

УДК 539.375

## К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

М. В. Гаврилкина, В. В. Глаголев, А. А. Маркин

Тульский государственный университет, 300600 Тула

E-mails: awakeningmaria@mail.ru, vadim@tsu.tula.ru, markin@uic.tula.ru

Рассматривается модель процесса разделения типа нормального отрыва, основанная на введении слоя взаимодействия. Данный слой определяется как область локализации процесса разрушения. Напряженно-деформированное состояние материала слоя однородно в поперечном сечении слоя. Исследуется деформирование двухконсольной балки, ослабленной вырезом, ширина которого равна толщине слоя взаимодействия. Задача решается в линейно-геометрическом приближении. Выполнены оценки толщины слоя взаимодействия, предложен метод решения поставленной задачи.

Ключевые слова: характерный размер, идеально упругопластическая модель, удельная работа разрушения.

**1. Постановка задачи.** Экспериментальное изучение разрушения тел с выточками различных радиусов кривизны показывает, что начиная с некоторого предельного значения радиуса разрушающая нагрузка не зависит от данного параметра. Это позволяет предположить существование некоторого характерного размера, при котором происходит локализация процесса разрушения. В работах [1, 2] данный размер определен как толщина слоя взаимодействия, которая является характеристикой материала.

Рассмотрим разрушение типа нормального отрыва, в данном случае представляющее собой продвижение выреза, ширина которого равна толщине слоя  $\delta_0$  (рис. 1). Начало

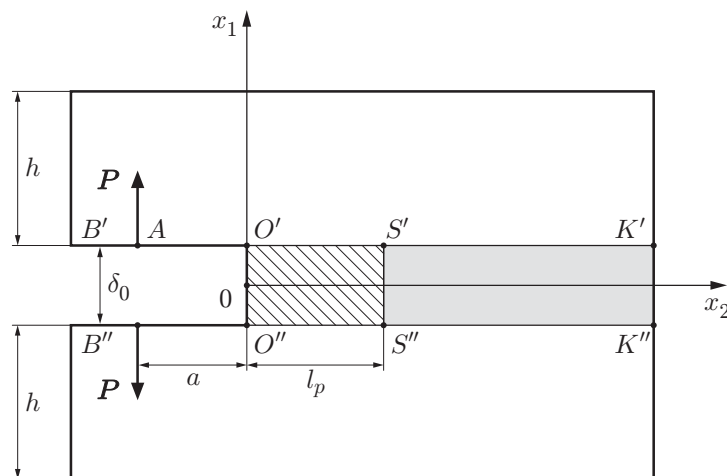


Рис. 1. Схема нагружения

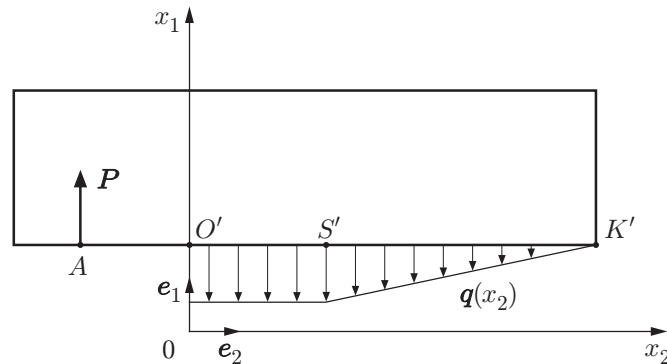


Рис. 2. Эпюра нагрузки

неподвижной декартовой системы координат поместим в конце выреза. Берега выреза нагружены сосредоточенной силой  $P$  — равнодействующей нагрузки, распределенной вдоль консоли и приложенной на расстоянии  $a$  от начала координат. В силу того что учет стадии разупрочнения несущественно влияет на значение расклинивающего усилия [1], будем считать, что в момент образования новых поверхностей материал слоя взаимодействия  $O'K'K''O''$  деформируется устойчиво в смысле Друкера. Вне слоя взаимодействия среда полагается упругой, а перемещения точек  $K'$  и  $K''$  считаются равными нулю.

Необходимо определить критическое значение расклинивающего усилия  $P_*$ , соответствующее началу образования новых поверхностей, длину пластической зоны слоя взаимодействия  $l_p$  и эпюры напряжений, учитывающие взаимодействие между берегами слоя и консолями в критическом состоянии.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю консоль ( $x_1 \geq \delta_0/2$ ), а ее взаимодействие со слоем заменим искомой нагрузкой  $q(x_2)$ .

Касательной составляющей нагрузки, действующей на балку со стороны слоя взаимодействия, будем пренебрегать. Таким образом, нагрузка со стороны слоя на балку будет распределена в соответствии с эпюрой, показанной на рис. 2.

В дальнейшем ограничимся случаем малых деформаций. При этом вектор внешней нагрузки на участке консоли, граничащем со слоем взаимодействия, представляется в виде

$$q(x_2) = \mathbf{n} \cdot S, \quad (1)$$

где  $S$  — тензор истинных напряжений;  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$  — вектор внешней нормали к поверхности консоли. С учетом условия однородности напряжений в слое взаимодействия по координате  $x_2$  из (1) получаем

$$q(x_2) = -S_1 \mathbf{e}_1.$$

Будем считать, что материал слоя взаимодействия является идеально упругопластическим [3]. С учетом малости деформаций и однородности деформированного состояния слоя взаимодействия выражение для компоненты линейного тензора деформаций записывается в виде

$$\varepsilon_1 = 2u_1(x_2)/\delta_0, \quad (2)$$

где  $u_1(x_2)$  — перемещение границы слоя взаимодействия ( $x_1 = \delta_0/2$ ) в направлении оси  $x_1$ . В дальнейшем используются обозначения  $x \equiv x_2$ ,  $u_1(x_2) = u(x)$ .

Из соотношений (1) и (2) следует связь между проекцией внешней нагрузки на ось  $x_1$  и компонентой перемещения:

$$q(x) = \begin{cases} -(2E/\delta_0)u(x), & S' \leq x \leq K', \\ -S_k, & O' \leq x \leq S'. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга материала;  $S_k$  — предел текучести;  $|O'S'| = l_p$  — длина участка пластического деформирования.

Для описания процесса используем балочное приближение [4]. Поведение консоли вне слоя взаимодействия будем описывать соотношениями теории Кирхгофа — Лява. С учетом (3) уравнение изгиба имеет следующий вид:

— на отрезке  $AO'$

$$D \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = P(a + x); \quad (4)$$

— на отрезке  $O'S'$

$$D \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = -S_k; \quad (5)$$

— на отрезке  $S'K'$

$$D \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = -\frac{2E}{\delta_0} u(x). \quad (6)$$

Здесь  $D = Eh^3/12$  — жесткость полосы единичной толщины;  $E$  — модуль Юнга материала консоли.

Интегрируя уравнения (4)–(6) с учетом условия затухания перемещений в точке  $K'$ , получаем следующие выражения для поля перемещений:

— на отрезке  $AO'$

$$u(x) = P(a + x)^3/(6D) + k_1 x + k_2; \quad (7)$$

— на отрезке  $O'S'$

$$u(x) = -S_k x^4/(24D) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4; \quad (8)$$

— на отрезке  $S'K'$

$$u(x) = e^{-Rx}(L_1 \cos Rx + L_2 \sin Rx). \quad (9)$$

Здесь  $R = \sqrt[4]{E/(2D\delta_0)}$ .

Для системы (7)–(9) запишем условия непрерывности перемещения  $u(x)$ , угла поворота  $u'(x)$ , изгибающего момента  $Du''(x)$  и перерезывающей силы  $Du'''(x)$  в точках  $O'$  ( $x = 0$ ) и  $S'$  ( $x = l_p$ ). При достижении расклинивающей силой критического значения  $P_*$  перемещение в точке  $O'$  будет равно  $u_* = \varepsilon^* \delta_0/2$ , в точке  $S'$  —  $u_0 = \varepsilon^0 \delta_0/2$  ( $\varepsilon^0$  — предел упругости по деформациям). Для определения длины пластической зоны  $l_p$ , критического усилия  $P_*$  и постоянных интегрирования  $k_1, k_2, L_1, L_2, C_1, \dots, C_4$  получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} P_* a^3/(6D) + k_2 = C_4, \quad P_* a^2/(2D) + k_1 = C_3, \quad P_* a/D = 2C_2, \quad P_*/D = 6C_1, \\ -S_k l_p^4/(24D) + C_1 l_p^3 + C_2 l_p^2 + C_3 l_p + C_4 = L_1 e^{-Rl_p} \cos Rl_p + L_2 e^{-Rl_p} \sin Rl_p, \\ -S_k l_p^3/(6D) + 3C_1 l_p^2 + 2C_2 l_p + C_3 = R e^{-Rl_p} [-L_1 (\cos Rl_p + \sin Rl_p) + L_2 (\cos Rl_p - \sin Rl_p)], \\ -S_k l_p^2/(2D) + 6C_1 l_p + 2C_2 = 2R^2 e^{-Rl_p} [L_1 \sin Rl_p - L_2 \cos Rl_p], \\ -S_k l_p/(6D) + 6C_1 = 2R^3 e^{-Rl_p} [L_1 (\cos Rl_p - \sin Rl_p) + L_2 (\cos Rl_p + \sin Rl_p)], \\ -S_k l_p^4/(24D) + C_1 l_p^3 + C_2 l_p^2 + C_3 l_p + C_4 = \varepsilon^0 \delta_0/2, \\ P_* a^3/(6D) + k_2 = \varepsilon^* \delta_0/2. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, нахождение основных характеристик разделения упругопластического материала сводится к решению системы нелинейных уравнений при заданных свойствах материала.

## 2. Анализ полученной системы нелинейных уравнений и метод ее решения.

При заданной толщине слоя система (10) нелинейна относительно  $l_p$ . Рассмотрим один из вариантов ее решения.

Заметим, что при фиксированном значении  $l_p$  система (10) линейна относительно неизвестных  $P_*$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1, \dots, C_4$ , но является переопределенной. Исключим из (10) последнее уравнение

$$P_* a^3 / (6D) + k_2 = \varepsilon^* \delta_0 / 2 \quad (11)$$

и используем полученную систему линейных уравнений для определения значений  $P_*$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1, \dots, C_4$  как функций  $l_p$ . Для нахождения с заданной точностью длины пластической зоны слоя взаимодействия при решении (11) применялся метод деления отрезка пополам.

При решении системы (10) использовался метод Давиденко и последовательно применялись метод минимизации и метод Стеффенсена [5]. При использовании метода Давиденко скорость сходимости меньше, чем при последовательном применении метода минимизации (градиентного спуска) и метода Стеффенсена.

**3. Основные результаты решения.** Определим влияние высоты консоли на длину пластической зоны  $l_p$ .

Для нахождения начального приближения используется система линейных уравнений относительно  $P_*$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1, \dots, C_4$ . На рис. 3 представлена зависимость числа обусловленности  $N_{L_2}$  [5] матрицы коэффициентов (по норме  $L_2$ ) этой системы от толщины слоя взаимодействия при  $h = 0,1$  м,  $a = 20h$  и следующих характеристиках материала:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $S_k = 600$  МПа. Из рис. 3 следует, что параметр  $\delta_0$  существенно влияет на обусловленность системы и является определяющим при выборе метода решения поставленной задачи. Аналогичные результаты для числа обусловленности получены с использованием норм матрицы  $L_1$ , евклидовой и равномерной.

Для нахождения толщины слоя взаимодействия можно использовать результаты эксперимента по разрушению двухконсольной балки (ДКБ-образца) и решение системы (10)

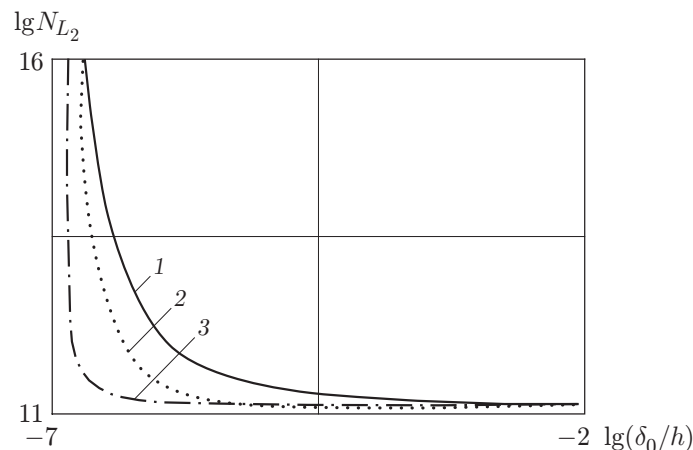


Рис. 3. Зависимость числа обусловленности линейной системы уравнений от толщины слоя взаимодействия:

1 —  $l_p = \delta_0$ , 2 —  $l_p = 10\delta_0$ , 3 —  $l_p = 50\delta_0$

для их обработки. В этом случае в эксперименте необходимо определить значения  $P_*$  и  $l_p$ , соответствующие началу образования новых материальных поверхностей (характеристики  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^*$  предполагаются известными). Поскольку экспериментальные данные отсутствуют, приведем ряд оценок толщины слоя через известные механические характеристики. В работе [2] получено выражение для толщины слоя в виде  $\delta_0 \approx 0,01b_0/(\varepsilon^0)^2$ , где  $b_0$  — межатомное расстояние. Считая, что для большинства металлов значение  $b_0$  порядка  $10^{-10} \div 10^{-9}$  м,  $\varepsilon^0 = 10^{-3}$ , получаем  $\delta_0 \approx 10^{-6} \div 10^{-5}$  м.

Следующая оценка может быть получена, если известна такая характеристика трещиностойкости, как вязкость разрушения  $K_{Ic}$ . В этом случае рассмотрим выражение для работы внешних сил, затрачиваемых на приращение поверхности разрыва бесконечно малой площади  $\alpha$  в случае эволюции математического и физического вырезов в предлагаемой модели при активном нагружении внешней нагрузкой  $\mathbf{P}$  (см. рис. 1). Соответствующую работу внешней силы в модели с математическим вырезом обозначим  $A_k^m$ , в модели со слоем взаимодействия —  $A_k^s$ . Кроме того, внешними будем считать напряжения, действующие на образующиеся поверхности. Работы этих напряжений обозначим  $A_m$  и  $A_s$ . Таким образом, для работы внешних сил справедливо выражение

$$A_k^m + A_m = A_k^s + A_s. \tag{12}$$

Так как при квазихрупком разрушении работа внешней нагрузки  $\mathbf{P}$  не зависит от выбора модели и является постоянной величиной [6], то  $A_k^m = A_k^s$  и, следовательно, из (12) получаем  $A_m = A_s$ . Последнее равенство справедливо и для удельных работ при бесконечно малом приращении поверхности разрыва:

$$A'_m = A'_s. \tag{13}$$

Здесь  $A'_m = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_m/\alpha$ ;  $A'_s = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_s/\alpha$ .

Для модели с математическим вырезом в рамках асимптотических решений линейной теории упругости получаем известное выражение [6, 7]

$$A'_m = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha S_1(x)u(x) dx = \frac{K_{Ic}^2}{E}. \tag{14}$$

Работа напряжений  $A_s$  (на единицу толщины образца) в материальном объеме  $\alpha\delta_0$  слоя взаимодействия может быть найдена по формуле

$$A_s = \int_0^\alpha \int_0^{\varepsilon(x)} \delta_0 S_k d\varepsilon dx, \tag{15}$$

где  $\varepsilon(x)$  — деформация слоя в критическом состоянии.

В силу идеально упругопластической модели поведения материала слоя взаимодействия выражение (15) может быть представлено в следующем виде:

$$A_s = \int_0^\alpha \left( \frac{1}{2} S_k \int_0^{\varepsilon^0} \delta_0 d\varepsilon + S_k \int_{\varepsilon^0}^{\varepsilon(x)} \delta_0 d\varepsilon \right) dx. \tag{16}$$

Из (16) находим

$$A_s = \int_0^\alpha S_k \delta_0 \varepsilon(x) dx - \frac{1}{2} S_k \varepsilon^0 \delta_0 \alpha.$$

С учетом однородности напряженно-деформированного состояния в слое взаимодействия деформация определяется в виде (2). Следовательно, работа, отнесенная к единице длины образующейся поверхности, с учетом (2) может быть найдена по формуле

$$A'_s = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} S_k u(x) dx - \frac{1}{2} S_k \varepsilon^0 \delta_0, \quad (17)$$

где  $u(x) = -S_k x^4 / (24D) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$  в силу решения (7)–(9).

Таким образом, из (17) получаем выражение

$$A'_s = 2S_k C_4 - S_k \varepsilon^0 \delta_0 / 2. \quad (18)$$

Константу интегрирования  $C_4$  определим из условия достижения перемещением в точке  $O'$  (см. рис. 2) критического значения  $u_* = \varepsilon^* \delta_0 / 2$ :

$$C_4 = u_* = \varepsilon^* \delta_0 / 2. \quad (19)$$

Из равенств (13), (14), (18), (19) для толщины слоя взаимодействия получаем

$$\delta_0 = \frac{K_{Ic}^2}{S_k E (\varepsilon^* - \varepsilon^0 / 2)}. \quad (20)$$

Используя связь вязкости разрушения и критического усилия в модели ДКБ-образца в виде  $P_* = h^{3/2} K_{Ic} / (2\sqrt{3} a)$  [7], из (20) получаем оценку для определения толщины слоя взаимодействия через измеряемое критическое усилие:

$$\delta_0 = \frac{12a^2 P_*^2}{h^3 S_k E (\varepsilon^* - \varepsilon^0 / 2)}.$$

Согласно (20) для материалов с выраженными пластическими свойствами ( $\varepsilon^* \gg \varepsilon^0$ ) справедливо выражение

$$K_{Ic} = \sqrt{S_k E \delta_*}, \quad (21)$$

где  $\delta_* = \varepsilon^* \delta_0$  — критическое смещение слоя взаимодействия.

Выражение (21) совпадает с выражением для вязкости разрушения в случае использования критерия Леонова — Панасюка — Дагдейла [7], если  $\delta_*$  ассоциировать с критическим раскрытием трещины, а  $S_k$  — с напряжением взаимодействия между берегами

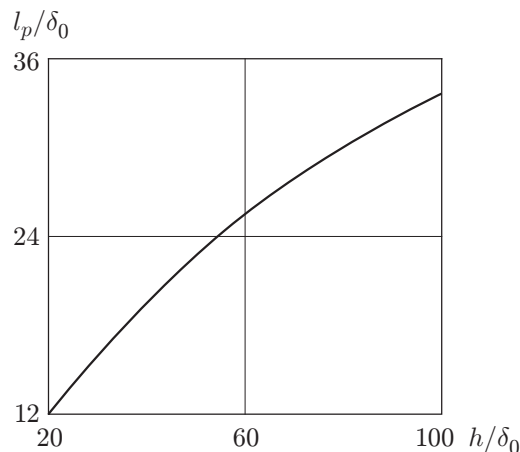


Рис. 4. Зависимость длины пластической зоны от высоты консоли при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м

трещины. В работе [8] для стали марки Ст. 3 приведены следующие характеристики:  $K_{Ic} = 81 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ ,  $\varepsilon^* = 0,33$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $S_k = 900 \text{ МПа}$ . Таким образом, из (21) получаем оценку  $\delta_0 \approx 10^{-4} \text{ м}$ , и, следовательно, толщина слоя взаимодействия находится в диапазоне  $10^{-6} \div 10^{-4} \text{ м}$ .

На рис. 4 приведена расчетная зависимость длины пластической зоны от высоты консоли из стали марки Ст. 3 при  $\delta_0 = 10^{-5} \text{ м}$ . Видно, что длина пластической зоны существенно зависит от геометрии образца и не является характеристикой процесса разрушения (что отмечено в работе [9]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Глаголев В. В., Кузнецов К. А., Маркин А. А.** Модель процесса разделения деформируемого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 61–68.
2. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Модель установившегося разделения материального слоя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 121–129.
3. **Ивлев Д. Д.** Теория предельного состояния и идеальной пластичности: Избр. работы. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005.
4. **Зегжда С. А., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н.** О “балочном” подходе в задачах распространения трещин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 3. С. 114–120.
5. **Амосов А. А.** Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. М.: Высш. шк., 1994.
6. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
8. **Лебедев А. А., Чаусов Н. Г.** Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций // Пробл. прочности. 1983. № 2. С. 6–10.
9. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Об одном обосновании критерия Ирвина на конце трещины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 147–153.

*Поступила в редакцию 30/VI 2006 г.*