из расплавов в условиях космического полета. Среди недавних исследований, посвященных микрогеометрическим потокам, стоит упомянуть работы [1–6]. Авторы [1] теоретически изучили

полностью развитое естественно-конвективное течение в вертикальном параллельном пластинчатом микроканале без учета эффектов индуцированной вибрации (G-джиттер), а также поперечного магнитного поля. В продолжение исследования [1] в настоящей работе изучаются эффекты индуцированной вибрации (G-джиттер) и поперечного магнитного поля в жидкости, которые особенно важны в микромасштабном случае из-за существующего высокого градиента скорости. С другой стороны, условия микрогравитации способствуют подавлению конвективных потоков за счет создания дополнительных эффектов, которые невозможно обнаружить или которые присутствуют во время роста кристаллов в земных условиях. Одним из таких эффектов, влияющих на эксперименты по росту расплава, является течение, вызванное вибрацией (G-джиттер). Эксперименты в полетах показали, что вибрация (G-джиттер), возникающая в космосе, может вызвать заметные конвективные течения в резервуаре с расплавом, что затрудняет планируемую реализацию роста кристаллов из расплавов, контролируемого диффузией, в условиях микрогравитации. Вибрации (G-джиттер), связанные с микрогравитацией, возникают в результате движений команды экипажа и других механических колебаний (от насосов, двигателей, возбуждения собственных частот конструкций космических аппаратов). Исследование G-джиттер-эффектов показало, что конвекция в условиях микрогравитации имеет существенное значение для амплитуды вибрации (G-джиттер) и выравнивания гравитационного поля по отношению к направлению градиента температуры [7–9]. Точный анализ поведения свободной конвекции, вызванной вибрацией (G-джиттер), в условиях микрогравитации был представлен в работе [10]. В этом исследовании пренебрегалось комбинированным влиянием скорости проскальзывания, скачка температуры, а также поперечного магнитного поля. Основываясь на упомянутых литературных источниках, можно утверждать, что каких-либо аналитических исследований вызванного вибрациями (G-джиттер) поведения естественно-конвективного течения при наличии силы Лоренца в вертикальном микроканале не проводилось, что и послужило мотивацией для проведения настоящего исследования. Авторы считают, что полученный результат будет полезен при проектировании и эксплуатации системы термальных жидкостей для обработки космических материалов. Отдельные рассмотренные случаи сравниваются с опубликованными ранее результатами и показывают хорошее соответствие.

Математический анализ

Рассмотрим две вертикальные параллельные пластины шириной b с более высокой и более низкой температурами пластин T_1 и T_2 соответственно, как показано на рис. 1. Электропроводящая жидкость с температурой T_0 течет под влиянием температурного градиента между двумя бесконечно протяженными в направлениях x и z параллельными пластинами, имеющими разные температуры. Рассматриваемая вибрирующая (G-джиттер) жидкость считается пространственно-однородной, но гармонически изменяющейся во времени. Кроме того, в жидкостях с низким



числом Прандтля, таких как полупроводниковые расплавы, которые чрезвычайно важны для обработки материалов в условиях микрогравитации, температура в основном контролируется диффузией и может рассматриваться

Рис. 1. Схематическое представление естественной конвекции, вызванной вибрацией (G-джиттер), в вертикальном микроканале.

в том приближении, что на нее не влияет естественная конвекция. Следовательно, изменяющееся во времени гравитационное поле будет генерировать колебательное поле скорости. Если на него наложить поперечное магнитное поле (см. рис. 1), то этот колебательный поток жидкости будет затухать. Поток жидкости и теплопередача в микромасштабе сильно отличаются от таковых в макромасштабе. На макроуровне классические уравнения сохранения успешно сочетаются с соответствующими граничными условиями на стенке (обычными условиями прилипания для гидродинамического граничного условия) и с отсутствием скачка температуры для теплового граничного условия. Эти два граничных условия действительны только в том случае, если поток жидкости, прилегающий к поверхности, находится в тепловом равновесии. Однако они не применимы для потока жидкости в микромасштабе. В этом случае жидкость не достигает скорости или температуры поверхности, и поэтому следует принять условие скольжения жидкости и условие скачка температуры. В настоящем исследовании обычный континуальный подход сочетается с двумя основными характеристиками микромасштабных явлений: проскальзыванием жидкости и скачком температуры. Проскальзывание жидкости определяется как [1]

$$u_s = -\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b}, \quad (1)$$

где u_s — скорость проскальзывания, λ — средняя длина свободного пробега молекулы, σ_v — коэффициент аккомодации тангенциального импульса. Скачок температуры определяется как [1]

$$T_s - T_w = -\frac{2-\sigma_t}{\sigma_t} \cdot \frac{2\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\lambda}{\text{Pr}} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b}, \quad (2)$$

где T_s — температура жидкости у стенки, T_w — температура стенки, σ_t — коэффициент термической аккомодации, который зависит от жидкости и материалов поверхности. Однако для воздуха он принимает типичные значения, близкие к единице. Далее σ_v и σ_t будут полагаться равными единице. Кроме того, предполагается, что поток является устойчивым и полностью развитым, т. е. его поперечная скорость равна нулю.

Основное математическое уравнение задачи получается из уравнения Максвелла для электромагнитного поля и уравнения Навье–Стокса для потока жидкости [10]. Эти уравнения для течения жидкости под магнитным воздействием могут быть упрощены следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(t)\beta(T - T_0) - \frac{\sigma}{\rho} [E_Z + B_0 u] B_0. \quad (3)$$

Для временных гармонических вибраций (G-джиттер) ускорение силы тяжести определяется как $g(t) = g_0 e^{i\omega t}$, где g_0 — усредненное по времени значение гравитационного ускорения, t — время, ω — частота колебаний потока, связанного с вибрациями (G-джиттер). Уравнение (3) может быть записано в безразмерной форме, если выбраны следующие безразмерные величины:

$$U_0 = \frac{g_0 \beta (T_2 - T_0) b^2}{\nu}, \quad E_0 = \frac{g_0 \beta (T_2 - T_0) b^2 B_0}{\nu}, \quad \Omega = \frac{\omega b^2}{\nu}, \quad (4)$$

$$Y = \frac{y}{b}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \text{Ha} = \frac{B_0 b}{\nu} \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}},$$

где b — зазор между пластинами, g — гравитационное ускорение, Ha — число Хартмана, B_0 — постоянная сила приложенного магнитного поля, Pr — число Прандтля, T — температура жидкости, T_0 — температура жидкости и пластин в исходном состоянии, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность и μ_e — магнитная проницаемость.

Подставив формулы (4) в уравнение (3), в безразмерном виде получим:

$$\frac{d^2 U}{dY^2} - \beta^2 U = \text{Ha}^2 E - \theta, \quad (5)$$

где $\beta = \sqrt{\text{Ha}^2 + i\Omega}$ — комплексное число.

Для расплава с низким числом Прандтля, такого как расплавленный полупроводник или металл, теплопередача в условиях микрогравитации в основном регулируется диффузией, и, следовательно, уравнение энергии в безразмерном виде записывается как

$$\frac{d^2 \theta}{dY^2} = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями в безразмерной форме в виде

$$U(Y) = \beta_v \text{Kn} \frac{dU}{dY}, \quad \theta(Y) = \xi + \beta_v \text{Kn} \ln \frac{d\theta}{dY} \quad \text{при } Y = 0, \quad (7)$$

$$U(Y) = -\beta_v \text{Kn} \frac{dU}{dY}, \quad \theta(Y) = 1 - \beta_v \text{Kn} \ln \frac{d\theta}{dY} \quad \text{при } Y = 1,$$

где

$$\beta_v = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v}, \quad \beta_t = \frac{2 - \sigma_t}{\sigma_t} \frac{2\gamma_s}{\gamma_s + 1} \frac{1}{\text{Pr}}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{b}, \quad \ln = \frac{\beta_t}{\beta_v}, \quad \xi = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Что касается значений σ_v и σ_t , то в работах [11] и [12] было показано, что значение β_v близко к единице, а значение β_t колеблется от 1 до 100 и выше для реальных условий на стенке и составляет около 1,667 для многих инженерных приложений, что соответствует $\sigma_v = 1$, $\sigma_t = 1$, $\gamma_s = 1,4$ и $\text{Pr} = 0,71$ ($\beta_v = 1$, $\beta_t = 1,667$).

Уравнения (5) и (6) с учетом граничного условия (7) имеют следующее аналитическое решение:

$$\theta(Y) = A_0 + A_1(Y), \quad (8)$$

$$U(Y) = D_1 \cosh(\beta Y) + D_2 \sinh(\beta Y) - \frac{\text{Ha}^2 E}{\beta^2} + \frac{[A_0 + A_1 Y]}{\beta^2}, \quad (9)$$

где $A_0 = \xi + \frac{\beta_v \text{Kn} \ln(1 - \xi)}{1 + 2\beta_v \text{Kn} \ln}$, $A_1 = \frac{(1 - \xi)}{1 + 2\beta_v \text{Kn} \ln}$, $D_1 = \text{Ha}^2 E A_9 + A_{10}$, $D_2 = \text{Ha}^2 E A_7 + A_8$,

а $A_0, \dots, A_{10}$ приведены в приложении.

Плотность индуцированного тока и его пространственно усредненное значение, то есть суммарный ток, рассчитываются следующим образом:

$$J = \frac{J_z}{\sigma E_0} = \sum_{n=1} (E_n + U_n) e^{i\omega t} = E + U, \quad (10)$$

$$I = \int_0^1 J(Y) dY = E + D_1 \sinh \frac{(\beta)}{\beta} + D_2 \left[\frac{\cosh(\beta) - 1}{\beta} \right] + \frac{1}{\beta^2} \left[A_0 + \frac{A_1}{2} - \text{Ha}^2 E \right]. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) содержат параметр электрического поля E , который должен определяться электрическими условиями у стенок.

Поверхностное трение на обеих стенках микроканала с использованием выражения (9) в безразмерной форме определяется как

$$\tau_0 = \frac{dU}{dY} \Big|_{Y=0},$$

$$\tau_0 = D_2 \beta + \frac{A_1}{\beta^2},$$

в то время как

$$\tau_1 = \frac{dU}{dY} \Big|_{Y=1},$$

$$\tau_1 = D_1 \beta \sinh(\beta) + D_2 \beta \cosh(\beta) + \frac{A_1}{\beta^2}.$$

Предельные случаи

С помощью приведенного выше уравнения можно легко провести простой анализ. Для этого рассмотрим четыре случая.

1. Чистая конвекция ($\Omega = 0$ и $\text{Ha} = 0$). Этот случай рассматривается в работе [1]. Здесь гравитационное поле считается постоянным ($\Omega = 0$) и на конвективный поток не накладывается магнитное поле. Таким образом, $\beta = 0$. Это соответствует потоку плавленности в наземных условиях. Решение для потока может быть получено из уравнения (9). Вначале нужно рассмотреть решение, когда β мало, а затем — когда β приближается к нулю. Когда β мало, функцию гиперболического синуса можно разложить в ряд Тейлора:

$$\sinh(\beta) = \beta + \frac{1}{6} \beta^3 + O(\beta^5). \quad (12)$$

При подстановке в формулу (9) β^2 в числителе и знаменателе сокращается, и затем β приближается к нулю, в результате получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} U(Y) = B_0 + B_1 Y - \frac{A_0 Y^2}{2} - \frac{A_1 Y^3}{6}, \quad (13)$$

что согласуется с выражением, полученным авторами [1] путем прямого решения уравнения (5) при $\beta = 0$. Следует обратить внимание, что решение для скорости является вещественным, поскольку мнимая часть становится равной нулю для этого предельного случая.

2. Чистое гармоническое движение во времени, вызванное вибрацией (G-джиттер) ($\text{Ha} = 0$), и частотные эффекты ($\Omega = 0$). В этом случае естественно-конвективное течение вызывает вибрация (G-джиттер) с безразмерной частотой Ω при отсутствии магнитного поля. Число Хартмана Ha при этом равно нулю. Учитывая это условие в уравнении (9), получим колебательное течение, амплитуда которого зависит от пространственных координат:

$$U(Y) = A_{10} \cosh(\sqrt{i\Omega} Y) - A_8 \sinh(\sqrt{i\Omega} Y) + \frac{1}{i\Omega} [A_0 + A_1 Y]. \quad (14)$$

Из уравнения (14) видно, что при более высокой частоте амплитуда колебательного потока уменьшается, хотя частота поля скорости остается такой же, как и поле вибрации (G-джиттер).

3. Магнитное демпфирование естественной конвекции ($\Omega = 0$) на земной орбите. Этот случай соответствует эффекту магнитного демпфирования естественной конвекции под действием гравитационного поля Земли. Выражение скорости можно получить, задав $\Omega = 0$ и $\beta = \text{Ha}$ в уравнении (9):

$$U(Y) = [\text{Ha}^2 EA_9 + A_{10}] \cosh(\text{Ha}Y) + [\text{Ha}^2 EA_7 - A_8] \sinh(\text{Ha}Y) + \frac{1}{\text{Ha}^2} [A_0 + A_1 Y - \text{Ha}^2 E]. \quad (15)$$

Отметим, что при $\xi = 1$ эффект скольжения отсутствует. Приведенное выше выражение сводится к решению классической задачи Хартмана, в которой поток управляется постоянным градиентом давления. В рассматриваемом случае градиент давления будет нормализован на единицу.

4. Влияние магнитного демпфирования на конвекцию, вызванную вибрацией (G-джиттер). В зависимости от электрических условий на стенке могут возникать два типа скорости. Когда стенки изготовлены из электроизоляционных материалов, в системе не должно быть тока или он должен равняться нулю ($I = 0$). В результате этого электрическое поле может быть получено из уравнения (11):

$$E = \frac{[\beta A_8 \{ \cosh(\beta) - 1 \} - \beta A_{10} \sinh(\beta) - (A_0 + A_1/2)]}{[\beta^2 + \beta A_9 \text{Ha}^2 \sinh(\beta) + \beta A_7 \text{Ha}^2 [\cosh(\beta) - 1] - \text{Ha}^2]}. \quad (16)$$

Следует отметить, что, хотя общий ток равен нулю или на выходе из системы он отсутствует, плотность тока не равна нулю. Вместо этого в результате того, что дивергенция плотности тока должна быть равна нулю, образуется рециркуляционный контур внутри расплава.

Если стенки микроканала являются электропроводящими или идеальными проводниками, общий ток, выходящий из расплава, не будет равен нулю. Однако тот факт, что тангенциальное электрическое поле должно быть непрерывным по всей поверхности расплава до границы раздела стенок, требует, чтобы электрическое поле в расплаве было равно нулю, т.е. $E = 0$. В этом случае электрический ток индуцируется приложенным магнитным полем, так как скорость в системе и общий ток, протекающий через систему, задаются уравнением (9). Профиль скорости, таким образом, определяется как

$$U(Y) = A_{10} \cosh(\beta Y) - A_8 \sinh(\beta Y) + \frac{1}{\text{Ha}^2} [A_0 + A_1 Y]. \quad (17)$$

Видно, что в обоих случаях колебательный конвективный поток можно уменьшить, если приложить магнитное поле. Для достаточно большого магнитного поля скорость может быть уменьшена до такой степени, чтобы условие для роста теплообмена, контролируемого диффузией, было верным.

Результаты и обсуждение

Рассмотрим влияние на конвективный теплообмен вычисляемой скорости жидкости, её температуры и трения о стенку различных параметров потока, таких как частота вибраций (G-джиттер), соотношение разности температур стенок и окружающей среды ($\xi = -1$: одна стенка нагревает жидкость, другая охлаждает; $\xi = 0$: одна стенка нагревает,

Рис. 2. Влияние разрежения на колебательную естественную конвекцию в микроканале.

$Ha = 5$, $\Omega = 10$, $ln = 1,667$; $\xi = 1$ (1), 0 (2), -1 (3).

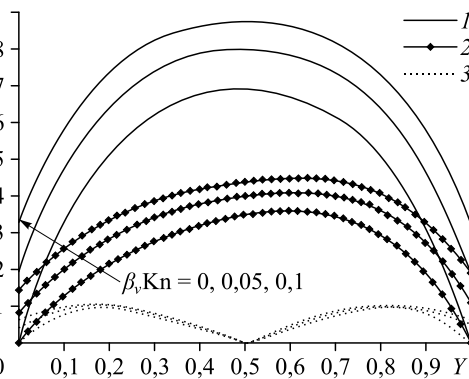
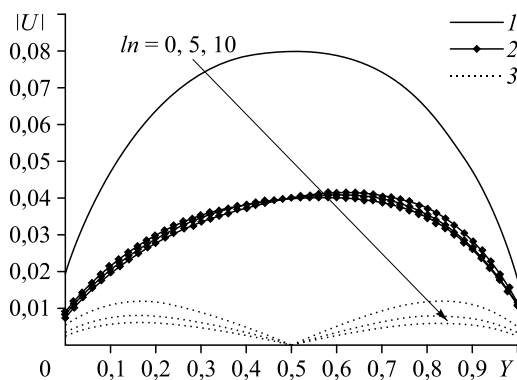
другая имеет нулевую разность температур; $\xi = 1$: обе стенки нагревают), число Хартмана (Ha), число Кнудсена ($\beta_v Kn$) и взаимодействие стенок с жидкостью (ln). Настоящее исследование проводилось в разумных диапазонах параметров: $0 \leq \beta_v Kn \leq 0,1$ и $0 \leq ln \leq 10$. Произве-

дение $\beta_v Kn$ характеризует степень отклонения от режима непрерывности, ln — взаимодействие жидкости и стенки. Контрольные значения $\beta_v Kn$ и ln , выбранные для анализа, составляют 0,05 и 1,667, как и в работе [1].

На рис. 2 показано влияние $\beta_v Kn$ и ξ на профиль скорости с $ln = 1,667$, $Ha = 2$ и $\Omega = 10$. Очевидно, что увеличение параметра разрежения, а также соотношения разности температур стенки и окружающей среды приводят к увеличению скорости проскальзывания на стенках микроканалов, что уменьшает замедляющий эффект границ. Это приводит к увеличению скорости жидкости. Кроме того, видно, что в случае $\xi = -1$, профиль скорости имеет форму полуволны.

Рис. 3 отражает влияние параметров ln и ξ на профиль скорости при $\beta_v Kn = 0,05$, $Ha = 2$ и $\Omega = 10$. Можно заметить, что увеличение значений параметра взаимодействия стенки с жидкостью и отношения перепада температуры стенки — окружающей среды приводит к уменьшению скорости жидкости при увеличении скорости проскальзывания, при этом эффект от соотношения температуры стенки — окружающей среды уменьшается. Кроме того, интересно, что профиль скорости в случае одного нагрева и одного охлаждения имеет форму полуволны.

Рис. 4 иллюстрирует влияние частоты, вызванной вибрацией (G-джиттер), и различных соотношений температуры стенки и окружающей среды на поведение потока при воздействии магнитного поля и без него соответственно. Считается, что поток, вызванный вибрацией (G-джиттер), быстро уменьшается, так как частота, образующаяся вследствие вибрации (G-джиттер), будет оказывать меньшее негативное влияние на изменение индуцирующего потока через микроканал. Кроме того, увеличение значения



разницы температуры стенки и окружающей среды приводит к возрастанию скорости проскальзывания. Из рисунка также видно, что в случае, когда $\xi = -1$, профиль скорости имеет форму полуволны.

Рис. 3. Влияние взаимодействия жидкости и стенки на колебательную естественную конвекцию в микроканале.

$Ha = 5$, $\Omega = 10$, $\beta_v Kn = 0,05$;
 $\xi = 1$ (1), 0 (2), -1 (3).

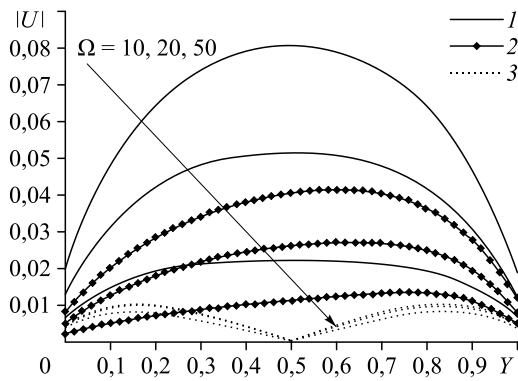


Рис. 4. Влияние вибрации (G-джиттер) на колебательную естественную конвекцию в микроканале.

$Na = 5, ln = 1,667, \beta, Kn = 0,05;$
 $\xi = 1$ (1), 0 (2), -1 (3).

На рис. 5 показано влияние демпфирования магнитного поля, а также разницы температуры стенки и окружающей среды на поток, вызванный вибрацией (G-джиттер). Видно, что увеличение магнитного поля приводит к уменьшению скорости жидкости. Кроме того,

в случае одного нагрева и одного охлаждения существует точка, в которой профиль скорости имеет форму полуволны.

Амплитуда индуцированной скорости при $Y = 0,5$ строится в зависимости от величины магнитного поля, соотношения температуры стенки и окружающей среды и частоты, вызванной вибрацией (G-джиттер) (см. рис. 6). Считается, что при увеличении отношения разности температур стенок и окружающей среды магнитное поле сильно влияет на низкочастотный конвективный поток и оказывает лишь умеренное влияние на течение с высокочастотными вибрациями (G-джиттер). Но, кроме того, в точке $Na = 25$ и выше имеется указание на то, что частота становится в основном несущественной и дальнейшее увеличение магнитного поля мало влияет на затухание потока.

Изменение параметров τ_0 с β, Kn и ln изображено на рис. 7. Очевидно, что τ_0 уменьшается с увеличением ln , а с увеличением β, Kn влияние параметра взаимодействия жидкости и стенки на τ_0 уменьшается, в то время как из рис. 8 следует, что для τ_1 имеет место обратное.

Заключение

Представлен теоретический анализ поведения осциллирующего естественно-конвективного течения в присутствии силы Лоренца в вертикальном микроканале. Анализ показывает, что существует точка, в которой профиль скорости имеет форму полуволны

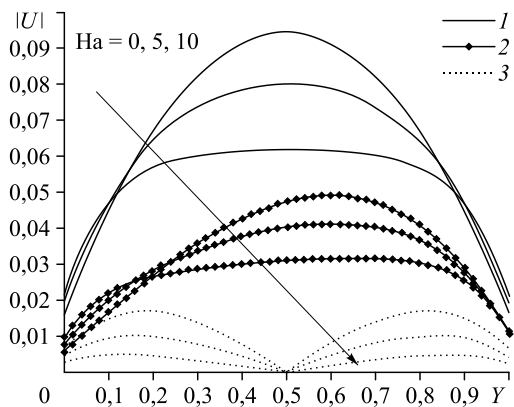


Рис. 5. Влияние магнитного поля на затухание потоков, вызванных вибрациями (G-джиттер).

$Na = 5, ln = 1,667, \beta, Kn = 0,05; \xi = 1$ (1), 0 (2), -1 (3).

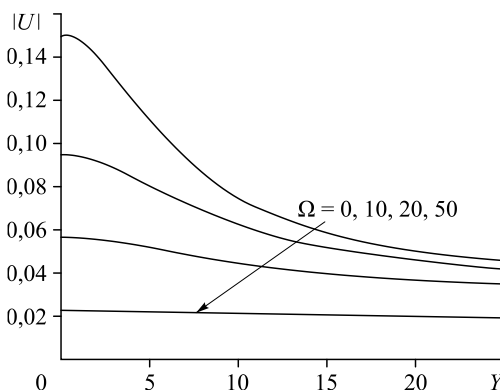


Рис. 6. Уменьшение амплитуды скорости в зависимости от силы приложенного магнитного поля для $Y = 0,5, \xi = 1$.

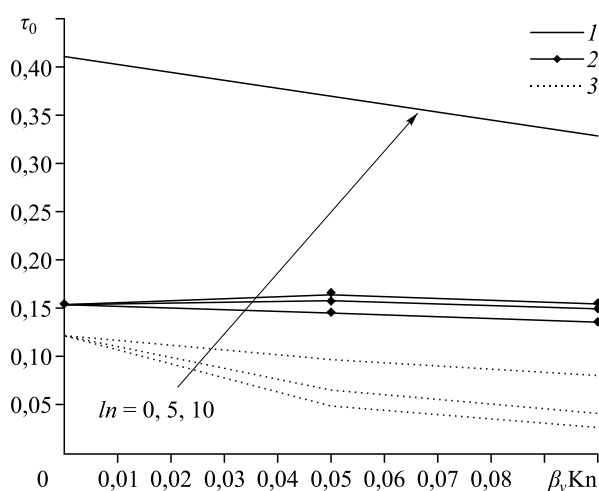


Рис. 7. Поверхностное трение по сравнению с $\beta_v Kn$ для разных значений ln при $Y = 0$, $Na = 5$, $\Omega = 10$. $\xi = 1$ (1), 0 (2), -1 (3).

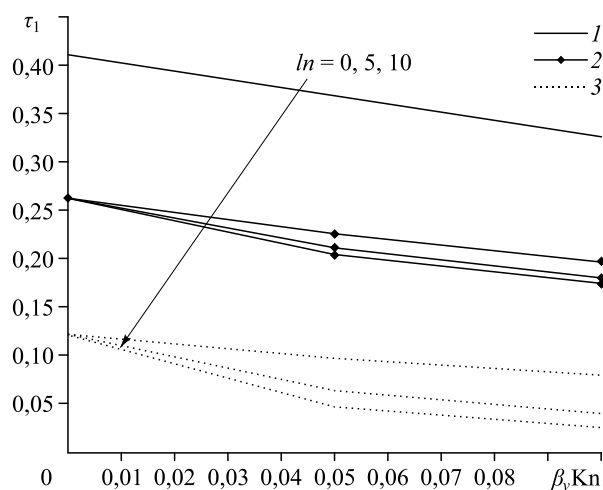


Рис. 8. Поверхностное трение по сравнению с $\beta_v Kn$ для разных значений ln при $Y = 1$, $Na = 5$, $\Omega = 10$. $\xi = 1$ (1), 0 (2), -1 (3).

в случае одного нагрева и одного охлаждения. Также установлено, что при увеличении ln τ_0 уменьшается и по мере увеличения $\beta_v Kn$ влияние параметра взаимодействия жидкости и стенки на τ_0 уменьшается, в то время как для τ_1 имеет место обратное. Кроме того, увеличение параметра разрежения, а также отношения разности температур стенок и окружающей среды приводят к увеличению скорости проскальзывания на стенках микроканалов, что уменьшает замедляющий эффект границ. Применение магнитного поля помогает снизить скорость потока.

Список литературы

1. Chen C.K., Weng H.C. Natural convection in a vertical microchannel // J. Heat Transfer. 2005. Vol. 127. P. 1053–1056.
2. Jha B.K., Aina B., Isa S. MHD natural convection flow in a vertical micro-concentric-annuli in the presence of radial magnetic field: An exact solution // J. Ain Shams Engng. 2016. Vol. 7. P. 1061–1068.

3. Jha B.K., Aina B. Mathematical modeling and exact solution of steady fully developed mixed convection flow in a vertical micro-porous-annulus // J. Afrika Matematika. 2015. Vol. 26. P. 1199–1213.
4. Jha B.K., Aina B., Ajiya A.J. Role of suction/injection on MHD natural convection flow in a vertical micro-channel // Int. J. Energy and Technology. 2015. Vol. 7, No. 2. P. 30–39.
5. Джа Б.К., Айна Б., Мухаммад С.А. Совместное воздействие отсоса/вдува и кривизны стенки на естественную конвекцию в вертикальном микропористом кольцевом зазоре // Теплофизика и аэромеханики. 2015. Т. 22, № 2. С. 227–238.
6. Jha B.K., Aina B., Isa S. Transient magnetohydrodynamic free convective flow in vertical micro-concentric annuli // J. Nanoengineering and Nanosystems. 2015. Vol. 230, Iss. 4. P. 188–199.
7. Jha B.K., Aina B., Isa S. Fully developed MHD natural convection flow in a vertical annular microchannel: an exact solution // J. King Saud University Sci. 2015. Vol. 27. P. 253–259.
8. Jha B.K., Aina B., Ajiya A.J. MHD natural convection flow in a vertical parallel plate microchannel // Ain Shams Engng J. 2015. Vol. 6. P. 289–295.
9. Jha B.K., Aina B., Joseph S.B. Natural convection flow in vertical micro-channel with suction/injection // J. Process Mechanical Engng. 2014. Vol. 228, No. 3. P. 171–180.
10. Ben Q.L. g-Jitter induced free convection in a transverse magnetic field // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1996. Vol. 39, No. 14. P. 2853–2860.
11. Eckert E.R.G., Drake Jr. R.M. Analysis of heat and mass transfer. New York: McGraw-Hill, 1972. 806 p. Chap. 11.
12. Goniak R., Duffa G. Corrective term in wall slip equations for Knudsen layer // J. Thermophys. Heat Transfer. 1995. Vol. 9. P. 383–384.

Приложение

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \xi + \frac{\beta_v \text{Kn} \ln(1-\xi)}{1 + 2\beta_v \text{Kn} \ln}, \quad A_2 = \frac{A_1 \beta_v \text{Kn} - A_0}{\beta^2}, \quad A_3 = \frac{A_0 + A_1 + \beta_v \text{Kn} A_1}{\beta^2}, \\
 A_4 &= \cosh(\beta) + \beta_v \text{Kn} \beta \sinh(\beta), \quad A_5 = \sinh(\beta) + \beta_v \text{Kn} \beta \cosh(\beta), \quad A_6 = \beta_v \text{Kn} \beta A_4 + A_5 \\
 A_7 &= \frac{(1 - A_4)}{\beta^2 A_6}, \quad A_8 = \frac{(A_3 + A_2 A_4)}{A_6}, \quad A_9 = \frac{(A_5 + \beta_v \text{Kn} \beta)}{\beta^2 A_6}, \quad A_{10} = \frac{(A_5 A_2 - \beta_v \text{Kn} \beta A_3)}{A_6}, \\
 D_1 &= \text{Ha}^2 E A_9 + A_{10}, \quad D_2 = \text{Ha}^2 E A_7 - A_8.
 \end{aligned}$$

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2020 г.,
 после доработки — 26 марта 2020 г.,
 принята к публикации 5 августа 2020 г.