

УДК 532.59:534.1

РЕШЕНИЯ ВЕНТЦЕЛЯ — КРАМЕРСА — БРИЛЛЮЭНА УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
E-mails: internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

С использованием модельного распределения частоты плавучести и метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна получено асимптотическое решение задачи о построении решений, описывающих внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде с медленно меняющимся по глубине фоновым сдвиговым течением. Асимптотики дисперсионного соотношения выражаются через функции Эйри. С помощью асимптотик для различных модельных распределений фоновых сдвиговых течений получены аналитические представления дисперсионных соотношений и собственных функций. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов для различных распределений фоновых сдвиговых течений и режимов генерации, характерных для реального океана.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, сдвиговые течения, метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна, функции Эйри.

DOI: 10.15372/PMTF20220303

Введение. В реальном океане внутренние гравитационные волны (ВГВ) распространяются на фоне сдвиговых океанических течений. В связи с тем что изучение крупномасштабных океанических волновых процессов является актуальной задачей, исследование динамики и распространения ВГВ в океане с учетом наличия фоновых сдвиговых течений имеет большое значение [1–6]. В общей постановке описание динамики ВГВ в океане при наличии фоновых полей сдвиговых течений является сложной задачей даже в линейном приближении. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных [1–3]. Используя различные приближения, можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений [7–9], поэтому представляет интерес изучение динамики ВГВ в океане, параметры которого медленно изменяются по глубине. Решение такой задачи возможно с помощью метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ), который предполагает, что параметры океанической среды медленно изменяются [3, 4, 10–12]. Это позволяет изучать амплитудно-фазовые характеристики волновых полей для реальных океанологических параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00111А).

© Булатов В. В., Владимиров Ю. В., 2022

В настоящей работе рассматривается распространение свободных ВГВ в стратифицированной среде с модельным распределением частоты плавучести и фоновым сдвиговым течением, медленно меняющимся по глубине.

1. Постановка задачи. Уравнение для малых возмущений вертикальной компоненты W скорости ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми сдвиговыми течениями имеет вид [2, 3, 7–9]

$$\frac{D^2}{Dt^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \frac{D}{Dt} \left(\frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta W = 0,$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz},$$

$U(z)$, $V(z)$ — компоненты вектора сдвигового течения на глубине z ; $N^2(z)$ — квадрат частоты Брента — Вайсяля (частоты плавучести); g — ускорение свободного падения; $\rho_0(z)$ — невозмущенная плотность среды. Граничные условия задаются в следующем виде (вертикальная ось z направлена вверх): $W = 0$ при $z = 0, -H$. Предполагается, что выполняется условие устойчивости Майлса для числа Ричардсона: $\text{Ri}(z) = N^2(z)/((dV/dz)^2 + (dU/dz)^2) > 1/4$ [2, 3, 13]. В этом случае соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений [1–3, 14–17]. Далее используются следующие предположения: частота Брента — Вайсяля является постоянной: $N(z) = N = \text{const}$, течение — одномерным: $V(z) \equiv 0$, функция $U(z)$ — монотонной и медленно меняющейся. Тогда в безразмерных координатах и переменных

$$x^* = \frac{\pi x}{H}, \quad y^* = \frac{\pi y}{H}, \quad z^* = \frac{\pi z}{H}, \quad M(z^*) = \frac{\pi U(z^*)}{NH}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{N}, \quad t^* = tN$$

имеем задачу для определения функции W (далее знак “*” опускается)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(z) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{d^2 M}{dz^2} \right) + \Delta W = 0, \quad (1.1)$$

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -\pi.$$

Представляя $W(t, x, y, z)$ в виде $W(t, x, y, z) = e^{i\omega t} w(x, y, z)$, решение задачи (1.1) находим в виде интегралов Фурье

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) e^{-i(\mu x + \nu y)} d\mu.$$

Тогда для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \left(\frac{1}{(\omega - \mu M(z))^2} - 1 \right) \varphi + \frac{\mu}{\omega - \mu M(z)} \frac{d^2 M}{dz^2} \varphi = 0, \quad (1.2)$$

$$\varphi(\mu, \nu, 0) = \varphi(\mu, \nu, -\pi) = 0, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2.$$

Задача (1.2) имеет счетный набор собственных функций $\varphi_n(z)$ и дисперсионных кривых $\mu_n(\nu)$ (частота ω — фиксированный параметр) [1–3, 16, 17].

2. Асимптотики решений при отсутствии точек поворота. Для построения решений задачи (1.2) формально введем медленную переменную $\xi = \varepsilon z$, так чтобы выполнялось равенство $M(\xi) = M(\varepsilon z)$ (ε — малый безразмерный параметр). Тогда уравнение (1.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + (\lambda^2 q_1(\xi) + q_2(\xi))\varphi = 0, \quad (2.1)$$

$$q_1(\xi) = k^2(\Psi^{-2}(\xi, \mu) - 1), \quad q_2(\xi) = \frac{\mu}{\Psi(\xi, \mu)} \frac{d^2 M}{d\xi^2}, \quad \Psi(\xi, \mu) = \omega - \mu M(\xi), \quad \lambda = \varepsilon^{-1} \gg 1.$$

Уравнение (2.1) имеет следующее ВКБ-решение [18–20]:

$$\varphi(\xi) = q_1^{-1/4}(\xi) \exp\left(\pm i\lambda \int \sqrt{q_1(\xi)} d\xi\right),$$

для переменной z принимающее вид

$$\varphi(z) = q_1^{-1/4}(z) \exp\left(\pm i \int \sqrt{q_1(z)} dz\right). \quad (2.2)$$

Требую выполнения граничного условия, получаем $\sin\left(\int_{-\pi}^0 \sqrt{q_1(z)} dz\right) = 0$. Отсюда

находим $\int_{-\pi}^0 \sqrt{q_1(z)} dz = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Запишем дисперсионное соотношение в явном виде

$$\nu_n(\mu) = \left(\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \mu^2\right)^{1/2}, \quad a = \int_{-\pi}^0 \sqrt{\Psi^{-2}(z, \mu) - 1} dz. \quad (2.3)$$

ВКБ-решения (2.2) и соответствующая асимптотика дисперсионных соотношений (2.3) справедливы для значений μ , для которых точка поворота $z^*(\mu)$ (решение уравнения $\Psi^2(z, \mu) = 1$) не принадлежит отрезку $[-\pi, 0]$. Заметим, что фактически с использованием ВКБ-приближения решается уравнение (2.1), при $q_2(z) \equiv 0$ имеющее вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2(\Psi^{-2}(z, \mu) - 1)\varphi = 0. \quad (2.4)$$

3. Асимптотики решений при наличии точек поворота. При наличии точек поворота $z^*(\mu) \in [-\pi, 0]$ асимптотические решения уравнения (2.4) выражаются через функции Эйри $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$ [18–20]. Полагая, что $\partial q_1(z^*(\mu))/\partial z > 0$, рассмотрим функции

$$f_1(z) = \frac{(\sigma(z))^{1/6}}{(q_1(z))^{1/4}} \text{Ai}(-(\sigma(z))^{2/3}), \quad f_2(z) = \frac{(\sigma(z))^{1/6}}{(q_1(z))^{1/4}} \text{Bi}(-(\sigma(z))^{2/3}),$$

$$\sigma(z) = \frac{3}{2} \tau(z), \quad \tau(z) = \int_{z^*(\mu)}^z \sqrt{q_1(z)} dz.$$

В случае если $\partial q_1(z^*(\mu))/\partial z < 0$, в эйконале $\tau(z)$ необходимо изменить пределы интегрирования. Тогда общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\varphi(z) = C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z).$$

Требую выполнения граничных условий, получаем дисперсионное уравнение

$$\text{Ai}(-(\sigma(-\pi))^{2/3}) \text{Bi}(-(\sigma(0))^{2/3}) - \text{Ai}(-(\sigma(0))^{2/3}) \text{Bi}(-(\sigma(-\pi))^{2/3}) = 0, \quad (3.1)$$

решением которого являются собственные значения $\mu_n(\nu)$. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид

$$\varphi_n(z) = C(f_2(0)f_1(z) - f_1(0)f_2(z)).$$

При больших аргументах функции $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$ можно представить в виде [18–20]

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &\approx \frac{\exp(-2x^{3/2}/3)}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}, & \text{Bi}(x) &\approx \frac{\exp(2x^{3/2}/3)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad \text{при } x > 0, \\ \text{Ai}(x) &\approx \frac{\sin(2|x|^{3/2}/3 + \pi/4)}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}}, & \text{Bi}(x) &\approx \frac{\cos(2|x|^{3/2}/3 + \pi/4)}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дисперсионное уравнение (3.1) не имеет точных аналитических решений. Для его решения необходимо использовать асимптотики функций $\text{Ai}(x)$, $\text{Bi}(x)$ в виде (3.2) и решать полученные асимптотические уравнения численно или приближенно. Далее рассматриваются два метода расчета асимптотик дисперсионных кривых: при наличии точек поворота и при их отсутствии [18–20]. В реальных океанических условиях могут наблюдаться фоновые сдвиговые течения двух видов: однонаправленное (не изменяющее направления распространения) и разнонаправленное (изменяющее на некоторой глубине направление распространения) [5, 6, 10–12, 17]. Однонаправленное течение всегда имеет точку поворота, разнонаправленное течение может не иметь точек поворота [7–9, 16, 17]. Далее рассматриваются два варианта течений, которые качественно описывают характерные зависимости фоновых сдвиговых течений от глубины и наблюдаются в условиях реального океана [5, 6, 10–12]. В случае разнонаправленного течения выбираются такие параметры, при которых точки поворота отсутствуют. В этом случае ВКБ-асимптотики дисперсионных кривых можно рассчитать по одной формуле. Примеры разнонаправленных линейных течений с точкой поворота рассматривались в работах [7–9, 17].

4. Разнонаправленное течение. Рассматривается разнонаправленное течение, меняющее знак на некоторой глубине. Дисперсионную кривую для течений такого типа можно вычислить с помощью ВКБ-приближения. Для численных расчетов используются следующие параметры: $M(z) = -1,41 + 2,65 \exp(0,52z)$, $\omega = 0,4$ (рис. 1). Параметр $\omega < 1$ представляет собой отношение частоты свободной волны к максимальному значению частоты плавучести и описывает распространение ВГВ с частотой, почти в два раза меньшей частоты плавучести, что наблюдается в реальных океанических условиях. На рис. 2 в плоскости переменных (μ, Ψ) показано расположение особых точек, характеризующих поведение дисперсионных кривых. Видно, что интервалы изменения переменной μ , границами которых являются точки поворота, включают интервал, границами которого являются точки ветвления, поэтому значений μ , при которых на интервале $z \in [-\pi, 0]$ имеется точка поворота, не существует. Следовательно, $q_1(z) > 0$. Дисперсионные кривые в случае разнонаправленного течения представляют собой замкнутые линии, соответствующие возбуждению кольцевых (поперечных) волновых мод [7–9, 17]. В общем случае разнонаправленного течения собственные значения $\mu_n(\nu)$ образуют две группы [2, 3, 16, 17]. В первой группе собственные значения $\mu_n(\nu)$ увеличиваются с ростом n и стремятся к значению $\omega/M(0)$ (верхние участки замкнутых дисперсионных кривых). Во второй группе собственные значения $\mu_n(\nu)$ уменьшаются с ростом n и стремятся к значению $\omega/M(-\pi)$ (нижние участки замкнутых дисперсионных кривых). В случае если μ принадлежит интервалу $[\mu_D, \infty]$ или $[-\infty, \mu_C]$, корень уравнения $\omega - \mu M(z) = 0$, который можно найти

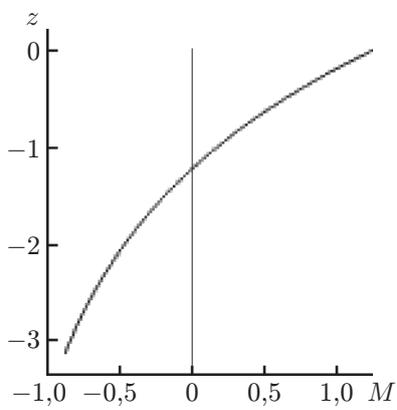


Рис. 1

Рис. 1. Профиль разнонаправленного сдвигового течения

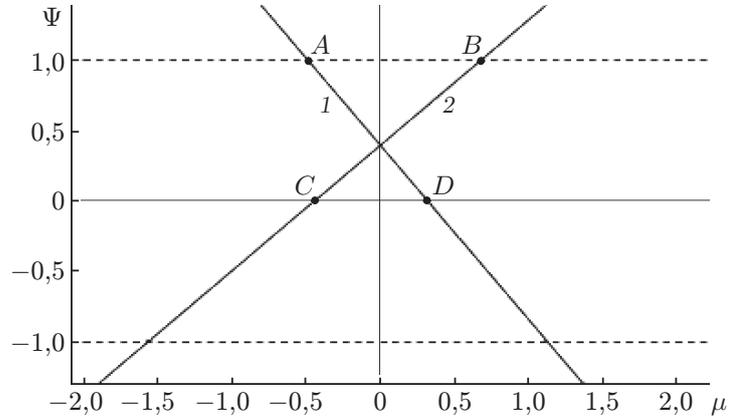


Рис. 2

Рис. 2. Особые точки решений дисперсионного уравнения в случае разнонаправленного течения:

1 — $\Psi = \omega - \mu M(0)$, 2 — $\Psi = \omega - \mu M(-\pi)$

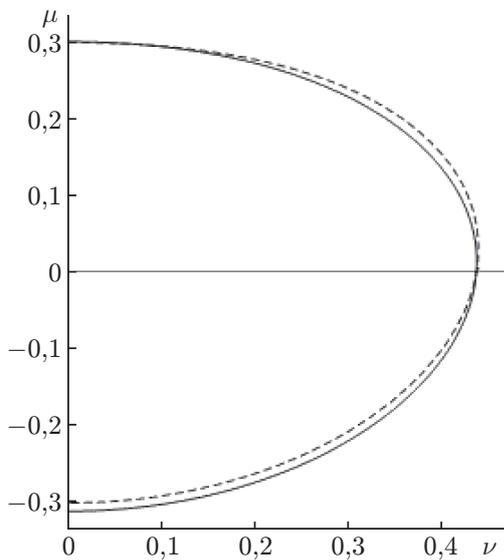


Рис. 3

Рис. 3. Дисперсионная кривая первой моды $\mu_1(\nu)$ и ее аппроксимация в случае разнонаправленного течения:

сплошная линия — точный численный расчет, штриховая — расчет по формуле (2.3)

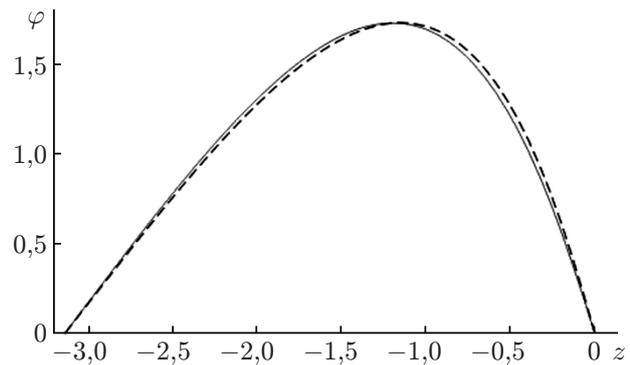


Рис. 4

Рис. 4. Собственная функция первой моды $\varphi_1(z)$ и ее аппроксимация в случае разнонаправленного течения:

сплошная линия — точный численный расчет, штриховая — расчет по формуле (4.1)

в явном виде, принадлежит интервалу $[0, -\pi]$, уравнение (2.4) имеет сингулярность, собственных значений не существует [2, 3, 16, 17]. На рис. 3 приведены результаты расчетов дисперсионной кривой первой моды, полученной численно (сплошная линия) и по формуле (2.3) (штриховая линия). На рис. 4 представлены результаты расчетов собственной функции первой моды при $\nu = 0,3$: сплошная линия — точный численный расчет спектральной задачи (1.2), штриховая — расчет по формуле

$$\varphi(z) = Cq_1^{-1/4}(z) \sin \left(\int_0^z \sqrt{q_1(z)} dz \right), \quad (4.1)$$

где константа C подбирается из условия нормировки максимальных значений собственных функций.

5. Однонаправленное течение. Однонаправленное течение задается следующим образом: $M(z) = 0,8 \exp(0,49z)$, $\omega = 0,54$ (рис. 5). На рис. 6 показано расположение особых точек для этого случая. Видно, что имеется два семейства дисперсионных кривых: $\mu_{n-}(\nu)$ (семейство нижних кривых) и $\mu_{n+}(\nu)$ (семейство верхних кривых) [7–9]. Семейство кривых $\mu_{n-}(\nu)$ расположено в диапазоне $\mu_A \div \mu_C$, семейство $\mu_{n+}(\nu)$ — в диапазоне $\mu_D \div \mu_E$. Рассмотрим сначала дисперсионные кривые $\mu_{n-}(\nu)$. На рис. 6 видно, что на интервале $[\mu_B, \mu_C]$ можно использовать ВКБ-приближение (2.3). На отрезке $[\mu_A, \mu_B]$ необходимо использовать соотношение (3.1), которое решается асимптотически с использованием выражения (3.2). В данном случае $\partial q_1(z^*(\mu))/\partial z < 0$, поэтому для эйконала $\tau(z)$ необходимо изменить пределы интегрирования. Точка поворота $z^*(\mu)$ определяется в явном виде из решения уравнения $\omega - \mu M(z) = 1$ ($z^*(\mu) = \ln(\omega - 1/0,8\mu)/0,49$). Тогда, используя (3.2), дисперсионное уравнение (3.1) можно представить в виде

$$\exp(-\tau(0)) \sin(\tau(-\pi) + \pi/4) - \exp(\tau(0)) \cos(\tau(-\pi) + \pi/4)/2 = 0. \quad (5.1)$$

Отсюда получаем

$$\tau(-\pi) + \pi/4 - \arctg(\exp(\tau(0)/2)) = \pi n. \quad (5.2)$$

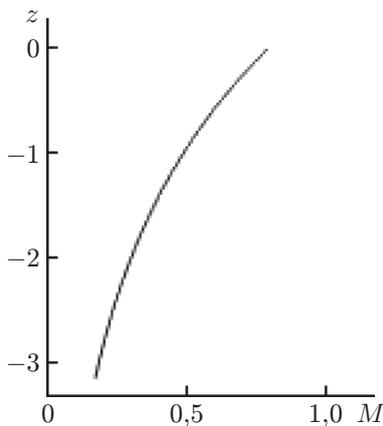


Рис. 5

Рис. 5. Профиль однонаправленного сдвигового течения

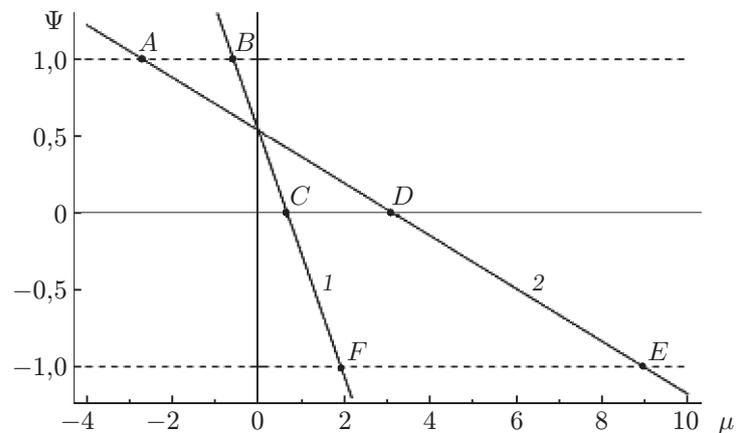


Рис. 6

Рис. 6. Особые точки решений дисперсионного уравнения в случае однонаправленного сдвигового течения:

1 — $\Psi = \omega - \mu M(0)$, 2 — $\Psi = \omega - \mu M(-\pi)$

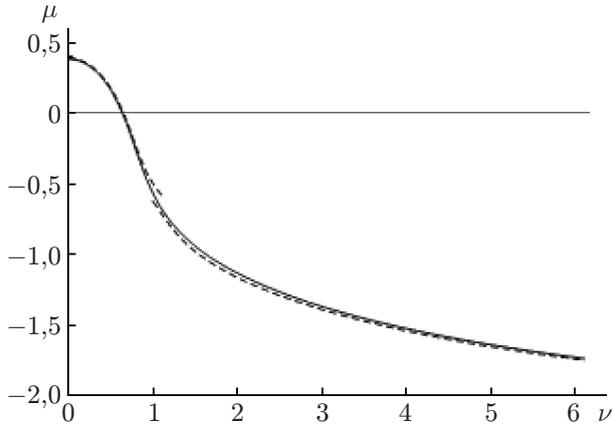


Рис. 7

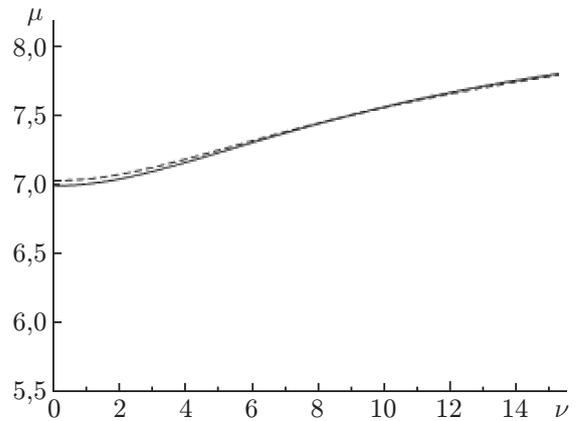


Рис. 8

Рис. 7. Дисперсионная кривая первой моды $\mu_{1-}(\nu)$ (сплошная линия) и ее аппроксимация (штриховая линия) в случае однонаправленного течения

Рис. 8. Дисперсионная кривая первой моды $\mu_{1+}(\nu)$ (сплошная линия) и ее аппроксимация (штриховая линия) в случае однонаправленного течения

Уравнение (5.2) для произвольного номера моды n можно решить численно, так как его левая часть при любом $\mu \in [\mu_A, \mu_B]$ является строго возрастающей функцией. В случае если значения μ достаточно далеки от значения μ_B , уравнение (5.1) можно представить в виде $\tau(-\pi) + \pi/4 = \pi n$, откуда следует

$$\nu_n(\mu) = \left(\left(\frac{\pi n - \pi/4}{b} \right)^2 - \mu^2 \right)^{1/2}, \quad b = \int_{-\pi}^{z^*(\mu)} \sqrt{\Psi^{-2}(z, \mu) - 1} dz. \quad (5.3)$$

На рис. 7 представлены дисперсионная кривая $\mu_{1-}(\nu)$ (сплошная линия) и ее асимптотика (штриховая линия). До точки поворота расчет асимптотик проводился по формуле (2.3), после точки поворота — по формуле (5.2). Таким образом, дисперсионные кривые в случае однонаправленного течения представляют собой разомкнутые линии, соответствующие генерации клиновидных волновых мод [7–9, 17].

Точка поворота для верхней дисперсионной кривой $\mu_{n+}(\nu)$ определяется из решения уравнения $\omega - \mu M(z) = -1$ ($z^*(\mu) = \ln(\omega + 1/0,8\mu)/0,49$). На рис. 6 видно, что при $\mu \in [\mu_D, \mu_E]$ точка поворота $z^*(\mu) \in [-\pi, 0]$. Поэтому асимптотику дисперсионной кривой $\mu_{n+}(\nu)$ можно рассчитать по формуле (5.3), так как точка поворота μ_F находится достаточно далеко от интервала $[\mu_D, \mu_E]$. На рис. 8 приведены дисперсионная кривая $\mu_{1+}(\nu)$ (сплошная линия) и ее асимптотика (штриховая линия), рассчитанная по формуле (2.3) до точки поворота, и по формуле (5.3) после точки поворота. На рис. 9 приведены численно рассчитанная собственная функция первой моды (сплошная линия) и ее асимптотика, полученная по формуле (4.1) (штриховая линия), при $\nu = 3$.

Заключение. В работе построены ВКБ-решения, описывающие основные характеристики полей внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде конечной глубины при наличии медленно меняющихся по вертикали фоновых сдвиговых течений. Для аналитического решения задачи использованы постоянное распределение частоты плавучести и две зависимости фонового сдвигового течения от глубины, характерные для реальных океанических условий. В приближении Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна получены дисперсионные соотношения для случаев отсутствия и наличия точек поворота верти-

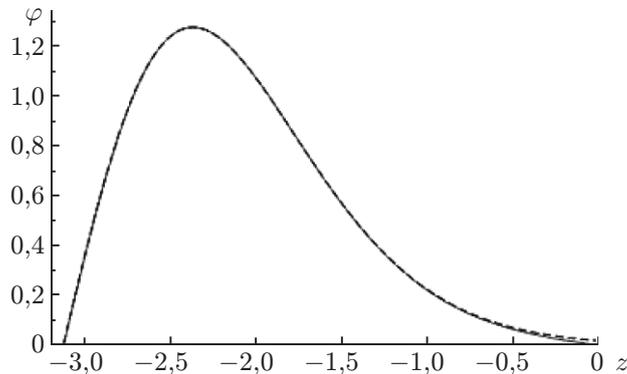


Рис. 9. Собственная функция первой моды $\varphi_1(z)$ (сплошная линия) и ее аппроксимация (штриховая линия) в случае однонаправленного течения

кальной спектральной задачи. При наличии точек поворота ВКБ-решения дисперсионного уравнения выражаются через функции Эйри. Для знакопеременного течения построены асимптотики, описывающие кольцевые (поперечные) волны. Для однонаправленного течения с использованием асимптотик функций Эйри получены аналитические представления дисперсионных соотношений, описывающих клиновидные (продольные) волны.

Использование модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений), а также ВКБ-приближений позволяет редуцировать основную спектральную задачу к более простой и исследовать эту задачу асимптотически. Полученные аналитические результаты показывают, что асимптотики с высокой степенью точности описывают точные решения спектральной задачи. Предложенные асимптотические методы позволяют исследовать волновую динамику аналитически и качественно, что имеет большое значение для оперативного анализа результатов натурных измерений ВГВ в океане и для разработки способов обнаружения ВГВ с использованием методов радиолокации [4–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лайтхил Д.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
2. **Fabrikant A. L.** Propagation of waves in shear flows / A. L. Fabrikant, Yu. A. Stepanyants. Berlin: World Sci. Publ., 1998.
3. **Miropolsky Y. Z.** Dynamics of internal gravity waves in the ocean / Ed. by O. Shishkina. Berlin: Springer, 2001.
4. **Булатов В. В.** Волны в стратифицированных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2015.
5. **Morozov E. G.** Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018.
6. **Velarde M. G.** The ocean in motion / Ed. by M. G. Velarde, R. Yu. Tarakanov, A. V. Marchenko. Berlin: Springer Oceanography: Springer Intern. Publ. AG, 2018.
7. **Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.** Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // Russ. J. Earth Sci. 2020. V. 20. ES4004.
8. **Bulatov V., Vladimirov Yu.** Analytical approximations of dispersion relations for internal gravity waves equation with shear flows // Symmetry. 2020. V. 12, N 11. P. 1865.

9. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Дальние поля внутренних волн, возбуждаемых пульсирующим источником в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 6. С. 45–52.
10. **Khimchenko E. E., Frey D. I., Morozov E. G.** Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russ. J. Earth Sci. 2020. V. 20. ES2006.
11. **Morozov E. G., Tarakanov R. Yu., Frey D. I., et al.** Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // J. Oceanography. 2018. V. 74, N 2. P. 147–167.
12. **Frey D. I., Novigatsky A. N., Kravchishina M. D., Morozov E. G.** Water structure and currents in the Bear Island Trough in July — August 2017 // Russ. J. Earth Sci. 2017. V. 17. ES3003.
13. **Гаврильева А. А., Губарев Ю. Г., Лебедев М. П.** Теорема Майлса и первая краевая задача уравнения Тейлора — Гольдстейна // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 24–38.
14. **Hirota M., Morrison P. J.** Stability boundaries and sufficient stability conditions for stably stratified, monotonic shear flows // Phys. Lett. A. 2016. V. 380, N 21. P. 1856–1860.
15. **Churilov S.** On the stability analysis of sharply stratified shear flows // Ocean Dynamics. 2018. V. 68. P. 867–884.
16. **Боровиков В. А., Левченко Е. С.** Функция Грина уравнения внутренних волн в слое стратифицированной жидкости со средним сдвиговым течением // Мор. гидрофиз. журн. 1987. № 1. С. 24–32.
17. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю.** Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника в океане // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57, № 3. С. 362–371.
18. **Kravtsov Yu.** Caustics, catastrophes and wave fields / Yu. Kravtsov, Yu. Orlov. Berlin: Springer, 1999.
19. **Babich V. M.** Asymptotic methods in short wavelength diffraction theory / V. M. Babich, V. S. Buldirev. Oxford: Alpha Sci., 2007.
20. **Froman N.** Physical problems solved by the phase-integral method / N. Froman, P. Froman. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

*Поступила в редакцию 18/V 2021 г.,
после доработки — 10/VI 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.*
