

УДК 514.7+517.98+519.61

Томография бессиловых полей

А.Л. Баландин

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033

E-mail: balandin@icc.ru

Баландин А.Л. Томография бессиловых полей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 3. — С. 237–253.

Для исследования бессиловых полей предложено использовать методы вычислительной томографии. Для обращения лучевого преобразования разработан метод мультипольного разложения. Метод основан на разложении векторного поля и лучевого преобразования по специальным базисным векторным функциям. Приведены аналитические выражения лучевого преобразования базисных векторных функций и представлены результаты численного моделирования.

DOI: 10.15372/SJNM20150301

Ключевые слова: *вычислительная томография, сферические гармоники, обратные задачи.*

Balandin A.L. Tomography of force-free fields // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 3. — P. 237–253.

In order to investigate the force-free fields it is proposed to use the computerized tomography methods. For the inversion of the ray transformation, the method of multipole fields expansion has been developed. This method is based on the expansion of a vector field and the ray transformation over the special basis of vector-functions. Analytical expressions for the ray transform of the basis vector-functions and the results of computer simulation are given.

Keywords: *computerized tomography, spherical harmonics, inverse problems.*

1. Введение

В астрофизике [1, 2], в физике плазмы [3, 4], в задачах гидродинамики [5, 6] важную роль играют так называемые бессиловые поля. Теория и множество приложений бессиловых полей описаны в книге [7]. Бессиловые магнитные поля удовлетворяют условию, что магнитное поле в некоторой области везде параллельно вектору плотности тока, т. е. $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$. Аналогом магнитным бессиловым полям в гидродинамике является поля, удовлетворяющие условию

$$\nabla \times \mathbf{V} = \Omega \mathbf{V},$$

где \mathbf{V} — скорость среды. Решения этого уравнения, когда Ω есть функция координат, известны как поля Бельтрами (Beltrami); решения, когда Ω — постоянная величина, являются полями Тркалиан (Trkalian). Таким образом, существует аналогия между скоростью \mathbf{V} и магнитным полем \mathbf{B} , а также между завихренностью $\nabla \cdot \mathbf{V}$ и вектором плотности тока \mathbf{J} . В работе предполагается разработка томографических методов диагностики таких полей применительно к задачам физики плазмы, возможно также применение этих методов для исследования Солнечной короны.

Проблема трёхмерной (3D) векторной томографии заключается в реконструкции неизвестного векторного поля в ограниченной области по известному лучевому преобразованию. Методы векторной томографии широко используются для исследования физических объектов. Например, проблемы восстановления распределения поля скоростей и магнитного поля в физике плазмы рассматривались в [8, 9], использование ультразвуковых время-пролётных измерений в жидкостно-подобных средах для определения поля

скоростей свидетельствует о возможностях векторной томографии в исследовании физических сред [10]. Другую информацию о приложениях и дополнительные ссылки по векторной томографии можно найти в работах [11–15]. В отличие от скалярной томографии задача векторной томографии не имеет единственного решения, так как ядро лучевого преобразования содержит потенциальные поля с нулевыми граничными значениями. Поэтому невозможно восстановить потенциальную составляющую векторного поля, используя только результаты лучевого преобразования, а восстанавливается только соленоидальная компонента. Достаточно эффективным методом для решения этой задачи является метод мультипольного разложения, когда векторное поле и лучевое преобразование разлагаются по определённым базисным функциям. При этом удобно выбрать такую систему базисных векторных функций, что все компоненты и любые линейные комбинации из этих компонент преобразовывались бы при повороте системы координат единым образом. Такому условию удовлетворяет, например, совокупность $2l + 1$ сферических функций Y_{lm} ; $m = -l, \dots, l$. Совокупность $2l + 1$ величин, которые при вращении системы координат преобразуются так же, как сферические функции Y_{lm} , называются сферическими тензорами или тензорными сферическими гармониками [16]. Простейшим примером такого сферического тензорного оператора (неприводимого тензорного оператора) являются функции $f(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$, где $f(r)$ — произвольная функция r , $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Хотя векторные сферические гармоники решают проблему разложения произвольного векторного поля [17–19], например, в задачах диагностики плазмы в качестве базисных векторных функций удобнее использовать векторы Хансена $\mathbf{M}_l^m, \mathbf{N}_l^m, \mathbf{L}_l^m$ (Hansen multipole fields) [20, 21], так как поля скоростей и магнитные поля, как правило, удовлетворяют условию соленоидальности. Векторы $\mathbf{M}_l^m, \mathbf{N}_l^m$, как видно из определения (9), являются соленоидальными векторами и, следовательно, формируют соленоидальный базис для векторных полей.

Векторное поле $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, подлежащее определению, рассматривается в системе координат $S(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$. В системе координат регистрации проекционных данных S' векторное поле имеет вид $\mathbf{g}'(\mathbf{r}')$, $\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r}$. С помощью матрицы вращения \mathcal{R} система координат S переводится в систему координат S' . Векторное поле при этом преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{r}') = \mathcal{R}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathcal{R}\mathbf{g}(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}') \quad \text{или в виде} \quad \mathbf{g}'(\mathbf{r}) = \mathcal{R}\mathbf{g}(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}).$$

Для произвольного вращения, определяемого положительными углами Эйлера (α, β, γ) , матрица вращения \mathcal{R} записывается в виде

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi.$$

Статья состоит из семи пунктов и приложения. Во введении кратко описана постановка задачи и используемый инструмент для её решения. Определение и представление бессилового поля даны в п. 2. В третьем пункте приводятся определение лучевого преобразования и теорема о центральном сечении для векторных полей. В четвёртом и пятом пунктах вводятся определения векторов Хансена, вычисляются их трёхмерные преобразования Фурье и получены аналитические выражения лучевого преобразования для векторов Хансена. Результат численного моделирования представлен в шестом пункте. В приложении приведены некоторые вспомогательные данные.

2. Представление бессилового поля

Бессиловые магнитные поля удовлетворяют условию, что магнитное поле в некоторой области везде параллельно вектору плотности тока, т. е. $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B}$. Для любого бессилового поля существует такая скалярная функция $\varkappa(\mathbf{x})$, что при условии $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, справедливо соотношение [7]:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varkappa \mathbf{B}. \quad (2)$$

Последнее соотношение приводит к следующему векторному уравнению Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Каждое решение уравнения (3) (при $\varkappa = \text{const}$) не обязательно является решением уравнения (2), но обратное верно. Это означает, что решения уравнения (2) должны быть среди решений уравнения (3).

Если ψ — скалярная функция, удовлетворяющая скалярному уравнению Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) \psi = 0, \quad (4)$$

тогда хорошо известно [2, 20, 21], что три независимые решения уравнения (3) можно задать в виде:

$$\mathbf{L} = \nabla \psi, \quad \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a} \psi), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\varkappa} \nabla \times \mathbf{M}, \quad (5)$$

здесь \mathbf{a} — постоянный единичный вектор.

Так как \mathbf{M} удовлетворяет уравнению (3) и $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, из соотношения (5) следует, что

$$\nabla \times \mathbf{N} = \frac{1}{\varkappa} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}) = -\frac{1}{\varkappa} \nabla^2 \mathbf{M} = \varkappa \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\varkappa} \nabla \times \mathbf{N}, \quad (6)$$

и, следовательно, вектор $\mathbf{N} + \mathbf{M}$ является собственной функцией оператора $(\nabla \times)$ и $\nabla \times (\mathbf{N} + \mathbf{M}) = \varkappa(\mathbf{N} + \mathbf{M})$, т. е. поле $\mathbf{N} + \mathbf{M}$ является бессиловым.

Наиболее общим решением уравнения (2), таким образом, является [2]:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\varkappa} \nabla^2 (\mathbf{a} \psi) + \nabla (\mathbf{a} \psi), \quad (7)$$

вектор \mathbf{a} будем полагать равным единичному радиальному вектору \mathbf{e}_r , скалярная функция ψ выбирается в виде

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = Z_l(\varkappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (8)$$

и является фундаментальным решением уравнения (4). Здесь $Z_l(x) = j_l(x)$; $y_l(x)$, $h_l^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x)$ — любые нормированные сферические функции Бесселя соответственно первого, второго и третьего родов, $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ — нормированные скалярные сферические гармоники.

В сферической системе координат векторы \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{N} записываются в виде [20–22]:

$$\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times [\mathbf{r} \psi_{lm}(\mathbf{r})] = \sqrt{l(l+1)} Z_l(\varkappa r) \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (9a)$$

$$\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varkappa} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) = l(l+1) \frac{Z_l(\varkappa r)}{\varkappa r} \mathbf{P}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{l(l+1)} \frac{1}{\varkappa r} \frac{d(\varkappa r Z_l(\varkappa r))}{d(\varkappa r)} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (9b)$$

$$\mathbf{L}_l^m(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \psi_{lm}(\mathbf{r}) = \sqrt{l(l+1)} \frac{Z_l(\varkappa r)}{\varkappa r} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{dZ_l(\varkappa r)}{d(\varkappa r)} \mathbf{P}_l^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (9b)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\hat{\mathbf{r}}}, \quad \nabla_{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где \mathbf{C}_l^m , \mathbf{B}_l^m , \mathbf{P}_l^m — векторные сферические гармоники (см. (36) в приложении).

Таким образом, любое бессиловое поле может быть представлено в виде

$$\mathbf{B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} \mathbf{B}_{lm}, \quad \mathbf{B}_{lm} = \mathbf{N}_l^m + \mathbf{M}_l^m. \quad (10)$$

Для регулярных в начале координат векторных полей в дальнейшем будет использоваться $Z_l(\boldsymbol{\kappa}r) = j_l(\boldsymbol{\kappa}r)$. Векторные функции \mathbf{M}_l^m , \mathbf{N}_l^m , \mathbf{L}_l^m образуют линейно независимую систему функций. Для них справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{L}_l^m \cdot \mathbf{M}_l^m = \mathbf{M}_l^m \cdot \mathbf{N}_l^m = 0, \quad \mathbf{L}_l^m \cdot \mathbf{N}_l^m \neq 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M}_l^m = \nabla \cdot \mathbf{N}_l^m = 0, \quad \nabla \times \mathbf{L}_l^m \neq 0,$$

т.е. векторы \mathbf{M}_l^m , \mathbf{N}_l^m могут быть использованы для представления соленоидальных, а \mathbf{L}_l^m — для представления потенциальных полей соответственно. В задачах диагностики плазмы, как правило, и поля скоростей, и магнитные поля удовлетворяют условию соленоидальности.

3. Векторное лучевое преобразование: определение и теорема о центральном сечении

Определение 1. Пусть $T = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mid \boldsymbol{\xi} \in S^{N-1}, \mathbf{x} \in \boldsymbol{\xi}^\perp\}$. Для $\mathbf{g} \in (H^k(\mathbb{R}^N))^3$. Лучевое преобразование $\mathcal{I}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{g}(\mathbf{x})$ определяется в виде

$$T \ni (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \mathcal{I}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) dt, \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{\xi}^\perp, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp = 0. \quad (11)$$

Здесь $H^k(\mathbb{R}^N)$ — пространство Соболева, для наших целей достаточно положить $k = 1$; $\boldsymbol{\xi}$ — единичный вектор, ориентированный вдоль линии интегрирования; вектор-функция $\boldsymbol{\chi}$ зависит от физического метода измерения и для спектральных измерений, наиболее часто используемых в плазменных экспериментах, $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\xi}$.

Теорема 1 [30, теорема о центральном сечении].

$$\{\mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{I}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{1/2} \boldsymbol{\xi} \cdot \{\mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{g}\}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \boldsymbol{\xi}^\perp, \quad (12)$$

где \mathcal{F}_2^{-1} и \mathcal{F}_3^{-1} соответственно 2D и 3D преобразования Фурье.

Доказательство. Доказательство можно найти в [30]. □

4. Преобразование Фурье векторов $\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r})$ и $\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$

В этом пункте приведены преобразования Фурье, которые будут использоваться для аналитического вычисления лучевых преобразований вектор-функций $\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r})$ и $\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$.

Пусть $\mathbf{k}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ и $\psi(\mathbf{r}) \in L_2(\mathbb{R}^3)$. Преобразование Фурье будем использовать в виде

$$\mathcal{F}_3^{\mp 1} \psi(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Величины $\mathbf{r} = (r\hat{\mathbf{r}})$, $\mathbf{k} = (k\hat{\mathbf{k}})$ определяют сферические координаты $(r, \hat{\mathbf{r}})$, $(k, \hat{\mathbf{k}}) \in [0, \infty] \times S^2$.

Предварительно приведём Фурье преобразование скалярной функции $\psi_{lm}(\mathbf{r}) = j_l(\boldsymbol{\kappa}r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$, здесь $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ — скалярные сферические гармоники, $j_l(r)$ — сферические функции Бесселя первого рода.

Лемма 1. Пусть $\psi_{lm}(\mathbf{r}) \in L^2(R^3)$ имеет вид

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = j_l(\kappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \text{где } \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} r. \quad (14)$$

Тогда Фурье-образ представляется в виде

$$\mathcal{F}_3^{-1} \psi_{lm}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}) = i^l \sqrt{\frac{\pi}{2}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \frac{\delta(\mathbf{k} - \kappa)}{\kappa^2}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{\kappa}, \quad (15)$$

здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Доказательство. Фурье-преобразование в сферической системе координат имеет вид

$$\mathcal{F}_3^{-1} \psi_{lm}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}) = (2\pi)^{-3/2} \int_0^\infty r^2 dr \int_{S^2} e^{i\mathbf{k}r\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}} j_l(\kappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (16)$$

Полагая в теореме 2 (см. приложение) $F(t) = \exp(ikrt)$, выражение (16) переписывается в виде

$$\mathcal{F}_3^{-1} \psi_{lm}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}) = a_{3l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \int_0^\infty r^2 j_l(\kappa r) \int_{-1}^1 e^{ikrt} C_l^{1/2}(t) dt dr, \quad a_{3l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (17)$$

□

Интеграл по t вычисляется аналитически [29, 7.321]:

$$\int_{-1}^1 e^{ikrt} C_l^{N/2-1}(t) (1-t^2)^{(N-3)/2} dt = b_{Nl} (\kappa r)^{1-N/2} J_{l+N/2-1}(\kappa r), \quad (18)$$

$$b_{Nl} = \frac{\pi 2^{2-N/2} i^l \Gamma(N+l-2)}{l! \Gamma(N/2-1)} \quad \text{при } N=3, \quad b_{3l} = i^l \sqrt{2\pi},$$

$$\mathcal{F}_3^{-1} \psi_{lm}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}) = a_{3l} b_{3l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \kappa^{-1/2} \int_0^\infty r^{3/2} j_l(\kappa r) J_{l+1/2}(\kappa r) dr. \quad (19)$$

Последнее выражение переписывается в виде

$$\mathcal{F}_3^{-1} \psi_{lm}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}) = a_{3l} b_{3l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \kappa^{-1/2} \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_0^\infty r^2 j_l(\kappa r) j_l(\kappa r) dr. \quad (20)$$

Учитывая, что $\int_0^\infty r^2 j_l(\kappa r) j_l(\kappa r) dr = \frac{\pi \delta(\mathbf{k} - \kappa)}{2\kappa^2}$, получаем требуемое соотношение (15).

Лемма 2.

$$\mathcal{F}_3^{-1} M_l^m(\mathbf{k}) = -\frac{i^l}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{k} - \kappa)}{\kappa^2} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{l(l+1)} \frac{i^l}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{k} - \kappa)}{\kappa^2} C_l^m(\hat{\mathbf{k}}). \quad (21)$$

Доказательство.

$$\mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} r j_l(\kappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] d\mathbf{r} = -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} j_l(\kappa r) (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\hat{\mathbf{r}}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r},$$

так как оператор $(\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\hat{\mathbf{r}}})$ действует только на угловые переменные и не зависит от r , подынтегральное выражение можно переписать

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) &= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) [j_l(\kappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] d\mathbf{r} \\ &= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \int_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} j_l(\kappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}, \\ \nabla_{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{1}{k} \nabla_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad \nabla_{\hat{\mathbf{k}}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Используя результат леммы 1, получаем

$$\mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) = -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} i^l \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \left\{ Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \frac{\delta(k - \kappa)}{k^2} \right\}.$$

Замечая, что оператор $(\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}})$ действует только на $\hat{\mathbf{k}}$, получаем утверждение леммы 2. \square

Лемма 3.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{N}_l^m(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\kappa} \frac{i^{l+1}}{4\pi} \frac{\delta(k - \kappa)}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\kappa} \frac{i^{l+1}}{4\pi} \frac{\delta(k - \kappa)}{k^2} \mathbf{k} \times \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\kappa} \frac{i^{l+1}}{4\pi} \frac{\delta(k - \kappa)}{k} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (22)$$

Доказательство. Из определения векторов \mathbf{N}_l^m (9):

$$\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\kappa} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_l^m(\mathbf{r})$$

и, следовательно, Фурье-преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{N}_l^m(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\kappa} i\mathbf{k} \times \mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) = \frac{1}{\kappa} \frac{i^{l+1}}{4\pi} \frac{\delta(k - \kappa)}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\kappa} \frac{i^{l+1}}{4\pi} \frac{\delta(k - \kappa)}{k^2} \mathbf{k} \times \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\kappa} \frac{i^{l+1}}{4\pi} \frac{\delta(k - \kappa)}{k} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (23)$$

так как $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = -\mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}})$. \square

5. Лучевое преобразование базисных векторов M_l^m , N_l^m

Лемма 4.

$$\mathcal{I}_\xi M_l^m(\rho, \phi) = -\frac{\sqrt{l(l+1)} i^l}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} i^{m'} e^{im'\phi} A_{lm'}^{\theta'}, \quad (24)$$

$$A_{lm'}^{\theta'} = \frac{im'}{\sqrt{l(l+1)}} N_{lm'} P_l^{|m'|}(0), \quad N_{lm'} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m'|)!}{4\pi(l+|m'|)!}},$$

здесь $D_{mm'}^l(\alpha\beta\gamma)$ — D -функции Вигнера, $*$ обозначает комплексное сопряжение, α, β, γ — углы Эйлера, с помощью которых система координат S переводится в систему координат S' , $J_{m'}(\varkappa\rho)$ — функции Бесселя.

Доказательство. Согласно теореме о центральном сечении (12):

$$\mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{I}g(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{1/2} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{F}_3^{-1} g(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \boldsymbol{\xi}^\perp, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp = 0,$$

откуда получаем

$$\mathcal{I}g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}_2^{+1}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{F}_3^{-1} g(\mathbf{k})), \quad \mathbf{u}, \mathbf{k} \in \boldsymbol{\xi}^\perp.$$

Перепишем преобразование Фурье векторов M_l^m (21) в инвариантном виде

$$\begin{aligned} \tilde{M}_l^m(\mathbf{k}) &\equiv \mathcal{F}_3^{-1} M_l^m(\mathbf{k}) = -\frac{i^l}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{l(l+1)} \frac{i^l}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \sqrt{l(l+1)} \frac{i^l}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) \mathbf{C}_l^{m'}(\hat{\mathbf{k}}'). \end{aligned}$$

Плоскость, проходящая через начало координат определяется вектором нормали $\boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{k}}'_z = (0, 0, 1)$ в системе координат S' , $\mathbf{k} = \mathcal{R}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{k}'$, матрица \mathcal{R} определена в (1):

$$\mathcal{F}_2^{+1} \{ \boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{M}_l^m(\mathbf{k}) \}(\rho, \phi) = \frac{\sqrt{l(l+1)} i^l}{2(2\pi)^{3/2}} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) \boldsymbol{\xi} \cdot \begin{bmatrix} A_{lm'}^k \hat{\mathbf{k}}' \\ A_{lm'}^{\theta'} \hat{\boldsymbol{\theta}}' \\ A_{lm'}^{\varphi'} \hat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{bmatrix} I(\rho, \phi), \quad (25)$$

$$I(\rho, \phi) = \int_0^\infty \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} \mathbf{k} d\mathbf{k} \int_0^{2\pi} e^{im'\varphi'} d\varphi' e^{-ik\rho \cos(\varphi' - \phi)} d\varphi' = 2\pi i^{m'} \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} e^{im'\phi}.$$

Коэффициенты $A_{lm'}^k$, $A_{lm'}^{\theta'}$, $A_{lm'}^{\varphi'}$ — равны соответственно

$$\begin{aligned} A_{lm'}^k &= 0, \quad A_{lm'}^{\theta'} = \frac{im'}{\sqrt{l(l+1)}} N_{lm'} P_l^{|m'|}(0), \\ A_{lm'}^{\varphi'} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l-|m'|)(l+|m'|+1)}{l(l+1)}} N_{l,|m'|+1} P_l^{|m'|+1}(0) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+|m'|)(l-|m'|+1)}{l(l+1)}} N_{l,|m'|-1} P_l^{|m'|-1}(0). \end{aligned}$$

В декартовой системе координат S' коэффициенты $A_{lm'}^k, A_{lm'}^{\theta'}, A_{lm'}^{\varphi'}$ имеют значения

$$\mathbf{A}_{lm'}^{k'} = \begin{pmatrix} A_{lm'}^{k'_x} \\ A_{lm'}^{k'_y} \\ A_{lm'}^{k'_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' & \cos \theta' \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' & \cos \theta' \sin \varphi' & \cos \varphi' \\ \cos \theta' & -\sin \theta' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{lm'}^{\theta'} \\ A_{lm'}^{\varphi'} \end{pmatrix}.$$

Из последних соотношений видим, что $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}_{lm'}^{k'} = -A_{lm'}^{\theta'}$, так как в системе координат S' угол $\theta' = \pi/2$. В результате (25) переписывается в виде

$$\mathcal{F}_2^{+1}\{\boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_l^m(\mathbf{k})\}(\rho, \phi) = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2\sqrt{2\pi}} i^l \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) i^{m'} \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} e^{im'\phi} A_{lm'}^{\theta'}. \quad \square$$

Лемма 5.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{N}_l^m(\rho, \phi) &= \frac{\sqrt{l(l+1)} i^{l+1}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} i^{m'} e^{im'\phi} B_{lm'}^{\theta'}, \\ B_{lm'}^{\theta'} &= -A_{lm'}^{\varphi'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l-|m'|)(l+|m'|+1)}{l(l+1)}} N_{l,m'+1} P_l^{|m'|+1}(0) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+|m'|)(l-|m'|+1)}{l(l+1)}} N_{l,|m'|-1} P_l^{|m'|-1}(0), \quad N_{lm'} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m'|)!}{4\pi(l+|m'|)!}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4. \square

Как было показано ранее (10), поля $\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$ являются бессиловыми, следовательно, любое бессиловое векторное поле может быть представлено в виде мультипольного разложения с неизвестными коэффициентами g_{lm} :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm} [\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})]. \quad (27)$$

В выражении (27) отсутствуют функции $\mathbf{M}_l^m, \mathbf{N}_l^m$ с $l=0$, так как скалярная сферическая гармоника Y_{00} — постоянная величина и, следовательно, $\nabla_{\hat{\mathbf{r}}} \times Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) = 0$.

Соответственно лучевое преобразование векторного поля (27) запишется в виде

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{g}}^{\boldsymbol{\xi}}(\rho, \phi) &\equiv \mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{g}(\rho, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm} U_l^m(\rho, \alpha, \beta, \phi = \gamma), \\ U_l^m(\rho, \alpha, \beta, \phi = \gamma) &= \mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{M}_l^m(\rho, \phi) + \mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{N}_l^m(\rho, \phi). \end{aligned} \quad (28)$$

Разделяя действительную и мнимую части в уравнении (28), лучевое преобразование переписывается в виде

$$\begin{aligned}\check{g}^{\xi}(\rho, \phi) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm}^R W_{lm}(\rho, \alpha, \beta, \phi = \gamma) + g_{lm}^I V_{lm}(\rho, \alpha, \beta, \phi = \gamma), \\ W_{lm}(\rho, \alpha, \beta, \phi) &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m'=-l}^l d_{mm'}^l(\beta) \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} (B_{lm'}^{\theta'} + iA_{lm'}^{\theta'}) f_{lmm'}^{(1)}(\phi), \\ V_{lm}(\rho, \alpha, \beta, \phi) &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m'=-l}^l d_{mm'}^l(\beta) \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} (B_{lm'}^{\theta'} + iA_{lm'}^{\theta'}) f_{lmm'}^{(2)}(\phi),\end{aligned}\quad (29)$$

здесь функции $f_{lmm'}^{(1)}$ и $f_{lmm'}^{(2)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}f_{lmm'}^{(1)}(\phi) &= \cos[m\alpha + m'(\pi/2 + \gamma + \phi) + (l+1)\pi/2], \\ f_{lmm'}^{(2)}(\phi) &= \sin[m\alpha + m'(\pi/2 + \gamma + \phi) + (l+1)\pi/2].\end{aligned}$$

6. Дискретизация и численное моделирование

Обычно в реальных экспериментах функции $\check{g}^{\xi}(\rho, \phi)$ измеряются для конечного (малого) набора векторов ξ , что, естественно, приводит к ограничению величины l и ограничивает число членов разложения в (29) величиной $l_{\max} = L$. Неизвестные скалярные коэффициенты g_{lm}^R, g_{lm}^I определяются из уравнения (29) методом наименьших квадратов как результат минимизации функционала Φ :

$$\Phi = \int dR \left\{ \check{g}^{\xi}(\rho, \phi) - \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^l [g_{lm}^R W_{lm} + g_{lm}^I V_{lm}] \right\}^2, \quad (30)$$

здесь $\int dR f(R) = \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin(\beta) d\beta \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho, \alpha, \beta, \phi)$.

Уравнения $\partial\Phi/\partial g_{l'm'}^R = 0$, $\partial\Phi/\partial g_{l'm'}^I = 0$ — линейные относительно $g_{l'm'}^R$ и $g_{l'm'}^I$ для каждого (l', m') и могут быть записаны в виде следующей системы уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\mu\nu} X_{\nu} = Y_{\mu}. \quad (31)$$

В реальных вычислениях каждый из векторов X_{ν} и Y_{μ} имеет размерность $\mathcal{N} = 2L(L+2)$ и квадратная матрица $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ имеет \mathcal{N}^2 компонент, из которых только $(\mathcal{N}+1)\mathcal{N}/2$ различны

$$\begin{aligned}X_{\nu} &= \begin{cases} g_{lm}^R, & \text{когда } \nu = l^2 + l + m, \\ g_{lm}^I, & \text{когда } \nu = L(L+2) + l^2 + l + m, \end{cases} \\ Y_{\mu} &= \begin{cases} \int dR \check{g}^{\xi}(\rho, \phi) W_{l'm'}, & \text{когда } \mu = (l')^2 + l' + m', \\ \int dR \check{g}^{\xi}(\rho, \phi) V_{l'm'}, & \text{когда } \mu = L(L+2) + (l')^2 + l' + m', \end{cases}\end{aligned}$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{cases} \int dR W_{lm} W_{l'm'}, & \text{когда } \begin{cases} \mu = l^2 + l + m, \\ \nu = (l')^2 + l' + m', \end{cases} \\ \int dR V_{lm} W_{l'm'}, & \text{когда } \begin{cases} \mu = l^2 + l + m, \\ \nu = L(L+2) + (l')^2 + l' + m', \end{cases} \\ \int dR W_{lm} V_{l'm'}, & \text{когда } \begin{cases} \mu = L(L+2) + l^2 + l + m, \\ \nu = (l')^2 + l' + m', \end{cases} \\ \int dR V_{lm} V_{l'm'}, & \text{когда } \begin{cases} \mu = L(L+2) + l^2 + l + m, \\ \nu = L(L+2) + (l')^2 + l' + m'. \end{cases} \end{cases} \quad (32)$$

Решение системы уравнений (31) даёт искомые коэффициенты g_{lm}^R, g_{lm}^I , и после подстановки $g_{lm} = g_{lm}^R + ig_{lm}^I$ в (27) проблема реконструкции векторного поля решена. Предложенный метод протестирован на модели векторного поля, полученной из аналитического решения уравнения Грэда–Шафранова [4]. Векторное поле и функция потока ψ в цилиндрической системе координат r, φ, z даются выражениями (33):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(r, z) &= \frac{1}{2\pi r} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\varphi, & \psi(r, z) &= \psi_0 \frac{r^2}{r_0^4} (2r_0^2 - r^2 - 4az^2), \\ g_r(r, z) &= \frac{1}{2\pi r} \frac{8\psi_0 a}{r_0^4} r^2 z, & g_z(r, z) &= \frac{1}{2\pi r} \left[-4 \frac{\psi_0}{r_0^4} r^3 + 2 \left(2 \frac{\psi_0}{r_0^2} - 4a \frac{\psi_0}{r_0^4} z^2 \right) r \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где $\psi_0 = 1.0$, $r_0 = 0.7$, $a = 0.2$.

Поле в декартовой системе координат имеет вид

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_r(r, z) \cos(\varphi), g_r(r, z) \sin(\varphi), g_z(r, z)).$$

Проекционные данные вычислялись на сетке $N_\alpha = N_\beta = 11$ и $N_\rho = 10$, $N_\phi = 20$ по переменным α, β и ρ, ϕ соответственно. Реконструкция выполнялась с зашумлением проекционных данных 5% шумом от их максимального значения. Сечение трёхмерной модели векторного поля, фазовые кривые и результат реконструкции на плоскости $y = 0$ показаны на рис. 1. Знаками $(- + -)$ и $(- \times -)$ помечены фазовые кривые для модельного и восстановленного полей соответственно. Фазовые кривые в секущей плоскости вычислены вдоль двух различных путей $z_2 = 0.02$ и $z_3 = 0.36$ по формуле

$$\phi(x, z) = \arctan \left(\frac{g_z(x, z)}{g_x(x, z)} \right). \quad (34)$$

Относительная ошибка реконструкции модуля векторного поля вычислялась по формуле

$$\epsilon = \frac{\sum_{i,j,k} (\|\mathbf{g}(x_i, y_j, z_k)\| - \|\tilde{\mathbf{g}}(x_i, y_j, z_k)\|)^2}{\sum_{i,j,k} \|\mathbf{g}(x_i, y_j, z_k)\|^2}, \quad (35)$$

где $i = 1 \div N_x$, $j = 1 \div N_y$, $k = 1 \div N_z$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Ошибка ϵ для данной модели 3D векторного поля составляет 23%.

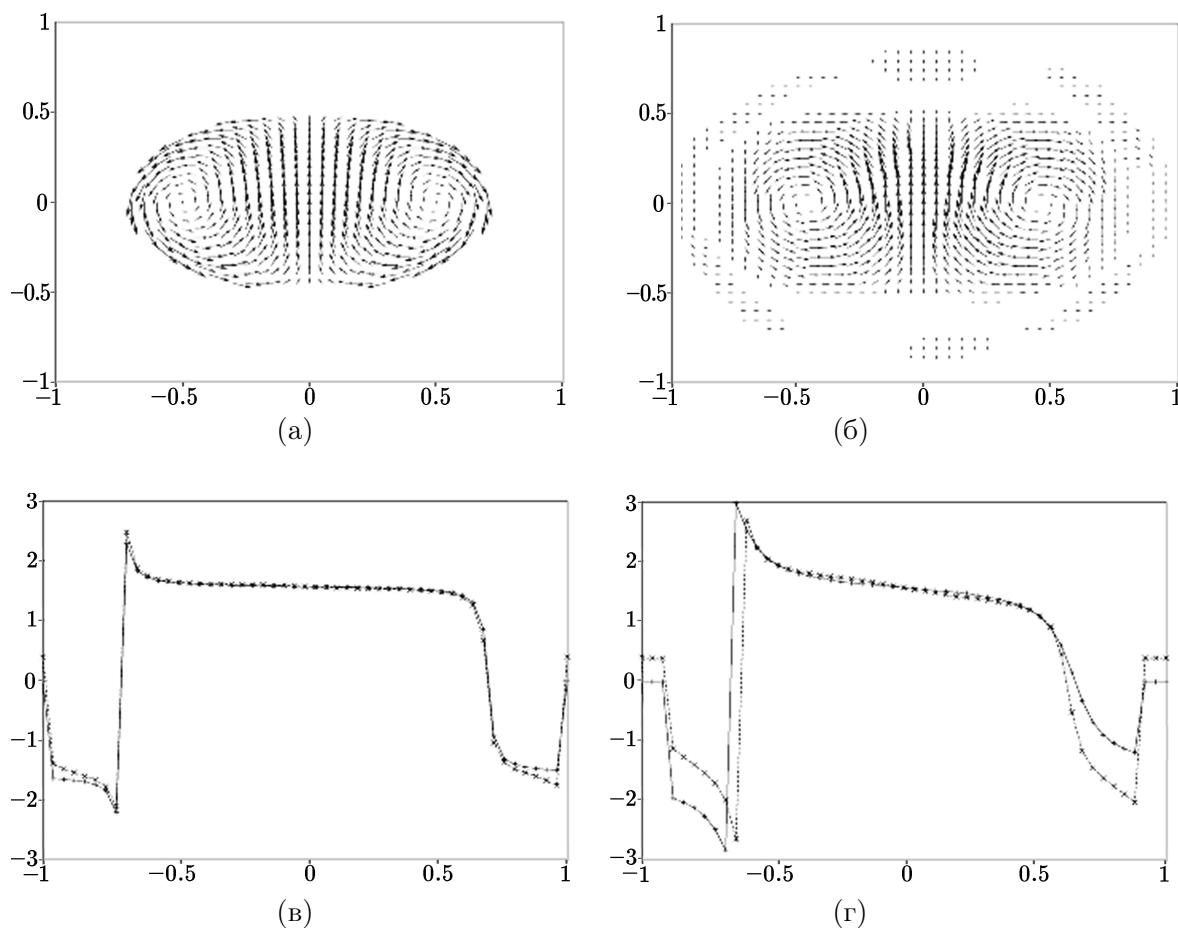


Рис. 1. Векторные поля (g_x, g_z) (плоскость $y = 0$): модельное (а) и восстановленное (б). Фазовые кривые модельного (в) $(- + -)$ и восстановленного (г) $(- \times -)$ полей для $z_1 = 0.02$ и $z_2 = 0.36$ соответственно

7. Заключение

Важный специальный класс задач магнитогидродинамической устойчивости характеризуется отсутствием силы Лоренца, т. е. $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$, где α — некоторая константа. Такие (бессилловые) поля имеют важное значение в астрофизических проблемах, в задачах устойчивости плазмы, в исследовании гидродинамических процессов и т. д. Метод, предложенный в статье, позволяет исследовать трёхмерные соленоидальные поля по известным из эксперимента лучевым преобразованиям. В частности, прямые измерения скорости в плазменных установках всегда представляют значительные сложности и спектральные измерения в сочетании с томографическими методами позволяют восстановить поле скоростей. Лучевые преобразования в задачах диагностики плазмы при достаточно общих предположениях могут быть получены из спектральных измерений [9]. Для представления векторного поля и лучевого преобразования использованы векторы Хансена (Hansen) [20]. Для векторов Хансена получены аналитические выражения лучевого преобразования.

8. Приложение

Теорема 2 (Funk-Hecke).

$$\int_{S^{N-1}} F(\omega \cdot \sigma) Y_{lm}(\omega) d\omega = \frac{l!(4\pi)^{\frac{N}{2}-1} \Gamma(\frac{N}{2}-1)}{(l+N-3)!} Y_{lm}(\sigma) \int_{-1}^1 F(t) C_l^{\frac{N}{2}-1}(t) (1-t^2)^{\frac{N-3}{2}} dt.$$

Доказательство. Доказательство можно найти в [26–28]. \square

Векторные сферические гармоники. Некоторые свойства. Так как векторные поля (специальный случай тензорных полей со спином $S = 1$) имеют важное значение в прикладных задачах, в этом пункте рассмотрены некоторые свойства и мультипольное разложение векторных полей. Компоненты векторных сферических гармоник при вращении, определяемом углами Эйлера α, β, γ , преобразуются подобно компонентам неприводимых тензоров [16]. Например, скалярные сферические функции $Y_{lm}(\hat{r})$, векторные сферические гармоники $\mathbf{Y}_{lm}^L(\hat{r})$ — неприводимые тензоры ранга l . Примером неприводимого тензорного оператора являются также функции $f(r)Y_{lm}(\hat{r})$, где $f(r)$ — произвольная функция r , $\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

В данной работе используются векторные сферические гармоники, введённые в [20, 25]:

$$\mathbf{P}_l^m(\hat{r}) = \hat{r} Y_{lm}(\hat{r}), \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l^m(\hat{r}) &= \frac{-1}{\sqrt{l(l+1)}} (\hat{r} \times \nabla_{\hat{r}}) Y_{lm}(\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\varphi} \right) Y_{lm}(\hat{r}) \\ &= \left[\frac{im}{\sqrt{l(l+m)}} \frac{1}{\sin \theta} Y_{lm}(\hat{r}) \right] \hat{\theta} + \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{l(l+1)}} e^{-i\varphi} Y_{lm+1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{l(l+1)}} e^{i\varphi} Y_{lm-1} \right] \hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (36b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_l^m(\hat{r}) &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla_{\hat{r}} Y_{lm}(\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) Y_{lm}(\hat{r}) \\ &= \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{l(l+1)}} e^{-i\varphi} Y_{lm+1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{l(l+1)}} e^{i\varphi} Y_{lm-1} \right] \hat{\theta} + \\ &\quad \left[\frac{im}{\sqrt{l(l+m)}} \frac{1}{\sin \theta} Y_{lm}(\hat{r}) \right] \hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (36b)$$

здесь $Y_{lm}(\hat{r})$ — скалярные сферические гармоники, операторы $\nabla_{\mathbf{r}}, \nabla_{\hat{r}}$ имеют следующий вид:

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\hat{r}}, \quad \nabla_{\hat{r}} = \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Векторные сферические гармоники $\mathbf{P}_l^m, \mathbf{C}_l^m, \mathbf{B}_l^m$ и векторные сферические гармоники $\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}$ [16] связаны соотношениями: $\mathbf{P}_l^m = \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}, \mathbf{C}_l^m = -i\mathbf{Y}_{lm}^{(0)}, \mathbf{B}_l^m = \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}$.

При повороте системы координат, определяемом углами Эйлера α, β, γ , векторные сферические гармоники $\mathbf{P}_l^m, \mathbf{C}_l^m, \mathbf{B}_l^m$ преобразуются аналогично гармоникам $\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}$ [16]:

$$Y_{lm'}^{(\lambda)}(\hat{r}') = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^{(\lambda)}(\hat{r}) D_{mm'}^l(\alpha\beta\gamma), \quad \text{где } \lambda = (-1, 0, 1).$$

Векторные сферические гармоники поточечно ортогональны

$$\mathbf{P}_l^m \cdot \mathbf{C}_l^m = \mathbf{C}_l^m \cdot \mathbf{B}_l^m = \mathbf{B}_l^m \cdot \mathbf{P}_l^m = 0 \quad (37)$$

и удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \mathbf{P}_l^m(\hat{r}) \cdot \mathbf{P}_{l'}^{m'*}(\hat{r}) ds(\hat{r}) &= \int_{S^2} \mathbf{C}_l^m(\hat{r}) \cdot \mathbf{C}_{l'}^{m'*}(\hat{r}) ds(\hat{r}) \\ &= \int_{S^2} \mathbf{B}_l^m(\hat{r}) \cdot \mathbf{B}_{l'}^{m'*}(\hat{r}) ds(\hat{r}) = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (38)$$

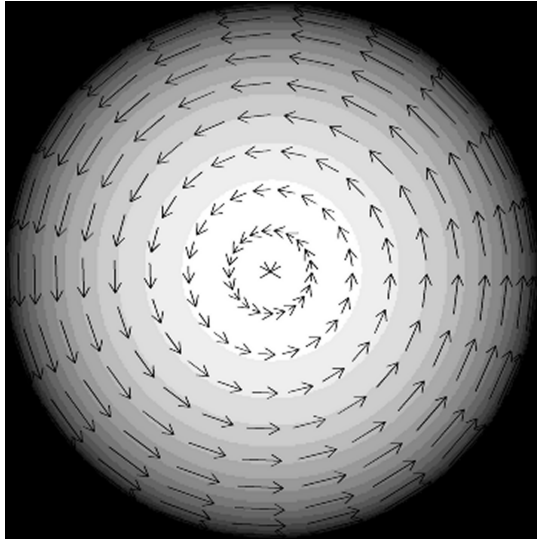
для любого $l = 0, 1, 2, \dots$ и $|m| \leq l$.

Пример векторов $\mathbf{C}_1^0(\hat{r})$ и $\mathbf{C}_2^0(\hat{r})$ показан на рис. 2. Множество векторных сферических гармоник формирует полное ортогональное множество в пространстве $[L^2(S^2)]^3$, поэтому любая функция $\mathbf{u} \in [L^2(S^2)]^3$ может быть представлена в виде

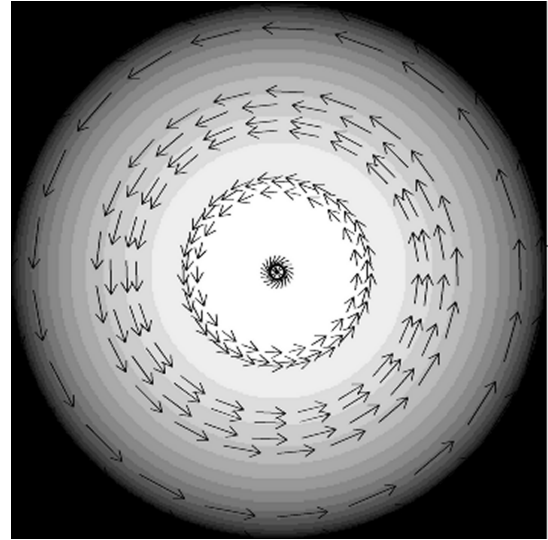
$$\mathbf{u}(\hat{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} \mathbf{P}_l^m(\hat{r}) + b_{lm} \mathbf{B}_l^m(\hat{r}) + c_{lm} \mathbf{C}_l^m(\hat{r})] = \mathbf{u}_p(\hat{r}) + \mathbf{u}_s(\hat{r}), \quad (39)$$

$$\mathbf{u}_p(\hat{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \mathbf{P}_l^m(\hat{r}), \quad \mathbf{u}_s(\hat{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [b_{lm} \mathbf{B}_l^m(\hat{r}) + c_{lm} \mathbf{C}_l^m(\hat{r})], \quad (40)$$

здесь \mathbf{u}_p , \mathbf{u}_s соответственно потенциальная и соленоидальная компоненты поля.



$$\mathbf{C}_1^0 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$



$$\mathbf{C}_2^0 = \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{3\cos^2 \theta - 1}{4} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$

Рис. 2. Векторные сферические гармоники. Вид с положительного направления оси z

D — **функции Вигнера**. Матрицы $D_{M_1 M_2}^J(\alpha\beta\gamma)$ являются представлением группы вращения $SO(3)$ и обычно записываются как произведение трёх функций, каждая из которых зависит только от одного из углов Эйлера (α, β, γ) :

$$D_{M_1 M_2}^J(\alpha\beta\gamma) = e^{-iM_1\alpha} d_{M_1 M_2}^J(\beta) e^{-iM_2\gamma}.$$

Здесь α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) — угол вращения относительно начальной оси z , β ($0 \leq \beta \leq \pi$) — угол вращения относительно новой (повёрнутой) оси y' и γ ($0 \leq \gamma < 2\pi$) — угол вращения относительно новой (повёрнутой) оси z' . Всякое вращение координатной системы может быть выполнено последовательным вращением относительно осей z , новой y' и новой z' соответственно на углы (α, β, γ) . Вещественные функции $d_{M_1 M_2}^J(\beta)$ имеют следующее точное представление:

$$d_{M_1 M_2}^J(\beta) = (-1)^{M_1 - M_2} [(J + M_1)!(J - M_1)!(J + M_2)!(J - M_2)!]^{1/2} \times \\ \sum_k (-1)^k \frac{(\cos \beta/2)^{2J - 2k - M_1 + M_2} (\sin \beta/2)^{2k + M_1 - M_2}}{k!(J - M_1 - k)!(J + M_2 - k)!(M_1 - M_2 + k)!}.$$

Индекс k пробегает все целые значения, для которых аргумент факториала имеет положительные значения $\max(0, M_2 - M_1) \leq k \leq \min(J - M_1, J + M_2)$ (см. [16]). Полезные рекуррентные формулы для вычисления $d_{M_1 M_2}^J(\beta)$ могут быть найдены в [31]. В [23] дан метод вычисления $D_{M_1 M_2}^J(\alpha\beta\gamma)$ для произвольных значений аргументов с использованием следующего соотношения:

$$D_{M_1 M_2}^J(\alpha\beta\gamma) = \sum_m e^{-iM_1\alpha} \cdot d_{M_1 m}^J(\pi/2) \cdot e^{-im\beta} \cdot d_{m M_2}^J(\pi/2) \cdot e^{-iM_2\gamma},$$

где значения $d_{M_1 M_2}^J(\pi/2)$ могут быть легко вычислены.

Функции $D_{M_1 M_2}^J(\alpha\beta\gamma)$ при $\gamma = 0$ удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$\int D_{M_1 M_2}^J(\boldsymbol{\nu}) D_{M'_1 M'_2}^{J'*}(\boldsymbol{\nu}) d\Omega = \frac{4\pi}{2J + 1} \delta_{JJ'} \delta_{M_1 M'_1}, \quad \boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta), \quad d\Omega = \sin \beta d\beta d\alpha, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Литература

1. **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.
2. **Chandrasekhar S., Kendall P.C.** On force-free magnetic fields // Astrophys. J. — 1957. — Vol. 126. — P. 457–460.
3. **Chandrasekhar S.** On force-free magnetic fields // Proc. Nat. Acad. Sci. of USA. — 1956. — Vol. 42, № 1. — P. 1–5.
4. **Bellán P.M.** Fundamentals of Plasma Physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
5. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — Oxford: Oxford University Press, 1961.
6. **Freire G.F.** Force-free magnetic-field problem // Amer. J. Phys. — 1966. — Vol. 34. — P. 567–570.
7. **Marsh G.E.** Force-Free Magnetic Fields: Solution, Topology and Applications. — Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1996.

8. **Howard J.** Vector tomography applications in plasma diagnostics // Plasma Physics and Control Fusion. — 1996. — Vol. 38. — P. 489–503.
9. **Balandin A.L., Ono Y.** Tomographic determination of plasma velocity with the use of ion Doppler spectroscopy // Eur. Phys. J. D. — 2001. — Vol. 17. — P. 337–344.
10. **Winters K.B., Rouseff D.** Tomographic reconstruction of stratified fluid flow // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. Freq. Control. — 1993. — Vol. UFFC-40, № 1. — P. 26–33.
11. **Norton S.J.** Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging // J. Geophysics. — 1987. — Vol. 97. — P. 161–168.
12. **Schuster Th.** An efficient mollifier method for three-dimensional vector tomography: convergence analysis and implementation // Inverse Problems. — 2001. — Vol. 17, № 4. — P. 739–766.
13. **Sparr G., Strahlen K., Lindstrom K., and Persson H.W.** Doppler tomography for vector field // Inverse Problems. — 1995. — Vol. 11, № 5. — P. 1051–1061.
14. **Osman N.F., Prince J.L.** 3D vector tomography on bounded domains // Inverse Problems. — 1998. — Vol. 14, № 1. — P. 185–196.
15. **Derevtsov E., Kazantsev S., and Schuster T.** Polynomial bases for subspaces of potential and solenoidal vector fields in the unit ball of R^3 // J. Inv. Ill-Posed Prob. — 2007. — Vol. 15, № 1. — P. 19–55.
16. **Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.** Квантовая теория углового момента. — Л.: Наука, 1975.
17. **Блатт Д.Ж., Вайскопф В.** Теоретическая ядерная физика. Приложение II. — М.: ИЛ, 1954.
18. **Moses H.E.** The use of vector spherical harmonics in global meteorology and aeronomy // J. Atmospheric Sci. — 1974. — № 31. — P. 1490–1500.
19. **Hill E.H.** The theory of vector spherical harmonics // Amer. J. Phys. — 1953. — № 22. — P. 211–214.
20. **Hansen W.W.** A new type of expansion in radiation problem // Phys. Rev. — 1935. — Vol. 47. — P. 139–143.
21. **Stratton J.A.** Electromagnetic Theory. — New York: McGraw-Hill, 1941.
22. **Colton D., Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1992.
23. **Edmonds A.R.** Angular Momentum in Quantum Mechanics. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974.
24. **Cantarella J., DeTurck D., and Gluck H.** Vector calculus and the topology of domains in 3-space // Amer. Math. Month. — 2002. — Vol. 109, № 5. — P. 409–442.
25. **Морс Ф.М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики, т. 1, 2. — М.: ИЛ, 1958.
26. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1974.
27. **Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F.G.** Higher Transcendental Functions. Vol. 1, 2. — New York: McGraw-Hill, 1953.
28. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.
29. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ИФМЛ, 1962.
30. **Natterer F., Wübbeling F.** Mathematical Methods in Image Reconstruction. — Philadelphia: SIAM, 2001.
31. **Биденхарн Л., Лаук Дж.** Угловой момент в квантовой физике. Теория и приложения, т. 1. — М.: Мир, 1984.

*Поступила в редакцию 30 мая 2014 г.,
в окончательном варианте 22 сентября 2014 г.*

Литература в транслитерации

1. **Moffat G.** Vozbuzhdenie magnitnogo polya v provodyashchej srede. — M.: Mir, 1980.
2. **Chandrasekhar S., Kendall P.C.** On force-free magnetic fields // *Astrophys. J.* — 1957. — Vol. 126. — P. 457–460.
3. **Chandrasekhar S.** On force-free magnetic fields // *Proc. Nat. Acad. Sci. of USA.* — 1956. — Vol. 42, № 1. — P. 1–5.
4. **Bellán P.M.** Fundamentals of Plasma Physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
5. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — Oxford: Oxford University Press, 1961.
6. **Freire G.F.** Force-free magnetic-field problem // *Amer. J. Phys.* — 1966. — Vol. 34. — P. 567–570.
7. **Marsh G.E.** Force-Free Magnetic Fields: Solution, Topology and Applications. — Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1996.
8. **Howard J.** Vector tomography applications in plasma diagnostics // *Plasma Physics and Control Fusion.* — 1996. — Vol. 38. — P. 489–503.
9. **Balandin A.L., Ono Y.** Tomographic determination of plasma velocity with the use of ion Doppler spectroscopy // *Eur. Phys. J. D.* — 2001. — Vol. 17. — P. 337–344.
10. **Winters K.B., Rouseff D.** Tomographic reconstruction of stratified fluid flow // *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. Freq. Control.* — 1993. — Vol. UFFC-40, № 1. — P. 26–33.
11. **Norton S.J.** Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging // *J. Geophysics.* — 1987. — Vol. 97. — P. 161–168.
12. **Schuster Th.** An efficient mollifier method for three-dimensional vector tomography: convergence analysis and implementation // *Inverse Problems.* — 2001. — Vol. 17, № 4. — P. 739–766.
13. **Sparr G., Strahlen K., Lindstrom K., and Persson H.W.** Doppler tomography for vector field // *Inverse Problems.* — 1995. — Vol. 11, № 5. — P. 1051–1061.
14. **Osman N.F., Prince J.L.** 3D vector tomography on bounded domains // *Inverse Problems.* — 1998. — Vol. 14, № 1. — P. 185–196.
15. **Derevtsov E., Kazantsev S., and Schuster T.** Polynomial bases for subspaces of potential and solenoidal vector fields in the unit ball of R^3 // *J. Inv. Ill-Posed Prob.* — 2007. — Vol. 15, № 1. — P. 19–55.
16. **Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Khersonskij V.K.** Kvantovaya teoriya uglovogo momenta. — L.: Nauka, 1975.
17. **Blatt D.Zh., Vajskopf V.** Teoreticheskaya yadernaya fizika. Prilozhenie II. — M.: IL, 1954.
18. **Moses H.E.** The use of vector spherical harmonics in global meteorology and aeronomy // *J. Atmospheric Sci.* — 1974. — № 31. — P. 1490–1500.
19. **Hill E.H.** The theory of vector spherical harmonics // *Amer. J. Phys.* — 1953. — № 22. — P. 211–214.
20. **Hansen W.W.** A new type of expansion in radiation problem // *Phys. Rev.* — 1935. — Vol. 47. — P. 139–143.
21. **Stratton J.A.** Electromagnetic Theory. — New York: McGraw-Hill, 1941.
22. **Colton D., Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1992.
23. **Edmonds A.R.** Angular Momentum in Quantum Mechanics. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974.
24. **Cantarella J., DeTurck D., and Gluck H.** Vector calculus and the topology of domains in 3-space // *Amer. Math. Month.* — 2002. — Vol. 109, № 5. — P. 409–442.

25. **Mors F.M., Feshbakh G.** Metody teoreticheskoy fiziki, t. 1, 2. — M.: IL, 1958.
26. **Bejtmén G., Erdeji A.** Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 2. — M.: Nauka, 1974.
27. **Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F.G.** Higher Transcendental Functions. Vol. 1, 2. — New York: McGraw-Hill, 1953.
28. **Natterer F.** Matematicheskie aspekty komp'yuternoj tomografii. — M.: Mir, 1990.
29. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. — M.: IFML, 1962.
30. **Natterer F., Wübbeling F.** Mathematical Methods in Image Reconstruction. — Philadelphia: SIAM, 2001.
31. **Bidenkharn L., Lauk Dzh.** Uglovoj moment v kvantovoy fizike. Teoriya i prilozheniya, t. 1. — M.: Mir, 1984.

