УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ЧАСТИЦЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. М. Шаповалов

Волгоградский государственный технический университет, 400103 Волгоград
E-mail: vtm@volpi.ru

Поставлена и аналитически решена задача о гидродинамическом взаимодействии ламинарного потока вязкой жидкости и частично проницаемой сферической частицы. При этом считается, что фильтрационное течение внутри частицы подчиняется закону Дарси. Получены выражения для компонент скорости фильтрационного течения, сопротивления, скорости осаждения и функций тока. Изучено влияние проницаемости частицы на характеристики течения. Построены функции тока рассматриваемого течения.

Ключевые слова: течение Стокса, фильтрация, вязкость, скорость, давление.

Рассматривается движение полупроницаемых частиц в сплошной среде, примерами которого являются падение снежинок, осаждение хлопьев при коагуляционной очистке воды и т. п.

Кинетика массообменных процессов, протекающих в дисперсных системах жидкость — твердое тело (например, адсорбция, экстрагирование, сушка) в случае капиллярно-пористой структуры частицы, существенно зависит от конвективного переноса жидкости в порах вследствие макроскопического движения сплошной среды [1, 2].

Задача о динамическом взаимодействии потока и круглой капли жидкости (отличающейся по вязкости) рассмотрена в работе [3].

В настоящей работе исследовано влияние внешнего обтекания (течения Стокса) на фильтрационное течение внутри полупроницаемой шаровой частицы и получено аналитическое решение задачи, изучено влияние проницаемости частицы на характеристики течения, построены функции тока.

Область, занимаемая несжимаемой однокомпонентной жидкой средой, не ограничена ($R < r < \infty$), течение полагается установившимся изотермическим. Гидростатическая составляющая давления не учитывается, поскольку не оказывает влияния на внешнее течение жидкости и не создает фильтрационный поток внутри частицы. Решение рассматриваемой задачи должно удовлетворять условию $\mathrm{Re} = v_\infty R\rho/\mu \ll 1$ (v_∞ — скорость потока жидкости на бесконечности; R — радиус сферической частицы; μ, ρ — вязкость и плотность жидкости соответственно), которое позволяет исключить из уравнений движения члены, характеризующие силы инерции (приближение Стокса).

Введем сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром шара (рис. 1). Поток жидкости, обтекающий частицу, направлен снизу вверх. Вследствие симметрии рассматриваемого течения относительно оси Oz все неизвестные функции зависят от координат r, θ.

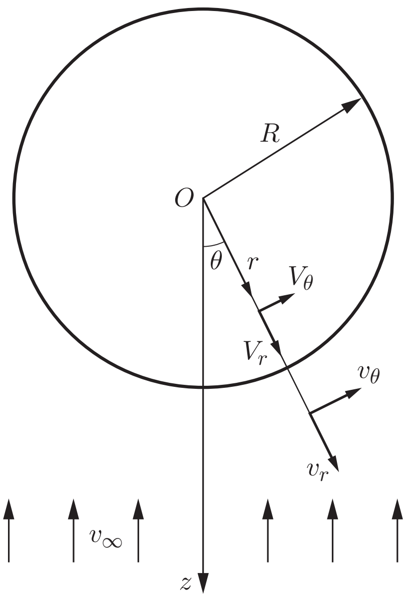

Рис. 1. Схема течения

Внешнее течение жидкости описывается уравнениями Стокса [4]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\,v_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\,v_\theta = 0,\\
\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\Big(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg}\theta v_\theta}{r^2}\Big),\\
\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\Big(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin\theta}\Big),\\
r > R, \qquad 0 < \theta < \pi,
\end{gathered} \tag{1}$$

где v_r, v_θ — компоненты вектора скорости жидкости в сферической системе координат (вне шара); p — давление жидкости, обтекающей частицу.

Фильтрационное течение внутри частицы обусловлено неоднородностью давления на ее поверхности. Будем считать, что при динамическом воздействии потока сферическая частица сохраняет форму и имеет однородную капиллярно-пористую структуру. (Заметим, что в случае структурной асимметрии на частицу действует крутящий момент.)

Фильтрационный поток внутри частицы характеризуется компонентами скорости фильтрации $V_r(r,\theta)$, $V_\theta(r,\theta)$ и давлением $P(r,\theta)$ (см. рис. 1). Поскольку скорость двумерного фильтрационного течения несжимаемой жидкости внутри частицы мала, для его описания помимо уравнений неразрывности используем закон Дарси [5]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\,V_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\,V_\theta = 0,\\
V_r = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial P}{\partial r}, \qquad V_\theta = -\frac{k}{\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial P}{\partial \theta}, \qquad 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi,
\end{gathered} \tag{2}$$

где k — коэффициент проницаемости материала частицы. Граничные условия для внешнего течения на бесконечности ($r \to \infty$) запишем в виде

$$v_r \to -v_\infty \cos\theta, \qquad v_\theta \to v_\infty \sin\theta. \tag{3}$$

Поверхность сферической частицы ($r = R$) является границей между областью фильтрационного течения ($r < R$) и внешней областью неограниченного движения жидкости ($r > R$). На этой границе жидкость свободно втекает (вытекает) по нормали к поверхности, а касательная компонента скорости равна нулю (условие прилипания). Таким образом, на поверхности шара должны выполняться условия отсутствия касательной компоненты скорости внешнего течения, равенства нормальных скоростей и давлений:

$$v_\theta = 0, \quad V_r = v_r, \quad P = p \quad \text{при} \quad r = R. \tag{4}$$

Решение уравнений (1) имеет вид [1, 3, 4]

$$v_r = \Big(\frac{C_1}{r^3} + \frac{C_2}{r} + C_3 + C_4 r^2\Big)\cos\theta, \quad v_\theta = \Big(\frac{C_1}{2r^3} - \frac{C_2}{2r} - C_3 - 2C_4 r^2\Big)\sin\theta,$$
$$p = \mu\Big(\frac{C_2}{r^2} + 10C_4 r\Big)\cos\theta, \tag{5}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные. Из условия на бесконечности (3) следует, что постоянная C_4 равна нулю, а для постоянной C_3 выполняется равенство $C_3 = -v_\infty$.

Из системы (2) для давления внутри шара получаем уравнение Лапласа

$$2r\,\frac{\partial P}{\partial r} + r^2\,\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} = 0. \tag{6}$$

Для согласования с (5) решение уравнения (6) ищем в форме

$$P = f(r)\cos\theta. \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в уравнение (6), получаем уравнение Эйлера для функции $f(r)$:

$$r^2 f'' + 2rf' - 2f = 0,$$

решение которого имеет вид

$$f = C_5/r^2 + C_6 r$$

(C_5, C_6 — постоянные). Следовательно, давление внутри шара описывается функцией

$$P = (C_5/r^2 + C_6 r)\cos\theta. \tag{8}$$

Давление в центре шара ограничено ($P < \infty$ при $r = 0$), поэтому $C_5 = 0$. Согласно уравнению (6) функция давления определена с точностью до произвольной постоянной, поэтому без ограничения общности будем полагать, что плоскость, содержащая нулевую изобару, проходит через центр сферы ($P = 0$ при $r = 0$).

Согласно соотношениям (2) с учетом (8) находим компоненты скорости фильтрации

$$V_r = -C_6\,\frac{k}{\mu}\,\cos\theta, \qquad V_\theta = C_6\,\frac{k}{\mu}\,\sin\theta. \tag{9}$$

Подставляя выражения (5), (8), (9) в условия (4), для постоянных C_1, C_2, C_6 получаем систему трех алгебраических уравнений, из которой находим

$$C_1 = -R^3 v_\infty\,\frac{1 + 2\alpha}{2 + \alpha}, \qquad C_2 = \frac{3Rv_\infty}{2 + \alpha}, \qquad C_6 = \frac{3\mu v_\infty}{R^2(2 + \alpha)}, \qquad \alpha = \frac{k}{R^2} \tag{10}$$

(безразмерный параметр α характеризует проницаемость шара с учетом его размеров).

Учитывая формулы (10), выражения для компонент скорости и давления внешнего течения (5) запишем в виде

$$v_r = v_\infty\Big(-\frac{R^3}{r^3}\,\frac{1+2\alpha}{2+\alpha} + \frac{3R}{r(2+\alpha)} - 1\Big)\cos\theta,$$

$$v_\theta = v_\infty\Big(-\frac{R^3}{2r^3}\,\frac{1+2\alpha}{2+\alpha} - \frac{3R}{2r(2+\alpha)} + 1\Big)\sin\theta, \tag{11}$$

$$p = \frac{3\mu R v_\infty}{r^2(2+\alpha)}\cos\theta, \qquad r > R,$$

а характеристики фильтрационного течения внутри шара (8), (9) — в виде

$$V_r = -\frac{3\alpha v_\infty}{2+\alpha}\cos\theta, \quad V_\theta = \frac{3\alpha v_\infty}{2+\alpha}\sin\theta, \quad P = \frac{3\mu v_\infty r}{(2+\alpha)R^2}\cos\theta, \quad r < R. \tag{12}$$

В случае непроницаемой частицы ($\alpha = 0$) выражения (11) переходят в формулы Стокса.

С учетом выражения для скорости в (12) фильтрационный поток жидкости в поперечном сечении частицы Q определяется интегралом

$$Q = 2\pi\int\limits_0^R v_\theta\big|_{\theta=\pi/2}\, r\,dr = \frac{3\pi R^2 v_\infty \alpha}{2+\alpha}.$$

В качестве примера рассмотрим следующий случай. При размере частицы ваты $R = 10^{-3}$ м (коэффициент проницаемости $k = 2{,}5\cdot 10^{-10}$ м^2) и скорости обтекания $v_\infty = 10^{-2}$ м/с в воде ($\mu = 10^{-3}$ Па$\cdot$с) согласно формуле (12) скорость фильтрации равна $|V_r|_{\theta=0}| = 3{,}75\cdot 10^{-6}$ м/с.

Вычислим силу, с которой поток воздействует на сферу. Величина W равнодействующей всех сил, приложенных к элементам сферы, определяется по формуле [4]

$$W = 2\pi R^2\int\limits_0^\pi (\tau_{r\theta}\sin\theta - \sigma_{rr}\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

где $\sigma_{rr} = -p + 2\mu\,\partial v_r/\partial r$, $\tau_{r\theta} = \mu((\partial v_r/\partial\theta)/r + \partial v_\theta/\partial r - v_\theta/r)$ — нормальная и касательная компоненты напряжения на поверхности сферы ($r = R$) соответственно.

Выполнив интегрирование с учетом соотношений (11), получаем

$$W = 6\pi R\mu v_\infty\,\frac{2}{2+\alpha}. \tag{13}$$

В случае непроницаемого шара ($\alpha \to 0$) формула (13) переходит в формулу Стокса. С увеличением проницаемости сопротивление уменьшается. В предельном случае $\alpha \to \infty$ (частица бесконечно проницаема) $W = 0$, т. е. сопротивление отсутствует.

Приравнивая величину W к силе тяжести $(4\pi/3)R^3(\rho_m - \rho)g$, действующей на частицу, находим скорость осаждения полупроницаемой частицы

$$v_\infty = \frac{2R^2 g(\rho_m - \rho)}{9\mu}\,\frac{2+\alpha}{2}. \tag{14}$$

Здесь g — ускорение свободного падения; ρ_m — среднеобъемная плотность смоченной частицы.

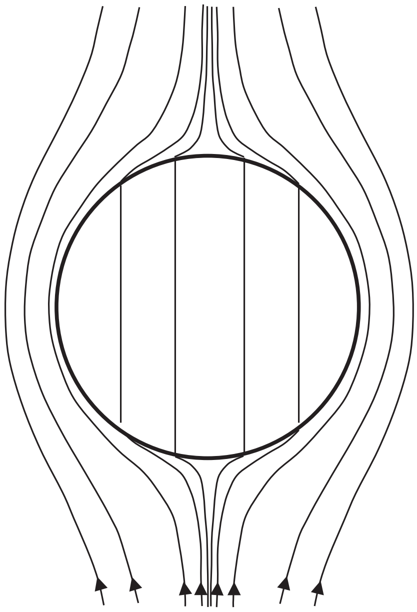

Рис. 2. Линии тока жидкости при $\alpha = 0{,}001$

В случае если частица является проницаемой, согласно формуле (14) скорость осаждения увеличивается. С увеличением проницаемости пористость частицы также увеличивается, а ее среднеобъемная плотность уменьшается, становясь близкой по значению к плотности жидкости.

Функция тока для внешнего течения имеет вид [4]

$$\psi(r,\theta) = 2\pi r^2 \int\limits_0^\theta v_r \sin\theta \, d\theta. \qquad (15)$$

Проинтегрировав (15) с учетом первой формулы в (11), получаем

$$\psi(r,\theta) = 2\pi v_\infty r^2 \Big(-\frac{R^3}{r^3}\,\frac{1+2\alpha}{2+\alpha} + \frac{3R}{r(2+\alpha)} - 1\Big) \sin^2\theta, \qquad r > R.$$

Функцию тока фильтрационного течения внутри частицы Ψ также находим с помощью формулы (15), но при этом используем выражение для радиальной скорости из (12):

$$\Psi(r,\theta) = -6\pi v_\infty r^2 \,\frac{\alpha}{2+\alpha}\, \sin^2\theta, \qquad r < R. \qquad (16)$$

На рис. 2 показаны линии тока рассматриваемого движения жидкости для случая $\alpha = 0{,}001$. Видно, что линии тока расположены симметрично относительно плоскости, перпендикулярной направлению течения и проходящей через центр сферы, линии тока внутри сферы (фильтрационное течение) параллельны направлению течения. Действительно, если в плоскости, перпендикулярной направлению течения и проходящей через центр сферы, ввести ось y и записать геометрическое соотношение $y = r\sin\theta$, то для функции тока внутри шара (16) получим уравнение прямой, параллельной оси z: $y = \pm C$ (C — постоянная). На поверхности сферы линии тока имеют излом, величина которого зависит от коэффициента проницаемости материала шара. При бесконечной проницаемости ($k \to \infty$) излом отсутствует.

Следует отметить, что скорость движения жидкости в порах больше скорости фильтрации, например, радиальная компонента скорости равна V_r/ε (ε — пористость). Наиболее длинный путь ($2R$) преодолевает частица жидкости, траектория движения которой проходит через центр шара. Время пребывания этой частицы внутри шара определяется формулой

$$t = \frac{2R\varepsilon}{V_r|_{\theta=\pi}} = \frac{2R\varepsilon(2+\alpha)}{3\alpha v_\infty}.$$

Таким образом, в явном виде построено решение задачи об обтекании полупроницаемой частицы вязкой жидкостью. Показано, что сопротивление пористой полупроницаемой сферы меньше сопротивления непористой сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Протодьяконов И. О.** Гидродинамика и массообмен в дисперсных системах жидкость — твердое тело / И. О. Протодьяконов, И. Е. Люблинская, А. Е. Рыжков. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1987.
2. **Романков П. Г.** Массообменные процессы химической технологии / П. Г. Романков, В. Ф. Фролов. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1990.
3. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. Т. 6.
4. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.; Л.: ОГИЗ: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.
5. **Голубева О. В.** Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972.

Поступила в редакцию 5/XII 2007 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 2008 г.