

УДК 532.5:536.2:537.8

Влияние тока Холла на МГД-течение наножидкости Кассона вдоль растягивающейся поверхности при наличии нулевого потока массы наночастиц и условий скольжения на поверхности*

М. Абд Эль-Азиз¹, А.А. Аффифи²

¹*Университет короля Халида, Абха, Саудовская Аравия*

²*Университет Кассима, Бурайда, Саудовская Аравия*

E-mail: m_abdelaziz999@yahoo.com, afify60@hotmail.com

Проведен численный анализ влияния тока Холла и условий скольжения на поверхности на магнито-гидродинамическое течение наножидкости Кассона и на теплообмен вдоль растягивающейся поверхности. Для описания неньютоновской жидкости применялась модель жидкости Кассона. В модели учтены физические механизмы, ответственные за броуновское движение и термофорез с неоднородным внутренним тепловыделением/поглощением. Для получения практически пригодных результатов применялось граничное условие с нулевым потоком массы наночастиц. Путем применения метода переменной подобия были выполнены преобразования уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем решалась численно. Проверка полученных результатов осуществлялась путем их сравнения с результатами других работ. Обнаружено, что продольное поверхностное трение, поперечное трение, и скорости тепло- и массообмена значительно увеличиваются с увеличением параметра Холла.

Ключевые слова: наножидкость Кассона, граничное условие скольжения, ток Холла, тепловыделение/поглощение.

Введение

В последнее время изучению наножидкостей уделяется большое внимание благодаря возможностям их применения в различных технологических областях: теплообменниках, солнечной энергетике, ядерных реакторах, в биомедицине и медицине. Новая концепция наножидкости была разработана автором работы [1] для описания традиционной базовой жидкости, содержащей наночастицы. Повышение теплопроводности на 40 % при добавлении наночастиц меди к обычной жидкости было получено в исследовании [2]. Авторами [3] было установлено, что добавление менее 1 % (по объему) наночастиц к традиционной жидкости приводит к увеличению теплопроводности полученной жидкости почти в два раза. В работе [4] была разработана альтернативная модель для объяснения аномальной интенсификации конвективного теплообмена в наножидкости, которая исключила недостатки гомогенных и дисперсионных моделей. Было рассмотрено семь механизмов скольжения, включая инерцию, броуновскую диффузию, термофорез, диффузиофорез, эффект Магнуса, вытеснение жидкости, гравитацию, и получено, что из перечисленных механизмов только броуновская диффузия и термофорез

* Авторы выражают признательность деканату научных исследований Университета короля Халида (Саудовская Аравия), за финансирование этой работы в рамках Общего исследовательского проекта по гранту № G. R. P-57-40.

являются важными механизмами скольжения в наножидкостях. В некоторых исследованиях широко применялась модель Буонджиорно [4]. Влияние конвективного граничного условия на свободно-конвективное течение наножидкости в приближении пограничного слоя обсуждалось в работе [5]. В работе [6] исследовалось ламинарное течение наножидкости вдоль растягивающейся поверхности. Авторы [7] проиллюстрировали влияние конвективного граничного условия и магнитного параметра на течение наножидкости вдоль проницаемой вертикальной поверхности в приближении пограничного слоя. В работе [8] изучалось свободно-конвективное течение наножидкости в приближении пограничного слоя вдоль горизонтальной плоской пластины, расположенной в пористой среде, а в [9] исследовалось естественное конвективное течение наножидкости в приближении пограничного слоя вдоль вертикальной пластины с переменными свойствами жидкости. Авторы [10] изучали влияние броуновского движения и термофореза с учетом конвективного граничного условия на течение наножидкости в приближении пограничного слоя вдоль растягивающейся поверхности. Авторы [11] аналитически исследовали влияние конвективного граничного условия на конвективное течение наножидкости Максвелла над растягивающейся поверхностью.

Модель жидкости Кассона была разработана в 1959 г. для прогнозирования течения суспензий масляной краски [12]. Влияние условий скольжения и генерации энтропии для стационарного потока наножидкости Кассона, индуцированного растягивающейся поверхностью, аналитически исследовалось в работе [13].

Эффекты Холла привлекают большое внимание в силу того, что встречаются во многих геофизических и астрофизических явлениях, а также в инженерных задачах, например, в ускорителях Холла и датчиках Холла. В разреженной среде или в присутствии сильного магнитного поля проводимость жидкости является анизотропной, и эффектом Холла нельзя пренебречь. В настоящее время наблюдается тенденция к применению магнитогидродинамического (МГД) воздействия при наличии сильного магнитного поля (так что влияние электромагнитной силы становится заметным) и низкой плотности газа (например, в космическом полете и в исследованиях ядерного синтеза). В этих условиях важное значение приобретает ток Холла. В работе [14] численно исследовалось влияние тока Холла и условий скольжения на МГД-течение и теплообмен наножидкости вдоль растягивающейся поверхности, а в работе [15] изучалось влияние теплового излучения, тока Холла и джоулевого нагрева на состоящую из ферромагнитных наночастиц (Fe_3O_4) вращающуюся МГД-жидкость над растяжимой пластиной.

Граничное условие прилипания известно как базовое положение теории Навье–Стокса. Жидкости, демонстрирующие скольжение на границе, находят применение в технологических задачах, таких как полирование искусственных клапанов сердца и инерционных полостей. Условие скольжения в случае разреженных газов, протекающих вдоль твердой поверхности, является условием скольжения Максвелла [16] и широко реализуется в современных исследованиях течения разреженного газа. В настоящей работе изучается взаимодействие поверхности и жидкости, при котором также возникает режим скольжения. В этом смысле число Кнудсена (Kn), отражающее отношение средней длины свободного пробега молекулы к характерному размеру течения, является решающим фактором. Когда число Кнудсена очень мало, между поверхностью и жидкостью не наблюдается скольжения, что согласуется с представлениями механики сплошных сред. Однако когда число Кнудсена лежит в диапазоне от 0,001 до 0,1, при взаимодействии поверхности с жидкостью происходит скольжение, что обычно изучается в свете граничных условий скольжения первого порядка в модели Максвелла–Смолуховского. Следует отметить, что теория течения со скольжением позволяет применять уравнение Навье–Стокса, даже когда характерный размер течения приближается к средней длине свободного пробега молекул. Теория течения со скольжением подтвердилась асимптотическим решением уравнения Больцмана. Важно отметить, что эффективная

модель течения со скольжением всегда предпочтительна из-за присущей ей простоты по сравнению с решением уравнения Больцмана. Авторы [17] предложили граничное условие для случая течения со скольжением. В работе [18] численно изучалось совместное влияние течения со скольжением, ньютоновского нагрева и теплового излучения на МГД-течение и теплоперенос вдоль проникаемой растягивающейся поверхности, а в [19] исследовалось влияние скорости скольжения и скачка температуры на неньютоновскую степенную жидкость над непрерывно движущейся проникаемой поверхностью.

Целью настоящей работы является анализ влияния тока Холла, неоднородного тепловыделения/поглощения и условий скольжения на МГД-течение наножидкости Кассона в приближении пограничного слоя вдоль поверхности растяжения с использованием модели Буонджиорно. Насколько известно авторам представленной статьи публикации по данной теме отсутствуют. В представленном исследовании на поверхности применяются условия конвективного теплового потока и нулевого потока массы наночастиц, по нормали к поверхности приложено сильное магнитное поле. Влияния различных параметров на поля скорости, температуры и концентрации наночастиц отображены на графиках. Коэффициенты продольного и поперечного поверхностного трения и локальные числа Нуссельта и Шервуда также представлены графически и подробно проанализированы. Полученные результаты подтвердили, что наночастицы, внедренные в электропроводящую жидкость Кассона, в присутствии тока Холла и условий скольжения имеют множество практических применений, связанных с ядерными реакторами, лечением желудка, химическим производством, устройствами для стерилизации и биомедицинской промышленностью.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим стационарное трехмерное течение в пограничном слое и теплообмен вязкой несжимаемой и электропроводящей жидкости вдоль поверхности растяжения в наножидкости Кассона, содержащей наночастицы CuO , при наличии эффектов тока Холла. Поверхность растягивается с линейной скоростью $u_w(x) = bx$, где b — положительная постоянная с размерностью, обратной времени. Ось x направлена вдоль сплошной растягивающейся поверхности, а ось y — перпендикулярно оси x . Предполагается, что течение имеет место при $y > 0$. Принимается, что передний край растягивающейся поверхности совпадает с осью z . Схематическое представление физической модели и системы координат изображено на рис. 1. Вдоль оси y наложено сильное однородное магнитное поле B_0 . Магнитное число Рейнольдса считается малым, так что индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Влияние тока Холла инициирует силу в направлении z , которая вызывает поперечное течение в этом же направлении, и следовательно, течение становится трехмерным. Для упрощения задачи предполагается, что параметры течения в z -направлении не изменяются. Это предположение считается верным, если поверхность в z -направлении имеет бесконечную протяженность. В исследовании пренебрегается джоулевым нагревом, вязкой диссипацией и электрическим полем и применяется условие нулевого потока массы наночастиц. Обобщенный закон Ома, включающий ток Холла, представлен в виде [20]

$$\vec{J} + \frac{\omega_e \tau_e}{B_0} (\vec{J} \times \vec{B}) = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}), \quad (1)$$

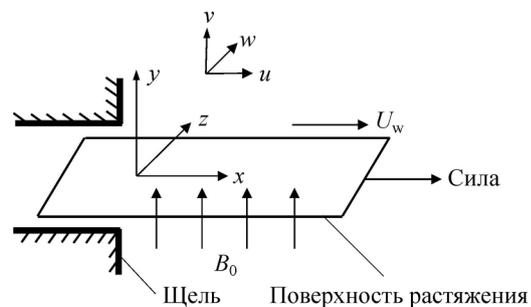


Рис. 1. Физический вид модели и система координат.

где $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ — вектор плотности тока, \vec{V} — вектор скорости, \vec{E} — вектор электрического поля, $\vec{B} = (0, B_0, 0)$ — вектор магнитной индукции, τ_e — время столкновения электронов, ω_e — циклотронная частота электрона, $\sigma = e^2 n_e \tau_e / m_e$ — электрическая проводимость наножидкости, e — заряд электрона, n_e — плотность электронов, m_e — масса электрона. Уравнение сохранения электрического заряда $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ приводит к $J_y = \text{const}$. Эта константа равна нулю, так как на электрически непроводящей пластине $J_y = 0$. Таким образом, $J_y = 0$ во всей области течения. Поскольку индуцированным магнитным полем пренебрегается, то уравнение Максвелла $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ принимает вид $\nabla \times \vec{E} = 0$, откуда следует, что $\partial E_x / \partial y = 0$ и $\partial E_z / \partial y = 0$. Подразумевается, что $E_x = \text{const}$ и $E_z = \text{const}$ во всей области течения. Положим $E_x = 0$ и $E_z = 0$, тогда из уравнения (1) следует

$$J_x = \frac{\sigma B_0}{1+m^2}(mu-w), \quad (2)$$

$$J_z = \frac{\sigma B_0}{1+m^2}(mw+u), \quad (3)$$

где $m = \omega_e \tau_e$ — параметр Холла. Аналогично [21], реологическое уравнение жидкости Кассона запишется следующим образом:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2(\mu_B + p_y / \sqrt{2\pi})e_{ij}, & \pi > \pi_c, \\ 2(\mu_B + p_y / \sqrt{2\pi_c})e_{ij}, & \pi < \pi_c, \end{cases} \quad (4)$$

где μ_B — пластическая динамическая вязкость неньютоновской жидкости, p_y — предел текучести жидкости, $\pi = e_{ij}e_{ij}$ — произведение компонент скорости деформации, e_{ij} — компонента скорости деформации, π_c — критическое значение, величина π соответствует неньютоновской модели. В связи с вышеуказанными предположениями и приближением для пограничного слоя основные уравнения наножидкости Кассона при наличии тока Холла могут быть выражены в виде [14], [22]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}(u+mw), \quad (6)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+m^2)}(mu-w), \quad (7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau \left\{ D_B \left(\frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{D_T}{T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{q'''}{(\rho c)_f}, \quad (8)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_T}{T_\infty} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$u = u_w + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) L \frac{\partial u}{\partial y}, v = 0, w = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) L \frac{\partial w}{\partial y}, T = T_w, D_B \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{D_T}{T_\infty} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \quad (10)$$

$$u = w = 0, T = T_\infty, C = C_\infty \text{ при } y \rightarrow \infty,$$

здесь u , v и w — компоненты скорости вдоль x , y и z соответственно, $\gamma = \mu_B \sqrt{2\pi_c} / \rho_y$ — параметр жидкости Кассона, ρ — плотность наножидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, $\tau = (\rho c)_p / (\rho c)_f$ — отношение эффективной объемной теплоемкости материала наночастиц к объемной теплоемкости наножидкости, $\alpha = k / (\rho c)_f$ — температуропроводность наножидкости, где k — теплопроводность наножидкости, C_∞ — объемная доля наночастиц в свободном потоке, T_w — температура растягивающейся поверхности, T_∞ — температура наножидкости в свободном потоке, $D_B = k_B T / (3\pi \mu_f d_p)$ — коэффициент броуновской диффузии, $D_T = \left(\frac{\mu_f}{\rho_f}\right) \left(0, 26 \frac{k_f}{2k_f + k_p}\right) \phi$ — коэффициент термодиффузии, μ_f — вязкость жидкости, d_p — диаметр наночастиц, k_f и k_p — теплопроводность жидкости и материала частиц соответственно. Важно отметить, что когда параметр жидкости Кассона γ приближается к бесконечности, задача сводится к ньютоновской модели. Неравномерное внутреннее тепловыделение/поглощение q''' предполагается таким же, как в работе [23]:

$$q''' = \frac{ku_w(x)}{x\nu} \left(Q_0 (T_w - T_\infty) e^{-\sqrt{b/\nu} y} + Q_1 (T - T_\infty) \right), \quad (11)$$

здесь Q_0 и Q_1 — коэффициенты тепловыделения/поглощения, зависящие от пространственного положения и температуры соответственно. Заметим, что случай, когда $Q_0 > 0$ и $Q_1 > 0$, соответствует внутреннему тепловыделению, а случай $Q_0 < 0$ и $Q_1 < 0$ — внутреннему теплопоглощению. Введем следующие безразмерные функции и переменные подобия:

$$\eta = \sqrt{b/\nu} y, \quad u = bxf'(\eta), \quad v = -\sqrt{b\nu} f(\eta), \quad w = bxh(\eta),$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \phi(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_\infty}, \quad (12)$$

где η — масштабированная координата пограничного слоя, f , h и θ — безразмерные функция тока, поперечная скорость и температура соответственно, ϕ — относительная объемная доля наночастиц. Подставив приведенные выше уравнения в уравнение (5), с учетом отношений (11) и (12) уравнения (6)–(10) можно переписать в виде

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) f''' + ff'' - f'^2 - \frac{M}{1+m^2} (f' + mh) = 0, \quad (13)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) h'' + fh' - f'h + \frac{M}{1+m^2} (mf' - h) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' + N_B \phi'\theta' + N_T \theta'^2 + \frac{1}{Pr} (Q_0 e^{-\eta} + Q_1 \theta) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi'' + f \phi' + \frac{N_T}{Sc N_B} \theta'' = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 + \chi \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) f''(0), \quad h(0) = \chi \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) h'(0), \quad \theta(0) = 1, \\ N_B \phi'(0) + N_T \theta'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 0, \quad h(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0, \quad \phi(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

здесь штрихом обозначена производная по η , $M = \sigma B_0^2 / (\rho b)$ — магнитный параметр, $Pr = \nu / \alpha$ — число Прандтля, $Sc = \nu / D_B$ — число Шмидта, $\chi = L \sqrt{b/\nu}$ — параметр скольжения, $N_B = \tau D_B C_\infty / \nu$ — параметр броуновского движения, $N_T = \tau D_T (T_w - T_\infty) / (\nu T_\infty)$ — параметр термофореза. Величинами, представляющими практический интерес в настоящем исследовании, являются локальные коэффициенты поверхностного трения в направлении x (C_{fx}) и в направлении z (C_{fz}), локальное число Нуссельта Nu_x и локальное число Шервуда Sh_x , выражаемые как

$$C_{fx} = \frac{\tau_{wx}}{\rho u_w^2}, \quad C_{fz} = \frac{\tau_{wz}}{\rho u_w^2}, \quad Nu_x = \frac{x q_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad Sh_x = \frac{x q_m}{D_B(C_w - C_\infty)}, \quad (18)$$

где q_w и q_m — поверхностные потоки тепла и массы соответственно, τ_{wx} и τ_{wz} — касательные напряжения в направлениях x и z соответственно, задаваемые выражениями

$$\begin{aligned} \tau_{wx} = \left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\pi_c}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \tau_{wz} = \left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\pi_c}} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}, \\ q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad q_m = -D_B \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Локальные коэффициенты трения в направлении x (C_{fx}) и направлении z (C_{fz}), локальные числа Нуссельта Nu_x и Шервуда Sh_x находятся из выражений

$$Re_x^{1/2} C_{fx} = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) f''(0), \quad Re_x^{1/2} C_{fz} = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) h'(0), \quad \frac{Nu_x}{Re_x^{1/2}} = -\theta'(0), \quad \frac{Sh_x}{Re_x^{1/2}} = -\phi'(0), \quad (20)$$

где $Re_x = u_w x / \nu$ — локальное число Рейнольдса.

2. Численный метод

Нелинейные дифференциальные уравнения (13)–(16) с граничными условиями (17) представляют собой двухточечную краевую задачу и решаются численно методом пристрелки путем преобразования их в начальную задачу. В этом методе система уравнений (13)–(16) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$f' = p, \quad p' = q, \quad q' = \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) \left[p^2 - fq + \frac{M}{1 + m^2} (p + mh) \right], \quad (21)$$

$$h' = r, \quad r' = \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) \left[ph - fr - \frac{M}{1 + m^2} (mp - h) \right], \quad (22)$$

Таблица

Сравнение результатов для $-\theta'(0)$ при различных значениях Pr ,
при $\gamma \rightarrow \infty$ и $M = m = \chi = Q_0 = Q_1 = N_B = N_T = Sc = 0$

| Pr | $-\theta'(0)$, данные работы [6] | $-\theta'(0)$, данные работы [10] | $-\theta'(0)$, данные работы [13] | $-\theta'(0)$, результаты настоящей работы |
|------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|---|
| 0,07 | 0,0663 | 0,0656 | – | 0,0662 |
| 0,20 | 0,1691 | 0,1691 | 0,1691 | 0,1691 |
| 0,70 | 0,4539 | 0,4539 | 0,4539 | 0,4538 |
| 2,0 | 0,9113 | 0,9114 | 0,9114 | 0,9113 |
| 7,0 | 1,8954 | 1,8954 | 1,8954 | 1,8954 |

$$\theta' = z, \quad \phi' = s, \quad z' = -Pr \left(fz + N_B s z + N_T z^2 + Q_0 e^{-\eta} + Q_1 \theta \right), \quad (23)$$

$$s' = - \left(Sc fs + \frac{N_T}{N_B} z' \right) \quad (24)$$

с начальными условиями

$$f(0) = 0, \quad p(0) = 1 + \chi \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) q(0), \quad h(0) = \chi \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) r(0), \quad (25)$$

$$\theta(0) = 1, \quad N_B s(0) + N_T z(0) = 0.$$

Выбираются начальные оценочные значения: для $q(0)$ — $f''(0)$, для $r(0)$ — $h'(0)$, для $z(0)$ — $\theta'(0)$, для $s(0)$ — $\phi'(0)$; затем начальная краевая задача (21)–(25) решается с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Далее расчетные значения $f'(\eta)$, $h(\eta)$, $\theta(\eta)$ и $\phi(\eta)$ при η_∞ (см. (12)) сравниваются с заданными граничными условиями $f'(\eta_\infty) = 0$, $h(\eta_\infty) = 0$, $\theta(\eta_\infty) = 0$ и $\phi(\eta_\infty) = 0$, а значения $f''(0)$, $h'(0)$, $\theta'(0)$ и $\phi'(0)$ корректируются методом секущей для получения лучшего приближения решения. Размер шага $\Delta \eta$ выбирается равным 0,001. При вычислении используется критерий сходимости, основанный на относительной разности между текущим и предыдущим значениями итерации. Когда разница достигает величины менее 10^{-6} , предполагается, что решение сходится, и итерационный процесс завершается. В таблице приведено сравнение результатов численных решений настоящей работы с известными данными из работ других авторов. Следует отметить, что полученные результаты хорошо согласуются с данными работ [6], [10] и [13]. Численные расчеты проводились в диапазонах $0,3 \leq \gamma \leq \infty$, $Pr = 2$ и $Sc = 3$, $0,0 \leq \chi \leq 0,29$, $0,2 \leq N_T \leq 1$, $0,1 \leq N_B \leq 0,4$, $-0,5 \leq Q_0 \leq 0,5$, $-0,4 \leq Q_1 \leq 0,2$, $2 \leq M \leq 4$, $0,2 \leq m < 2$.

3. Результаты и обсуждения

Дифференциальные уравнения (13)–(16), с учетом граничных условий (17), решаются численно с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка и метода пристрелки. Ниже, на рис. 2–25, показано влияние магнитного параметра M , параметра Холла m , параметров термофореза N_T , броуновского движения N_B и скольжения χ , параметров тепловыделения/поглощения (Q_0 и Q_1 соответственно), зависящих от пространства и температуры, на первичную $f'(\eta)$ и вторичную $h(\eta)$ скорости, на распределение температур $\theta(\eta)$, распределение концентрации наночастиц $\phi(\eta)$, на коэффициент

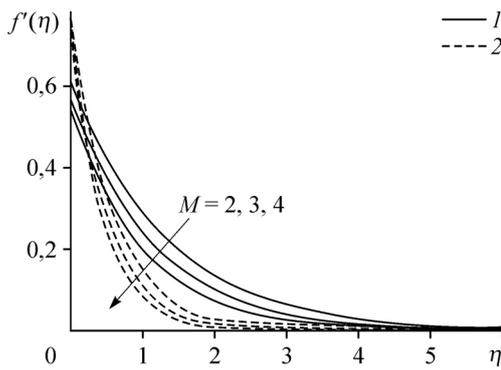


Рис. 2. Профили первичной (основной) скорости для разных значений M и γ при $m = 0,5, N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1, \chi = 0,2$.
 1 — $\gamma = 0,3$ (жидкость Кассона),
 2 — $\gamma \rightarrow \infty$ (ньютоновская жидкость).

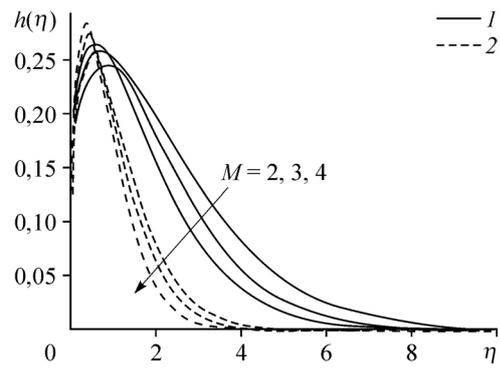


Рис. 3. Профили вторичной скорости для разных значений M и γ при $m = 0,5, N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1$ и $\chi = 0,2$.
 Обозначения линий см. на рис. 2.

поверхностного трения основного ($f''(0)$) вторичного ($h'(0)$) потоков, а также на локальные числа Нуссельта ($-\theta'(0)$) и Шервуда ($-\phi'(0)$) для обоих случаев: для ньютоновского ($\gamma \rightarrow \infty$) и неньютоновского ($\gamma = 0,3$) потоков. Воздействие магнитного параметра M на основную $f'(\eta)$ и вторичную $h(\eta)$ скорости, на температуру $\theta(\eta)$ и распределения концентрации наночастиц $\phi(\eta)$ отображено на рис. 2–5. Наложение магнитного поля на электропроводящую жидкость создает сопротивление, подобное силе, называемой силой Лоренца. Эта сила замедляет течение жидкости по поверхности, что характеризуется уменьшением профилей первичной скорости по мере увеличения магнитного параметра M , как показано на рис. 2. С другой стороны, на рис. 3 видно, что профили вторичной скорости увеличиваются вблизи внешнего слоя поверхности при смещении максимума в сторону пластины, тогда как в оставшейся части пограничного слоя наблюдается противоположное поведение при увеличении M . Кроме того, рис. 2 и 3 показывают, что уменьшение распределений первичной и вторичной компонент скорости

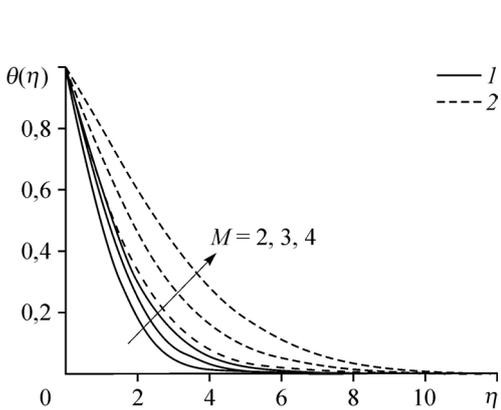


Рис. 4. Профили температуры для разных значений M и γ при $m = 0,5, N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1$ и $\chi = 0,2$.
 Обозначения линий см. на рис. 2.

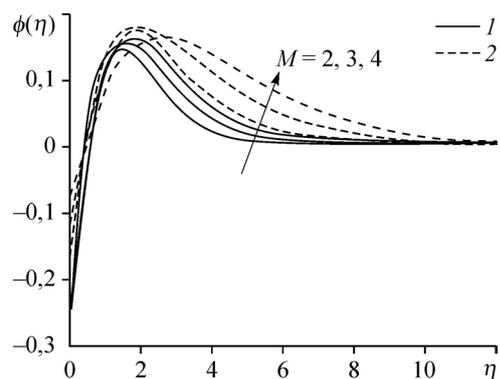


Рис. 5. Профили концентрации наночастиц для разных значений M и γ при $m = 0,5, N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1$ и $\chi = 0,2$.
 Обозначения линий см. на рис. 2.

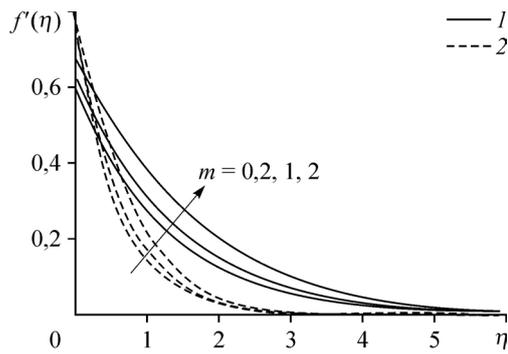


Рис. 6. Профили первичной скорости для разных значений m и γ при $M=2$, $N_B=0,3$, $N_T=0,3$, $Pr=2$, $Sc=3$, $Q_0=0,1$, $Q_1=0,1$, $\chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

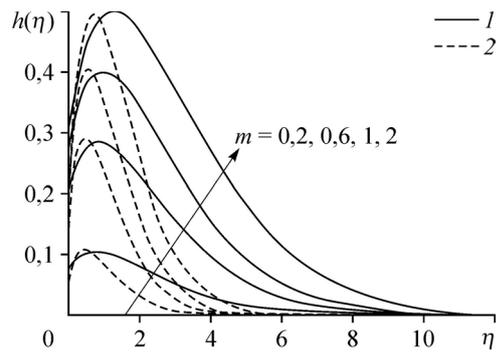


Рис. 7. Профили вторичной скорости для разных значений m и γ при $M=2$, $N_B=0,3$, $N_T=0,3$, $Pr=2$, $Sc=3$, $Q_0=0,1$, $Q_1=0,1$, $\chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

за счет увеличения магнитного поля сопровождается уменьшением толщины динамического пограничного слоя. На рис. 4 видно, что распределение температуры является возрастающей функцией магнитного параметра M . Последнее связано с тем, что диссипация дополнительной работы, затраченной на перенос жидкости против действия магнитного поля, приводит к повышению температуры жидкости. Эта работа преобразуется в тепловую энергию, которая нагревает жидкость и увеличивает толщину теплового пограничного слоя, как показано на рисунке. Влияние магнитного параметра M уменьшает концентрацию наночастиц около растягивающейся поверхности, тогда как на большом расстоянии от нее наблюдается обратный эффект (см. рис. 5). Это происходит вследствие влияния силы Лоренца, которая порождает силу, противоположную потоку жидкости. Характеристики параметра Холла для первичной и вторичной компонент скорости, распределения температуры и концентрации наночастиц представлены на рис. 6–9. На рис. 6 видно, что первичная скорость $f'(\eta)$ и связанная с ней толщина пограничного слоя являются возрастающей функцией параметра Холла. Это связано с тем, что сила сопротивления $\left(-\frac{M}{1+m^2}(f'+mh)\right)$ в уравнении (13) уменьшается

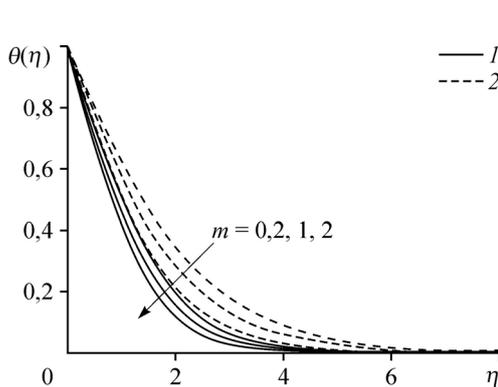


Рис. 8. Профили температуры для разных значений m и γ при $M=2$, $N_B=0,3$, $N_T=0,3$, $Pr=2$, $Sc=3$, $Q_0=0,1$, $Q_1=0,1$, $\chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

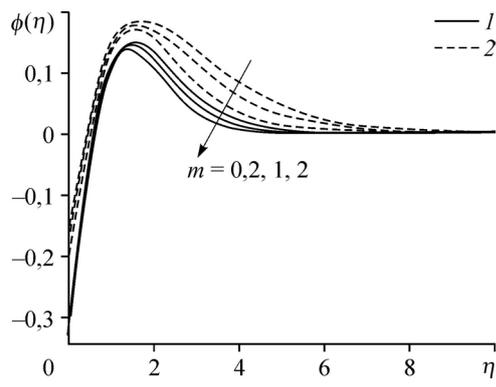


Рис. 9. Профили концентрации наночастиц для разных значений m и γ при $M=2$, $N_B=0,3$, $N_T=0,3$, $Pr=2$, $Sc=3$, $Q_0=0,1$, $Q_1=0,1$, $\chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

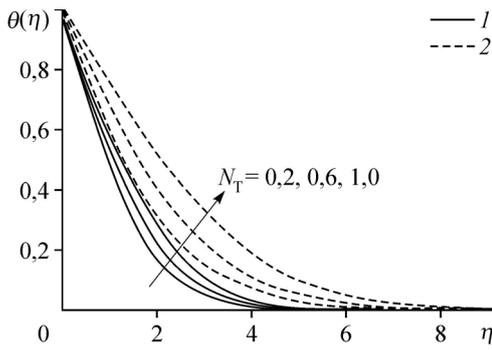


Рис. 10. Профили температуры для разных значений N_T и γ при $M=2, m=0,5, N_B=0,3, Pr=2, Sc=3, Q_0=0,1, Q_1=0,1, \chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

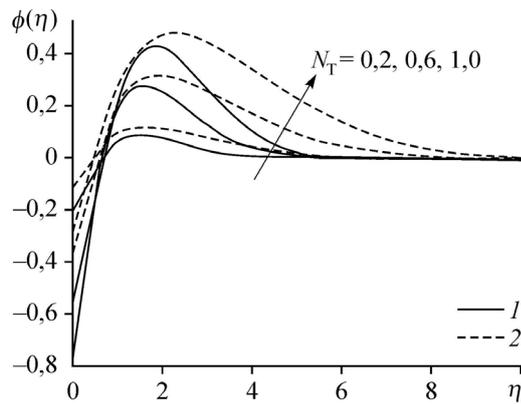


Рис. 11. Профили концентрации наночастиц для разных значений N_T и γ при $M=2, m=0,5, N_B=0,3, Pr=2, Sc=3, Q_0=0,1, Q_1=0,1, \chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

с увеличением параметра Холла m , что в свою очередь увеличивает основную скорость. Из рис. 7 видно, что распределение вторичной скорости $h(\eta)$ увеличивается с увеличением параметра Холла. Это ожидаемо, поскольку течение в направлении z является следствием силы, действующей в данном направлении. Выражение $\left(+\frac{M}{1+m^2}(mf' - h) \right)$ в уравнении (14) — это z -компонента силы Лоренца, а ее поло-

жительный знак показывает, что она содействует течению в направлении z . Рисунки 8 и 9 показывают, что поля температуры $\theta(\eta)$ и концентрации наночастиц $\phi(\eta)$ заметно уменьшаются с увеличением параметра Холла. Это может быть следствием увеличения первичной и вторичной компонент скорости. Отметим, что влияние M и m на первичную и вторичную компоненты скорости неньютоновской жидкости Кассона более очевидно, чем для ньютоновской жидкости, тогда как для полей температуры и концентрации наночастиц наблюдается противоположное поведение. Влияние параметра термофореза N_T на поля температуры и концентрации показано на рис. 10 и 11. Так, на рис. 10 наблюдается повышение температуры с увеличением параметра термофореза. Из рис. 11 видно, что распределение концентрации наночастиц несколько уменьшается вблизи поверхности,

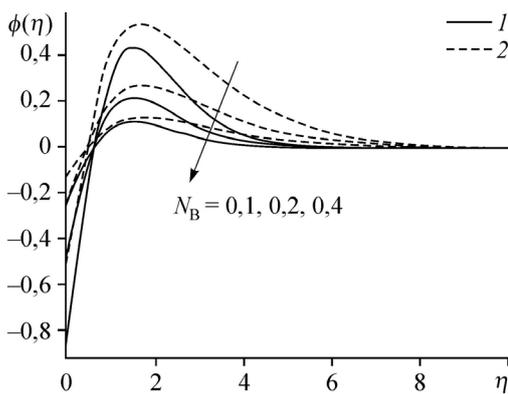


Рис. 12. Профили концентрации наночастиц для разных значений N_B и γ при $M=2, m=0,5, N_T=0,3, Pr=2, Sc=3, Q_0=0,1, Q_1=0,1, \chi=0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

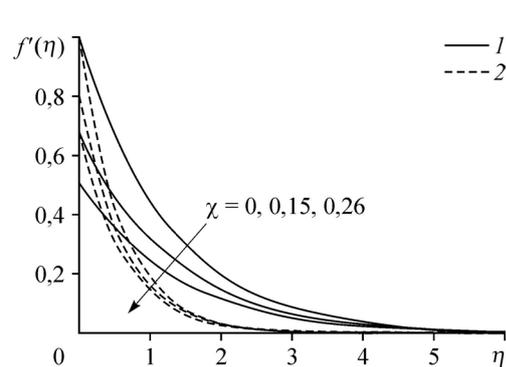


Рис. 13. Профили первичной скорости для разных значений χ и γ при $M=2, m=0,5, N_B=0,3, N_T=0,3, Pr=2, Sc=3, Q_0=0,1, Q_1=0,1$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

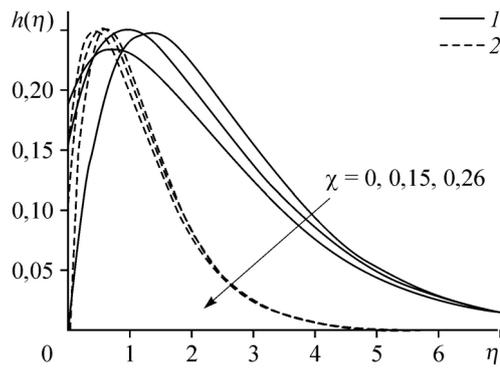


Рис. 14. Профили вторичной скорости для разных значений χ и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_0 = 0,1$, $Q_1 = 0,1$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

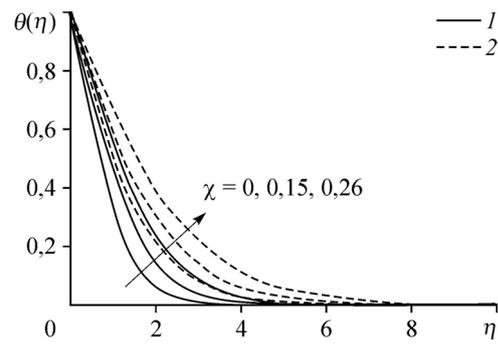


Рис. 15. Профили температуры для разных значений χ и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_0 = 0,1$, $Q_1 = 0,1$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

но ситуация полностью меняется на противоположную в остальной части пограничного слоя с увеличением толщины диффузионного пограничного слоя по мере удаления от поверхности пластины. Физически увеличение параметра термофореза приводит к возрастанию термофоретической силы, следствием чего является усиление полей температуры и концентрации наночастиц. С другой стороны, влияние параметра броуновского движения N_B на распределение концентрации наночастиц в пограничном слое противоположно эффекту N_T (см. рис. 12). Это объясняется тем, что броуновская сила подталкивает наночастицу в противоположном направлении от градиента концентрации, благодаря чему наножидкость становится более однородной. Следует отметить, что параметр броуновского движения N_B оказывает незначительное влияние на распределение температуры в пограничном слое. Из рис. 10–12 видно, что распределения температуры и концентрации наночастиц для ньютоновской жидкости более выражены для всех значений N_T и N_B , чем для неньютоновской жидкости. Графики для анализа влияния параметра скольжения χ на первичную $f'(\eta)$ и вторичную $h(\eta)$ скорости, на распределение температуры $\theta(\eta)$ и распределение концентрации наночастиц $\phi(\eta)$ представлены на рис. 13–16. На рис. 13 видно, что первичная скорость уменьшается при сокращении толщины начального пограничного слоя с увеличением значений параметра скольжения. В физическом смысле сопротивление растягивающейся поверхности при скольжении

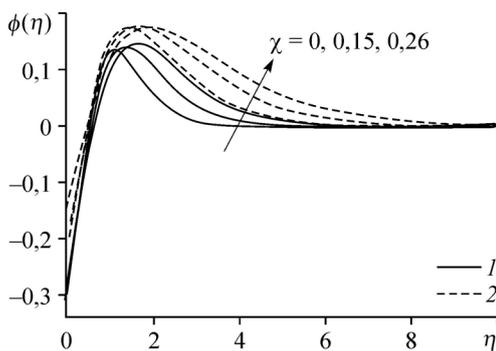


Рис. 16. Профили концентрации наночастиц для разных значений χ и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_0 = 0,1$, $Q_1 = 0,1$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

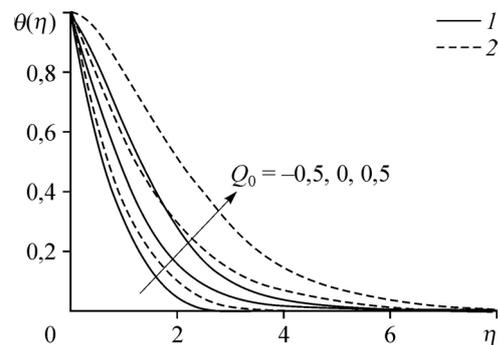


Рис. 17. Профили температуры для разных значений Q_0 и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_1 = 0,1$, $\chi = 0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

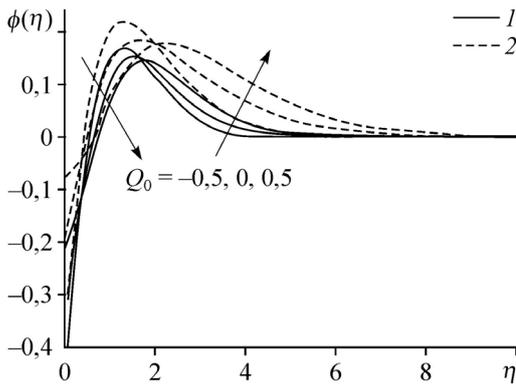


Рис. 18. Профили концентрации наночастиц для разных значений Q_0 и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_1 = 0,1$, $\chi = 0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

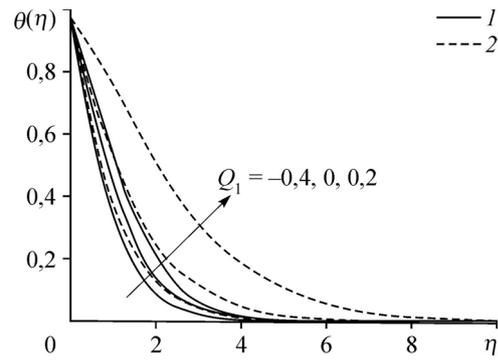


Рис. 19. Профили температуры для разных значений Q_1 и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_0 = 0,1$, $\chi = 0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

может быть частично передано жидкости, и это уменьшает ее скорость. С другой стороны, вторичная скорость увеличивается вблизи пластины и уменьшается в остальной части пограничного слоя. На рис. 15 и 16 показано, что распределения температуры и концентрации наночастиц являются возрастающей функцией параметра скольжения χ . В физическом смысле увеличение параметра скольжения позволяет большему количеству жидкости скользить по поверхности, но создает силу трения, и, следовательно, течение замедляется, что в свою очередь увеличивает температуру и распределение концентрации наночастиц. Влияние пространственно-зависимого внутреннего тепловыделения ($Q_0 > 0$) или поглощения ($Q_0 < 0$) на температурное поле представлено на рис. 17. Видно, что тепловыделение приводит к увеличению распределения температуры с увеличением толщины теплового пограничного слоя, тогда как в случае теплопоглощения наблюдается противоположное поведение. В физическом смысле тепловыделение ($Q_0 > 0$) в пограничном слое генерирует энергию, что увеличивает температуру жидкости, в то время как теплопоглощение ($Q_0 < 0$) приводит к уменьшению распределения температуры в пограничном слое. Рисунок 18 показывает влияние пространственно-зависимого внутреннего тепловыделения/поглощения Q_0 на распределение

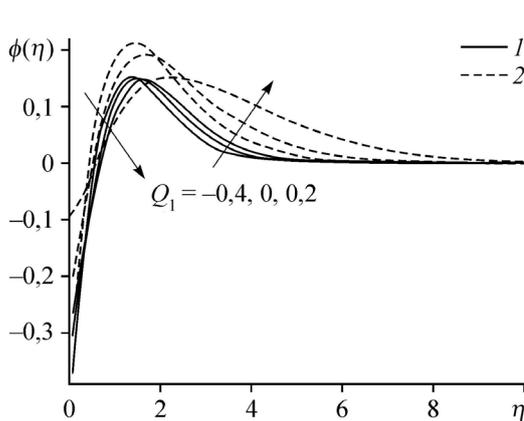


Рис. 20. Профили концентрации наночастиц для разных значений Q_1 и γ при $M = 2$, $m = 0,5$, $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_1 = 0,1$, $\chi = 0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

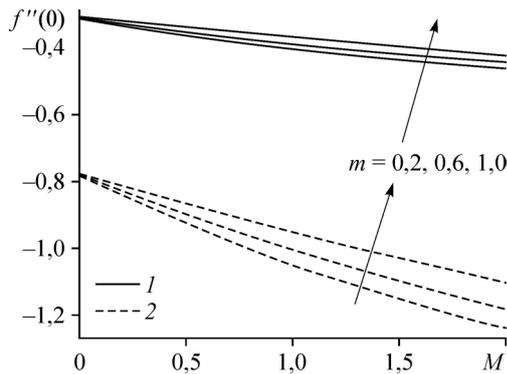


Рис. 21. Зависимость коэффициента продольного поверхностного трения от M для разных значений m и γ при $N_B = 0,3$, $N_T = 0,3$, $Pr = 2$, $Sc = 3$, $Q_0 = 0,1$, $Q_1 = 0,1$, $\chi = 0,2$.
Обозначения линий см. на рис. 2.

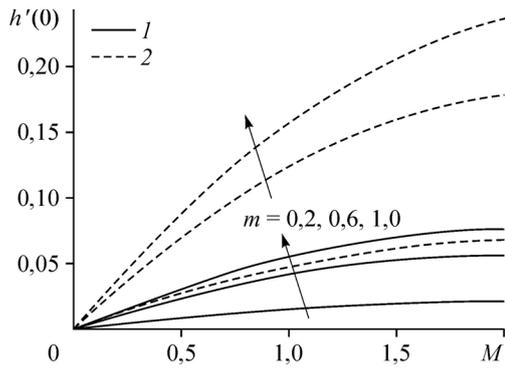


Рис. 22. Зависимость коэффициента поперечного поверхностного трения от M для разных значений m и γ при $N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1, \chi = 0,2$. Обозначения линий см. на рис. 2.

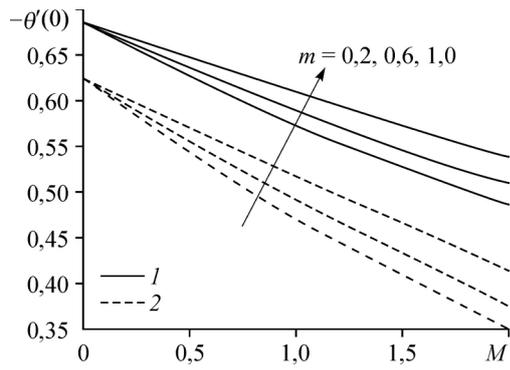


Рис. 23. Зависимость локального числа Нуссельта от M для разных значений m и γ при $N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1, \chi = 0,2$. Обозначения линий см. на рис. 2.

концентрации наночастиц $\phi(\eta)$ в области течения. Видно, что концентрация наночастиц увеличивается с поглощением тепла ($Q_0 > 0$), но уменьшается с выделением тепла ($Q_0 < 0$) вблизи поверхности, однако эффект меняется на противоположный в остальной части пограничного слоя. Изменение распределений температуры и концентрации наночастиц с зависящим от температуры внутренним тепловыделением ($Q_1 > 0$) или поглощением ($Q_1 < 0$) показано на рис. 19–20. Можно заметить, что влияние Q_1 на поля температуры и концентрации наночастиц аналогично влиянию пространственно-зависимого внутреннего тепловыделения или поглощения Q_0 . Также видно, что влияние внутренних параметров тепловыделения/поглощения Q_0 и Q_1 на распределения температуры и концентрации в ньютоновской жидкости больше по сравнению с жидкостью Кассона. На рис. 21–24 представлены изменения продольного коэффициента поверхностного трения $f''(0)$, поперечного коэффициента поверхностного трения $h'(0)$, локальных

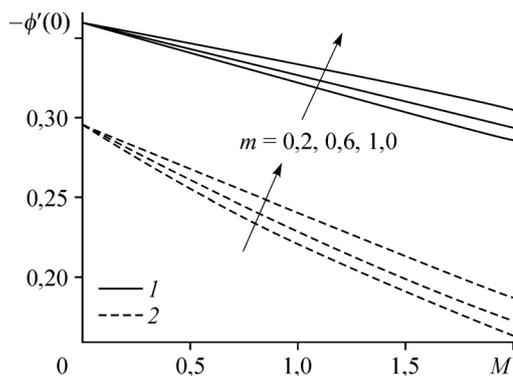


Рис. 24. Зависимость локального числа Шервуда от M для разных значений m и γ при $N_B = 0,3, N_T = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1, \chi = 0,2$. Обозначения линий см. на рис. 2.

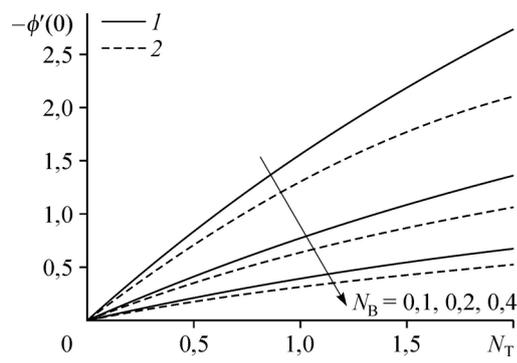


Рис. 25. Зависимость локального числа Шервуда от N_T для разных значений N_B и χ при $M = 2, m = 0,5, \gamma = 0,3, Pr = 2, Sc = 3, Q_0 = 0,1, Q_1 = 0,1$. 1 — $\chi = 0,0$ (прилипание), 2 — $\chi = 0,29$ (скольжение).

чисел Нуссельта ($-\theta'(0)$) и Шервуда ($-\phi'(0)$) в зависимости от параметра M при различных значениях m для ньютоновской жидкости и жидкости Кассона. Видно, что $f''(0)$, ($-\theta'(0)$) и ($-\phi'(0)$) уменьшаются с ростом магнитного параметра M , тогда как для $h'(0)$ при увеличении M наблюдается противоположная тенденция. Напротив, коэффициенты продольного и поперечного трения, локальные числа Нуссельта и Шервуда являются возрастающими функциями параметра Холла m для ненулевых значений магнитного поля. Это связано с тем, что эффективная проводимость уменьшается с увеличением параметра Холла и, следовательно, снижается магнитная сила демпфирования. Отметим, что влияние параметра Холла на $f''(0)$, $h'(0)$, ($-\theta'(0)$) и ($-\phi'(0)$) исчезает при отсутствии магнитного поля ($M = 0$). При росте M влияние m увеличивается, причем оно становится более выраженным при больших значениях M . Таким образом, из рис. 21–24 следует, что $f''(0)$, $h'(0)$, ($-\theta'(0)$) и ($-\phi'(0)$) в случае ньютоновской жидкости зависят от магнитного параметра и параметра Холла в большей степени, чем в случае жидкости Кассона. Изменения локального числа Шервуда ($-\phi'(0)$) в зависимости от параметра термофореза N_T для разных значений параметра броуновского движения N_B изображены на рис. 25 как для случая скольжения, так и для случая прилипания. Очевидно, что влияние параметров N_B и N_T на локальное число Шервуда совершенно противоположно, но влияние N_B оказывается заметнее для больших значений N_T . Кроме того, локальное число Шервуда уменьшается с увеличением коэффициента скольжения, и эта зависимость менее выражена для более высоких значений N_B .

Заключение

Проведено численное исследование течения магнитогидродинамического пограничного слоя наножидкости Кассона, индуцированного растягивающейся поверхностью, с использованием модели Буонджиорно с учетом граничных условий скольжения, неоднородного тепловыделения/поглощения и эффекта Холла. Для решения уравнений подобия при различных значениях определяющих параметров использовался метод пристрелки. Проанализировано и представлено на графиках влияние определяющих параметров на поля течения, температуру и концентрацию наночастиц, а также на локальные коэффициенты поверхностного трения, числа Нуссельта и Шервуда. Сравнение полученных численных результатов с данными других авторов показали хорошее согласование. Основные результаты этого исследования сформулированы ниже.

1. Эффект Холла может быть использован для ускорения осевой и вторичной скоростей, в то время как он оказывает неблагоприятное воздействие на поля температуры и концентрации наночастиц.
2. Влияние параметра Холла заключается в увеличении локальных чисел Нуссельта и Шервуда и локальных коэффициентов поверхностного трения для первичного и вторичного потоков.
3. Поля температуры и концентрации наночастиц усиливаются за счет термофореза и параметров скольжения.
4. Поле концентрации наночастиц уменьшается с увеличением параметра броуновского движения.
5. Компоненты первичной и вторичной скоростей с соответствующей толщиной пограничного слоя уменьшаются с увеличением параметра скольжения.
6. Температура увеличивается в случае тепловыделения, тогда как при теплопоглощении наблюдается противоположная тенденция.
7. Влияние параметров тепловыделения/поглощения имеет тенденцию к снижению вблизи растягивающегося слоя, тогда как в остальной части пограничного слоя наблюдается обратная тенденция.

8. Увеличение магнитного параметра уменьшает осевое поверхностное трение и величину локальных чисел Нуссельта и Шервуда, тогда как для поперечного поверхностного трения наблюдается противоположная тенденция.

9. Локальное число Шервуда уменьшается с увеличением параметра броуновского движения, и наоборот, противоположное влияние наблюдается с увеличением параметра термофореза.

10. Локальное число Шервуда уменьшается с увеличением параметра скольжения.

Список обозначений

| | |
|---|--|
| b — положительная константа, | Sc — число Шмидта, равное отношению кинематической вязкости к коэффициенту броуновской диффузии, |
| B_0 — постоянное магнитное поле, $\text{кг}/(\text{с}^2\text{А})$, | Sh_x — локальное число Шервуда, |
| C — концентрация наночастиц, | Pr — число Прандтля, |
| C_∞ — концентрация наночастиц в свободном потоке, | q''' — неравномерное тепловыделение/поглощение, $\text{Вт}/\text{м}^3$, |
| C_{fx}, C_{fz} — локальные коэффициенты поверхностного трения в соответствующих направлениях, | Q_0 — коэффициент пространственно-зависимого внутреннего тепловыделения/поглощения, |
| c — удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, | Q_1 — коэффициент температурозависимого внутреннего тепловыделения/поглощения, |
| D_B — коэффициент броуновской диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$, | T — температура жидкости, К , |
| D_T — коэффициент термодиффузии, $\text{м}^2/\text{с}$, | T_w — температура на растягивающейся поверхности, К , |
| $f(\eta)$ — безразмерная функция тока, | T_∞ — температура в свободном потоке, К , |
| k — теплопроводность жидкости, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, | u, v, w — компоненты скорости вдоль осей x, y, z , $\text{м}/\text{с}$, |
| M — магнитный параметр, | x, y, z — декартовы координаты, м , |
| m — параметр Холла, | L — длина скольжения (slip length). |
| N_B — параметр броуновского движения, | |
| N_T — параметр термофореза, | |
| Nu_x — локальное число Нуссельта, | |

Греческие символы

| | |
|--|--|
| α — температуропроводность базовой жидкости, $\text{м}^2/\text{с}$, | μ — динамическая вязкость, $\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$, |
| τ — относительный коэффициент теплоемкости наночастиц/базовой жидкости, | ρ_f — плотность жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$, |
| γ — параметр Кассона, | $(\rho c)_f$ — объемная теплоемкость жидкости, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{м}^3)$, |
| χ — параметр скольжения, | $(\rho c)_p$ — эффективная объемная теплоемкость материала наночастиц, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{м}^3)$, |
| η — независимая переменная подобия, | ν — кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$, |
| θ — безразмерная температура, | ϕ — нормализуемая объемная доля наночастиц. |

Нижние индексы

w — величины у стенки,

∞ — величины на расстоянии от поверхности.

Список литературы

1. Choi S.U.S. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticle // Developments and applications of non-Newtonian flows / Ed. D.A. Siginer, H.P. Wang. ASME. 1995. FED-Vol. 231/MD-Vol. 66. P. 99–105.
2. Eastman J.A., Choi S.U.S., Li S., Yu W., Thompson L.J. Anomalous increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nano-fluids containing copper nano-particles // Applied Physics Letters. 2001. Vol. 78. P. 718–720.
3. Choi S.U.S., Zhang Z.G., Yu W., Lockwood F.E., Grulke E.A. Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions // Applied Physics Letters. 2001. Vol. 79. P. 2252–2254.
4. Buongiorno J. Convective transport in nanofluids // ASME. J. Heat Transfer. 2006. Vol. 128, No. 3. P. 240–250.
5. Aziz A., Khan W.A. Natural convective boundary layer flow of a nanofluid past a convectively heated vertical plate // Int. J. Thermal Sci. 2012. Vol. 52. P. 83–90.
6. Khan W.A., Pop I. Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet // Int. J. Heat Mass Transfer. 2010. Vol. 53. P. 2477–2483.
7. Uddin M.J., Bég O.A., Aziz A., Ismail A.I.M. Group analysis of free convection flow of a magnetic nanofluid with chemical reaction // Math. Problems Engng. 2015. Vol. 2015. P. 621503-1–621503-11.

8. **Khan W.A., Pop I.** Free convection boundary layer flow past a horizontal flat plate embedded in a porous medium filled with a nanofluid // ASME. J. Heat Transfer. 2011. Vol. 133, No. 9. P. 9–13.
9. **Affify A.A., Bazid M.A.A.** Effects of variable fluid properties on the natural convective boundary layer flow of a nanofluid past a vertical plate: numerical study // J. Comput. Theoret. Nanoscience. 2014. Vol. 11. P. 210–218.
10. **Makinde O.D., Aziz A.** Boundary layer flow of a nano fluid past a stretching sheet with a convective boundary condition // Int. J. Thermal Sci. 2011. Vol. 50. P. 1326–1332.
11. **Bai Y., Liu X., Zhang Y., Zhang M.** Stagnation-point heat and mass transfer of MHD Maxwell nanofluids over a stretching surface in the presence of thermophoresis // J. Molecular Liquids. 2016. Vol. 224. P. 1172–1180.
12. **Casson N.** A flow equation for pigment oil suspensions of the printing ink type // Rheology of Disperse Systems / Ed. C.C. Mill. Oxford: Pergamon Press, 1959. P. 84–102.
13. **Abolbashari M.H., Freidoonimehr N., Nazari F., Rashidi M.M.** Analytical modeling of entropy generation for Casson nano-fluid flow induced by a stretching surface // Advanced Powder Technol. 2015. Vol. 26. P. 542–552.
14. **El-Aziz M.A.** Effects of Hall current on the flow and heat transfer of a nanofluid over a stretching sheet with partial slip // Int. J. Modern Phys. C. 2013. Vol. 24. P. 1350044–1350065.
15. **Abdel-Wahed M.S.** Rotating ferro-nanofluid over stretching plate under the effect of Hall current and Joule heating // J. Magnetism Magnetic Materials. 2017. Vol. 429. P. 287–293.
16. **Maxwell J.C.** On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1879. Vol. 170. P. 231–256.
17. **Beavers G.S., Joseph D.D.** Boundary conditions at a numerically permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. P. 197–207.
18. **Affify A.A., Uddin M.J., Ferdows M.** Scaling group transformation for MHD boundary layer flow over permeable stretching sheet in presence of slip flow with Newtonian heating effects // Appl. Math. Mech. 2014. Vol. 35. P. 1375–1386.
19. **Si X., Li H., Shen Y., Zheng L.** Effects of nonlinear velocity slip and temperature jump on pseudo-plastic power-law fluid over moving permeable surface in presence of magnetic field // Appl. Math. Mech. 2017. Vol. 38. P. 333–342.
20. **Sutton G.W., Sherman A.** Engineering magnetohydrodynamics. New York: McGraw-Hill, 1965. 548 p.
21. **Eldabe N.T.M., Salwa M.G.E.** Heat transfer of MHD non-Newtonian Casson fluid flow between two rotating cylinders // J. Phys. Soc. Japan. 1995. Vol. 64. P. 41–64.
22. **Haq R.U., Nadeem S., Khan Z.H., Okedayo T.G.** Convective heat transfer and MHD effects on Casson nanofluid flow over a shrinking sheet // Central Europ. J. Phys. 2014. Vol. 12, No. 12. P. 862–871.
23. **Mabood F., Ibrahim S.M., Rashidi M.M., Shadloo M.S., Lorenzini G.** Non-uniform heat source/sink and Soret effects on MHD non-Darcian convective flow past a stretching sheet in a micropolar fluid with radiation // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. Vol. 93. P. 674–682.

*Поступила в редакцию 13 ноября 2017 г.,
после переработки — 10 апреля 2018 г.,
принята к публикации 23 мая 2018 г.*