

УДК 535.4 + 51-74

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИНТЕЗИРОВАННЫХ ГОЛОГРАММ  
ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ДАТЧИКОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА\*****В. И. Бобринев, М. Л. Галкин, М. С. Ковалев,  
П. И. Малинина, С. Б. Одинок***Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5  
E-mail: odinokov@bmstu.ru*

Исследуется возможность применения синтезированных голограмм Френеля в задаче определения фазовых искажений волнового фронта. Приведены результаты компьютерного моделирования распространения элементарного сигнала на основе интегрального преобразования Френеля. Показан принцип работы голограммы для датчика волнового фронта.

*Ключевые слова:* компьютерно-синтезированная голограмма, датчик волнового фронта, фазовые искажения, голограмма Френеля.

DOI: 10.15372/AUT20180105

**Введение.** Развитие компьютерных технологий и современные расчётные мощности сделали логичным интенсивное развитие методов компьютерного синтеза голограмм. По аналогии с классической голографией появились компьютерные модели расчёта голограмм Фурье, Френеля, безлинзовых голограмм Фурье и других [1–3]. Вопросы сравнения разрешающей способности компьютерно-синтезированных голограмм (КСГ) Фурье и Френеля и обоснование выбора их типа являются важными для разработки измерительных оптико-электронных устройств. В аналоговой голографии их разрешающие способности можно считать сопоставимыми при использовании высокоапертурной оптической системы (по сравнению с размерами регистрируемого объекта) в схемах записи голограмм Фурье и Френеля на высокоразрешающем фоточувствительном материале.

Для решения некоторых задач предпочтительнее применять КСГ Френеля. Так, в задаче проектирования датчика волнового фронта на основе КСГ [4–6] остро встаёт вопрос о целесообразности его реализации с помощью голограмм Фурье [7], поскольку на этапе восстановления информации возникает необходимость использования фурье-преобразующей оптической системы, что значительно усложняет проектируемые устройства.

Данная работа посвящена реализации метода синтеза голограмм на основе преобразования Френеля и предварительной оценке их применения для датчика волнового фронта.

**Область дифракции Френеля.** Общеизвестно, что при рассмотрении дифракции монохроматического света на отверстии точечной диафрагмы распределение конечного поля будет различным в зависимости от расстояния до плоскости анализа. Эта взаимосвязь математически нашла отражение в числе Френеля  $N = b^2/\lambda z$ , где  $\lambda$  — длина волны,  $2b$  — размер отверстия,  $z$  — расстояние от отверстия до области изображения (рис. 1).

Предполагается, что свет от источника с плоским волновым фронтом и равномерным распределением амплитуды освещает непрозрачную плоскость, в которой имеется диафрагма. На расстоянии  $z$  от этой плоскости находится параллельная к ней вторая плоскость, в которой наблюдается дифракционная картина. Амплитуда световой волны в

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.2236.2017/ПЧ).



Рис. 1. Области дифракции

точке  $(x, y)$  в плоскости наблюдения дифракционной картины формируется как результат интерференции сферических волн, исходящих из всех точек  $(x_0, y_0)$  диафрагмы. Поле в рассматриваемой точке определяется дифракционным интегралом Френеля — Кирхгофа

$$U(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \frac{\exp(-ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta_{Zr} dx_0 dy_0,$$

где  $U_0(x_0, y_0)$  — поле в точке  $(x_0, y_0)$  диафрагмы,  $\theta_{Zr}$  — угол между положительным направлением оси  $Z$  и отрезком прямой  $r_{01}$  (коэффициент наклона),  $r_{01}$  — расстояние от точки  $(x_0, y_0)$  до точки  $(x, y)$ :

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1)$$

Наиболее просто дифракционная задача решается при условиях  $|x - x_0| \ll z$ ,  $|y - y_0| \ll z$ , поскольку можно полагать, что  $\cos \theta_{Zr} \approx 1$  с ошибкой менее 5 %, если угол  $\theta_{Zr} < 18^\circ$  и в знаменателе подынтегрального выражения  $r_{01} \approx z$ . Однако это равенство неприемлемо для замены  $r_{01}$  в экспоненциальном члене, поскольку на экспоненту влияет даже его малое изменение.

В литературе (см., например, [8]) принято пользоваться приближением расстояния  $r_{01}$  через разложение в ряд Тейлора с ограничением двумя членами, что позволяет производить вычисления с помощью специальных функций [6]:

$$\sqrt{1 + m} = 1 + \frac{1}{2} m - \frac{1}{8} m^2 + \dots, \quad |m| < 1, \quad (2)$$

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z}\right)^2} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y_0}{z}\right)^2 \right]. \quad (3)$$

**Расчёт поля в области дифракции Френеля.** Предварительная часть работы заключалась в проверке влияния представления квадратного корня в формуле (1) первыми тремя слагаемыми степенного ряда (2) вместо двух (3) на точность расчёта дифракционной картины от сигнала в виде кусочно-постоянной гест-функции (одномерный случай). Важно, что при таком представлении корня интеграл рассчитывается численным методом.

Для моделирования на ЭВМ были выбраны следующие условия: плоский волновой фронт ( $\lambda = 632,8$  нм) с равномерным распределением амплитуды, апертура  $b = 0,5L$ ,

Таблица 1

Параметры	Ограничение двумя членами разложения	Ограничение тремя членами разложения
$\sigma_{\text{общ}}$	0,035	0,016
$\sigma_1$	0,056	0,034
$\sigma_2$	0,108	0,093
$\Delta I_{\text{max}}/I_{\text{cp}}$	0,64	0,36

соответствующая симметричной относительно главной оптической оси гест-функции шириной  $L = 30$  мм, расстояние от плоскости дифракции до плоскости изображения  $z = 3$  см, шаг дискретизации в плоскости наблюдения 3 мкм.

Для оценки эффективности расчётов двумя методами (с помощью специальных функций и численным расчётом) (табл. 1) был проведён численный анализ следующих параметров:

1)  $\sigma_{\text{общ}}$  — среднеквадратическое отклонение (СКО) величины интенсивности от её среднего значения на всём рассматриваемом участке в плоскости изображения, где интенсивность не равна 0 (СКО рассчитывается в условных единицах, при этом среднее значение принимается равным 1);

2)  $\sigma_1$  — СКО интенсивности на интервале  $s_1: (0-1)L/2$ , где  $L$  — апертура, т. е. на участке с увеличенной амплитудой осцилляций;

3)  $\sigma_2$  — СКО интенсивности на интервале  $s_2: (1-1,05)L/2$ , т. е. на участке, где интенсивность падает с максимального значения до 0;

4)  $\Delta I_{\text{max}}/I_{\text{cp}} = I_{\text{max}}/I_{\text{cp}} - 1$ , где  $I_{\text{max}}/I_{\text{cp}}$  — отношение максимального значения интенсивности к её среднему значению.

Анализ дифракционных картин (рис. 2), рассчитанных двумя методами, показал, что результат вычисления при использовании приближения квадратного корня его тремя первыми слагаемыми ненамного превышает по точности приближение двумя членами. При этом длительность расчёта возрастает многократно: вычисление вторым методом (кривая 2) заняло порядка 7 мин машинного времени, тогда как первым (кривая 1) — порядка 3 с. Далее для расчётов будет применяться первый метод.

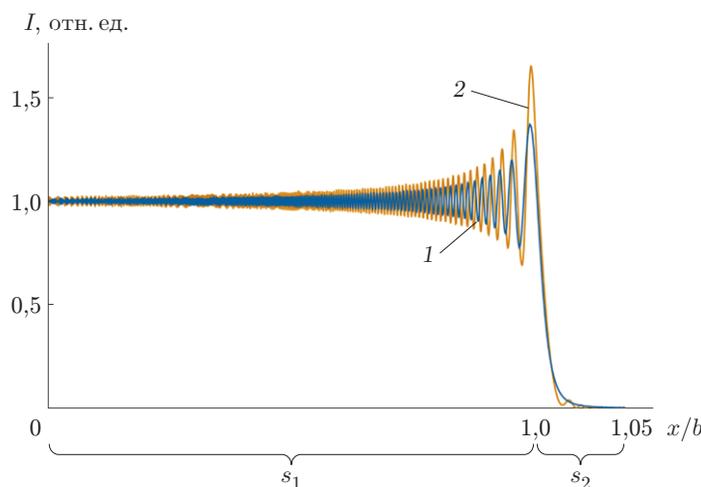


Рис. 2. Распределение интенсивности в плоскости дифракции Френеля с использованием метода расчёта на базе двух (кривая 1) и трёх (кривая 2) членов разложения  $r_{01}$  в степенной ряд

**Допустимые параметры оптической схемы наблюдения дифракции Френеля.** Из-за использования в расчёте формулы (3) для  $r_{01}$  необходимо обоснование некоторых параметров голограммы Френеля — главным образом связи её размера и расстояния от голограммы до плоскости наблюдения. Пусть в плоскости  $(x_0, y_0)$  (см. рис. 1) располагается голограмма, а в плоскости  $(x, y)$  наблюдается восстановленное изображение. Поскольку амплитуда световой волны в точке  $(x, y)$  является результатом интерференции волн, исходящих из всех точек  $(x_0, y_0)$ , то приближённое значение  $r_{01}$  для всех волн должно отличаться от истинной величины не более чем на  $\lambda/4$  (допустимая величина исходя из условия минимального периода интерференционной картины  $d = \lambda/\sin \theta$ , где  $\theta$  — угол схождения опорного и предметного пучков).

В табл. 2 и 3 приведены расчёты вероятных параметров оптической схемы наблюдения дифракции Френеля в диапазонах расстояний  $z = 10\text{--}50$  мм и  $z = 1000\text{--}3000$  мм и при заданном размере отверстия  $2b$  точечной диафрагмы.

Величина  $\Delta$  представляет собой разность величины  $r_{01}$  в соответствии с формулой (1) и её приближённого значения в соответствии с формулой (3):

$$\Delta = \sqrt{z^2 + ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)} - \left( z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z} \right). \quad (4)$$

Полученные результаты показывают, что расчёты голограмм Френеля с использованием приближённого выражения для  $r_{01}$  могут производиться при значительных ограничениях параметров оптических схем.

Таблица 2

$z = 10$ мм		$z = 30$ мм		$z = 50$ мм	
$2b$ , мм	$\Delta$ в длинах волн (нм)	$2b$ , мм	$\Delta$ в длинах волн (нм)	$2b$ , мм	$\Delta$ в длинах волн (нм)
1	0,0123 (7,7859)	2	0,0073 (4,62)	5	0,0617 (39)
2	0,1968 (124,57)	4	0,11 (69)	6	0,1279 (80,96)
2,1	0,2387 (151,1)	4,8	0,2418 (153,1)	7	0,2368 (149,89)

Таблица 3

$z = 1000$ мм		$z = 2000$ мм		$z = 3000$ мм	
$2b$ , мм	$\Delta$ в длинах волн (нм)	$2b$ , мм	$\Delta$ в длинах волн (нм)	$2b$ , мм	$\Delta$ в длинах волн (нм)
15	0,0006 (0,3)	20	0,0003 (0,189)	3	0,0007 (0,4743)
30	0,01 (6,33)	30	0,001 (0,633)	30	0,0003 (0,1899)
66	0,2344 (148,4)	112	0,243 (153,8)	152	0,2443 (154,6)

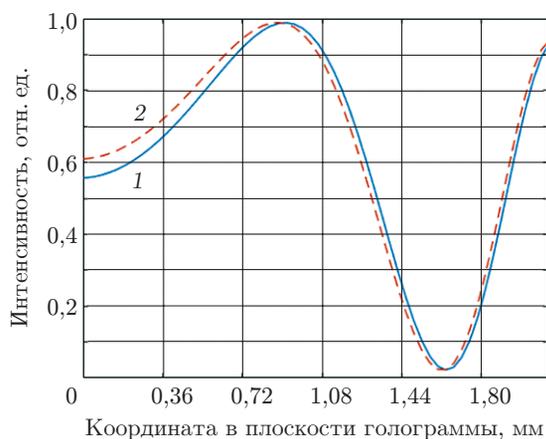
**Компьютерный синтез голограммы Френеля.** Суть получения такой КСГ заключается в расчёте интерференционной картины от опорной и объектной волн. В качестве объектной выберем волну, прошедшую отверстие в виде точечной диафрагмы диаметром  $2b = 100$  мкм, расположенной на расстоянии  $z$  от плоскости наблюдения — плоскости записи голограммы. Опорная волна представляет собой волну с единичной амплитудой и фазовым распределением, соответствующим проверяемому типу аберрации (согласно математическому разложению базиса Цернике [9]). Объектная волна обладает сферическим волновым фронтом. Следовательно, в плоскости голограммы фазовое распределение этой волны представляется как классический набор зон Френеля.

В качестве устройства вывода КСГ может использоваться жидкокристаллический пространственный модулятор света (например, ЖК-ПМС Holoeye Transmissive LC2002,  $768 \times 1024$  пикселей). Один пиксель ЖК-ПМС отображает одну точку голограммы и определяет её разрешение. В соответствии с этим записываемая на голограмму интерференционная картина должна иметь период не менее 4 пикселей.

Согласно вышеизложенному для синтеза голограмм Френеля были выбраны следующие параметры: плоский волновой фронт с длиной волны  $\lambda = 632,8$  нм, число отсчётов (по осям  $X, Y$ )  $N_X = N_Y = 768$ , расстояние от плоскости дифракции до плоскости наблюдения  $z = 3$  м, шаг дискретизации в плоскости изображения 36 мкм.

При освещении такой голограммы опорной волной в плоскости приёмного устройства на расстоянии  $z$  будет наблюдаться круглое пятно — изображение транспаранта. Геометрическое положение каждого пятна соответствует воздействию волнового фронта со своим типом аберрации (определённой величины) фазовой функции на КСГ и образует заданное распределение интенсивности. В случае если неизвестный волновой фронт имеет искажения, использованные при синтезе такой структуры, по анализу распределения интенсивности на фотоприёмном устройстве и сравнению этого распределения с заранее заданным можно сделать вывод о степени и величине искажений. Для различия аберраций при восстановлении на этапе расчёта интерференционной картины положение транспаранта задаётся со смещением  $dr$  относительно центральной точки.

На рис. 3 показаны поперечные профили голограмм Френеля. Сдвиг интерференционных полос составляет 72 мкм — величину, равную размеру двух ячеек ЖК-ПМС. Таким образом, условие разрешимости двух интерференционных картин выполнено и можно сде-



*Рис. 3.* Интерференционные полосы в плоскости записи голограммы (увеличенная окрестность справа от оси ординат) при одинаковом положении транспаранта (на оптической оси — без смещения) и волне с типом искажения «дефокусировка» (кривая 1 —  $0,02\lambda$ , кривая 2 —  $0,04\lambda$ )

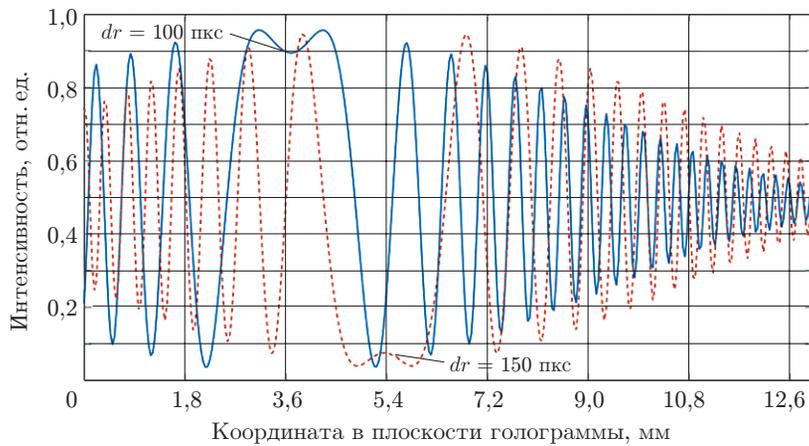


Рис. 4. Интерференционные полосы в плоскости записи голограммы Френеля при различных положениях транспаранта и волне с типом искажения «дефокусировка» величиной  $0,5\lambda$  (смещение транспаранта  $dr = 100$ ) и кома горизонтальная ( $dr = 150$ )

лать предварительный вывод, что подобные структуры дадут возможность определять искажения падающего волнового фронта с точностью до двух сотых длины волны.

На рис. 4 представлены поперечные профили голограмм Френеля, при синтезе которых для каждого типа аберрации был выбран свой параметр смещения круглой апертуры относительно центра поля  $dr$ . Такой подход даёт возможность различить изображения при восстановлении голограммы. Анализ рисунка показывает, что при каждом параметре  $dr$  возникает кривая, отличная от остальных, что позволяет применять эти интерференционные картины в задаче детектирования. Синусоидальный характер кривых обусловлен выбором круглой апертуры в качестве освещаемого объекта и математическим описанием преобразования Френеля через его интегралы [8].

На рис. 5 приведён вид получаемой структуры, а также восстановленное изображение при использовании параметра смещения  $dr = 100$ .

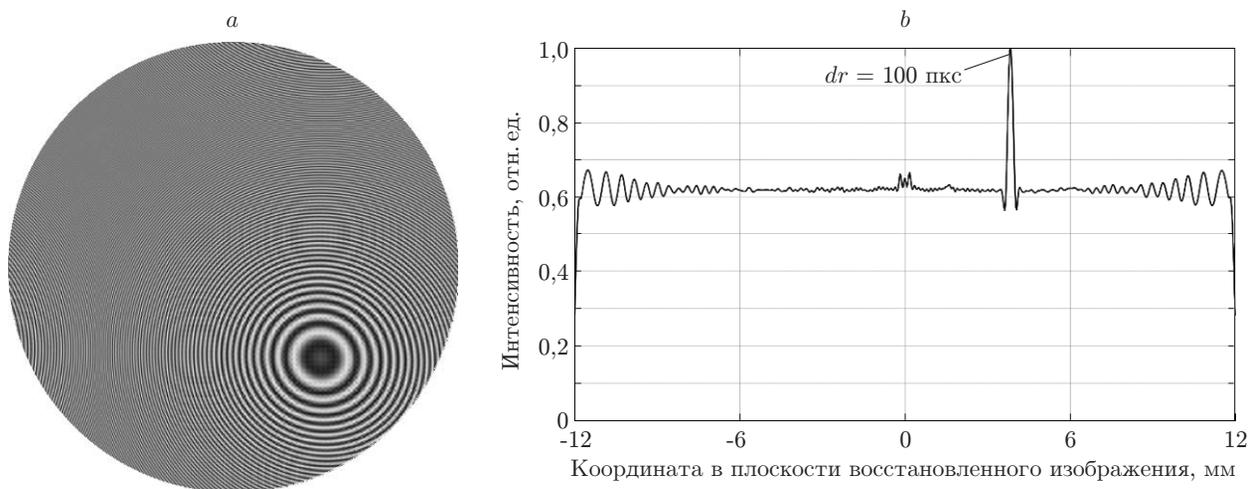


Рис. 5. Результаты компьютерного моделирования голограммы Френеля: *a* — для аберрации типа «дефокусировка» величиной  $0,5\lambda$ ; *b* — восстановление голограммы

**Заключение.** Рассмотрены основные теоретические положения, необходимые для синтеза голограмм Френеля, разработан и реализован алгоритм создания голограмм Френеля в качестве рабочего элемента голографического датчика волнового фронта. Заявленная точность определения аберраций в  $0,02\lambda$  на практике будет снижена за счёт присутствия кроссмодуляционного шума, а также проблем, связанных с мультиплексированием таких структур для использования в датчике волнового фронта. Тем не менее предварительное численное моделирование, представленное в данной работе, показывает перспективность голограмм Френеля в датчике волнового фронта.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Априль Ж., Арсено А., Баласубраманьян Н.** Оптическая голография /Под ред. Г. Колфилда. М.: Мир, 1982. Т. 1. 376 с.
2. **Бессмельцев В. П., Завьялов П. С., Корольков В. П. и др.** Дифракционный фокусирующий мультипликатор для параллельного многоканального секвенатора // Автометрия. 2017. **53**, № 5. С. 48–56.
3. **Чугуй Ю. В.** Фурье-оптика трёхмерных объектов постоянной толщины на основе дифракционных моделей // Автометрия. 2017. **53**, № 5. С. 90–105.
4. **Wyant J. C., Bennett V. P.** Using computer-generated holograms to test aspheric wavefronts // Appl. Opt. 1972. **11**, N 12. P. 2833–2839.
5. **Poleshchuk A. G., Korolkov V. P., Nasyrov R. K., Asfour J.-M.** Computer generated holograms: Fabrication and application for precision optical testing // Proc. SPIE. 2008. **7102**. 710206. DOI: 10.1117/12.797816.
6. **Kovalev M. S., Krasin G. K., Malinina P. I. et al.** Wave front sensor based on holographic optical elements // Journ. Phys.: Conf. Ser. 2016. **737**, N 1. 012064.
7. **Kodatskiy B., Kovalev M., Malinina P. et al.** Fourier holography in holographic optical sensors // Proc. SPIE. 2016. **10002**. 100020K.
8. **Гудмен Дж.** Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
9. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.

*Поступила в редакцию 16 мая 2017 г.*