

УДК 550.834

Разностная схема для волнового уравнения

А.Ф. Мастрюков

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: maf@omzg.sccs.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.

Мастрюков А.Ф. Разностная схема для волнового уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 71–82.

В работе рассматривается численное решение волнового уравнения. В алгоритме решения используются оптимальные параметры, значения которых получаются с применением преобразования Лагерра по времени к волновому уравнению. В разностную схему уравнения 2-го порядка аппроксимации вводятся дополнительные параметры. Оптимальные значения этих параметров получаются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца. После проведения обратного преобразования Лагерра в уравнении для гармоник получается дифференциально-разностное волновое уравнение с оптимальными параметрами. Оно разностное по пространственным переменным и дифференциальное по времени. Предлагается итерационный алгоритм решения дифференциально-разностного волнового уравнения с оптимальными параметрами. Рассмотрены 1- и 2-мерные случаи уравнений. Приводятся результаты численных расчетов дифференциально-разностных уравнений. Показано, что использование разностных схем с оптимальными параметрами ведет к повышению точности решения уравнений.

DOI: 10.15372/SJNM20240106

EDN: CWINFC

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, конечно-разностный метод, оптимальный, точность, метод Лагерра.

Mastryukov A.F. Difference scheme for the wave equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 71–82.

The paper deals with a numerical solution of the wave equation. The solution algorithm uses optimal parameters which are obtained by using Laguerre transform in time for the wave equation. Additional parameters are introduced into a difference scheme of 2nd-order approximation for the equation. The optimal values of these parameters are obtained by minimizing the error of a difference approximation of the Helmholtz equation. Applying the inverse Laguerre transform in the equation for harmonics, a differential-difference wave equation with the optimal parameters is obtained. This equation is difference in the spatial variables and differential in time. An iterative algorithm for solving the differential-difference wave equation with the optimal parameters is proposed. 2-dimensional and 1-dimensional equations are considered. The results of numerical calculations of the differential-difference equations are presented. It is shown that the difference schemes with the optimal parameters give an increase in the accuracy of solving the equations.

Keywords: differential-difference, wave equation, optimal, accuracy, Laguerre's method.

Введение

Важным показателем качества численного алгоритма является точность получаемого решения уравнений [1–4]. Существуют различные способы повышения точности аппроксимации дифференциальных уравнений [4–6] и повышения точности решения уравнений, например использование разностных схем более высокого порядка аппроксимации или

построение разностных схем, минимизирующих погрешность дисперсионного соотношения (dispersion-relation-preserving) [7]. Ко второму типу схем относятся так называемые оптимальные разностные схемы.

В работе оптимальными называются разностные схемы, параметры которых определяются минимизацией некого функционала. В данной статье параметры определяются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца.

В работе [8] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В уравнении проводится преобразование Фурье по временной переменной. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для гармоники Фурье вводятся три дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией интегральной погрешности численного решения на точном аналитическом решении. Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено в работе [9] путем введения средних значений в пространственные производные. Здесь оптимизация проводилась по 4-м параметрам.

В работах [10–12] такая методика построения оптимальных разностных схем была применена при решении уравнений с использованием спектрального преобразования Лагерра. В этих работах была рассмотрена оптимальная разностная схема 2-го порядка аппроксимации для решения уравнений Максвелла и для решения волнового уравнения, основанная на разложении Лагерра по временной переменной. Здесь оптимизация проводилась по 4-м параметрам.

В отличие от преобразования Фурье, при преобразовании Лагерра все переменные остаются действительными. Кроме этого, для многих функций их спектр Лагерра уже спектра Фурье. Это упрощает вычисления и сокращает время счета задачи.

Во всех этих случаях сначала решались уравнения для спектральных гармоник, и затем решение уравнений получались обратным преобразованием из спектральной области в действительную.

В настоящей работе рассматривается волновое уравнение, учитывающее релаксации параметров среды. Здесь преобразование Лагерра привлекается лишь для получения оптимальных параметров разностных схем. В разностных уравнениях для гармоник Лагерра с оптимальными параметрами проводится обратное преобразование Лагерра, и таким образом получается дифференциально-разностное уравнение. Это уравнение разностное по пространственным переменным и дифференциальное по времени. Полученные уравнения решаются конечно-разностным методом с итерациями по малым оптимальным параметрам.

Предлагаемые методы построения дифференциально-разностных уравнений являются простой модернизацией обычных уравнений, но они позволяют получить более точное решение уравнений.

В работе приведены результаты тестовых расчетов дифференциально-разностных уравнений с оптимальными параметрами. Рассмотрены 1- и 2-мерные постановки задачи.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать волновое уравнение вида

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} + \chi \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + S(t, x, z), \quad \frac{\partial m}{\partial t} = -\lambda m - \nu E, \quad (1)$$

в прямоугольной пространственной области $0 \leq x \leq L$, $0 \leq z \leq L$, где L — размер области, при нулевых граничных и начальных условиях:

$$E(t=0, x, z) = 0, \quad \frac{\partial E(t=0, x, z)}{\partial t} = 0, \quad m(t=0, x, z) = 0, \quad t \geq 0.$$

Здесь V — скорость волн, $S(t, x, z)$ — источник волн, γ — коэффициент поглощения. Величины γ , χ , ν являются функциями координат x , z . Переменная m учитывает зависимость параметров среды от времени.

Это уравнение описывает как распространение упругих волн, так и распространение электромагнитных волн. В первом случае E — это давление и V — это скорость упругих волн, во втором случае E — это напряженность электрического поля и V — это скорость электромагнитных волн.

К этому уравнению можно свести систему двумерных уравнений Максвелла [13, 14]

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + \varepsilon_s m + J_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{m}{\tau_D} - \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D}\right) E_y, \quad (5)$$

где $H = (H_x, H_y, H_z)$ — напряженность магнитного поля, $E = (E_x, E_y, E_z)$ — напряженность электрического поля, $J = (J_x, J_y, J_z)$ — ток внешнего источника, ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость.

В этих уравнениях учитывается зависимость диэлектрической проницаемости и проводимости среды от времени введением дополнительного уравнения для переменной m , содержащей времена релаксации электромагнитных параметров. Здесь введены эффективные значения диэлектрической проницаемости ε и проводимости σ :

$$\varepsilon = \varepsilon_s \frac{\tau_E}{\tau_D} + \sigma_s \tau_\sigma, \quad \sigma = \sigma_s + \varepsilon_s \frac{1}{\tau_D} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D}\right),$$

где ε_s — статическое значение диэлектрической проницаемости, τ_E — время релаксации напряженности электрического поля, τ_D — время релаксации электрической индукции, σ_s — статическое значение проводимости, τ_σ — время релаксации проводимости [1, 3].

В частном случае малых τ_E , τ_D , τ_σ , и $\tau_E/\tau_D \simeq 1$ получим $m = 0$, и эта система уравнений примет стандартный вид уравнений Максвелла [13, 14].

Продифференцировав по времени уравнение (2) и подставив в него выражения из уравнений (3) и (4), при $\mu = \text{const}$ получим для электрического поля E_y уравнение вида (1), где источник имеет вид $S(t, x, z) = -\mu \frac{\partial J_y}{\partial t}$.

Систему уравнений (2)–(5) можно использовать для оценки точности решения волнового уравнения (1).

Проведем преобразование Лагерра по времени [15] уравнений (1):

$$E_n = \int_0^\infty E(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (6)$$

$$E(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} E_n l_n^\alpha(ht), \quad (7)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра [15] степени n , α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра. В результате получим уравнение для n -й гармоники Лагерра

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial z^2} + S_n = \frac{h^2}{V^2} \left(\frac{1}{4} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) E_k \right) + \gamma h \left(\frac{1}{2} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k \right) + \\ \chi h \left(\frac{1}{2} m_n + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \right), \quad h \left(\frac{1}{2} m_n + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \right) = -\lambda m_n - \nu E_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим разностную аппроксимацию этого уравнения.

2. Аппроксимация уравнений

Заменим производные конечными разностями второго порядка аппроксимации и запишем уравнение (8) в разностном виде, используя средние значения гармоник Лагерра:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \frac{E_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j}}{\Delta z^2} + S_{n,i,j} \\ = \frac{h^2}{V^2} \left(\frac{1}{4} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) \langle E_k \rangle \right) + \\ \gamma h \left(\frac{1}{2} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle \right) + \chi h \left(\frac{1}{2} m_{n,i,j} + \sum_{k=0}^{n-1} m_{k,i,j} \right), \\ h \left(\frac{1}{2} m_{n,i,j} + \sum_{k=0}^{n-1} m_{k,i,j} \right) = -\lambda m_{n,i,j} - \nu \langle E_n \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь в правой части уравнения гармоники поля заменены средними значениями по 5-и точкам [10–12]:

$$\langle E_k \rangle = c E_{k,i,j} + d(E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) + g(E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1}), \quad (10)$$

где c, d, g — весовые множители, удовлетворяющие условию $c + 2d + 2g = 1$.

В разностных производных по z использованы [10–12] средние значения для поля вида

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1-\beta}{2} E_{n,i,j+1} + \beta E_{n,i,j} + \frac{1-\beta}{2} E_{n,i,j-1}, \quad (11)$$

и в разностных производных по x использованы средние значения вида

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1-\alpha}{2} E_{n,i+1,j} + \alpha E_{n,i,j} + \frac{1-\alpha}{2} E_{n,i-1,j}. \quad (12)$$

Разностное уравнение (9), содержащее дополнительные параметры α, β, c, d, g , аппроксимирует уравнение (8) со вторым порядком.

Подберем введенные параметры α, β, c, d, g таким образом, чтобы точность аппроксимации уравнения [10–12] была наиболее высокой.

3. Выбор оптимальных параметров

Уравнение (8) для нулевой гармоники поля $E = E_{0y}$ можно представить в виде одного уравнения Гельмгольца. Без учета источников уравнение (8) принимает простой вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = k_0^2 E, \quad k_0^2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2V^2} + \gamma - \frac{\chi\nu}{\frac{h}{2} + \lambda} \right). \quad (13)$$

В случае электромагнитных волн

$$k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left(\varepsilon \frac{h}{2} + \sigma \right).$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать [10–12], применяя средние значения поля, приведенные в предыдущем пункте:

$$\frac{\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1}}{\Delta x^2} = k_0^2 (c E_{k,i,j} + d(E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) + g(E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1})). \quad (14)$$

Уравнение (13) имеет точное решение

$$E = E_0 ch(k_x x) ch(k_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2, \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta.$$

Подставим это решение в разностное уравнение (14). После преобразований получим [10–12] уравнение $V^2(\theta, k) = 1$, где

$$V^2(\theta, k) = \left(\left((1-\alpha) ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) + \alpha \right) (ch(k \sin \theta) - 1) + r^2 ((1-\beta) ch(k \sin \theta) + \beta) \left(ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) - 1 \right) \right) / k^2 \left(c/2 + d \left(ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) + g(ch(k \sin \theta)) \right) \quad (15)$$

и $r = \Delta x / \Delta z$, $k = k_0 \Delta x$.

Будем искать параметры α, β, c, d, g , требуя максимально точного выполнения равенства $V^2(\theta, k) = 1$ в пределах допустимых значений θ, k . Для этого определим функционал

$$F(u) = F(\alpha, \beta, c, d, g) = \int \int (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk, \quad (16)$$

где $u = (\alpha, \beta, c, d, g)$ — вещественный вектор искомых параметров.

Пределы интегрирования по углу θ — отрезок $[0, \pi/2]$, пределы интегрирования по второй переменной — от $k = 0$ до $k = K$. Величина k определяет отношение шага разностной сетки Δx к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Брать величину верхнего предела интегрирования K значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Будем искать точку минимума функционала (16) при заданных значениях r, K по параметрам α, β, c, d, g .

Для минимизации функционала будем использовать итерационный метод Ньютона [16]. Он требует вычисления первой и второй производных функционала $F(u)$. Производные $F(u)$ по параметрам α, β, c, d, g легко вычисляются, т. к. выражение под интегралом и функция $V(\theta, k)$ имеют явный вид.

Минимальное значение функционала $F(u)$ при заданных значениях r, K обозначим $I(r, K) = \min F(u)$. Значения параметров α, β, c, d, g в точке минимума функционала $F(u)$ будем называть оптимальными параметрами. В случае одномерного волнового уравнения легко получить аналог уравнения (15). Для этого в (15) достаточно положить $\alpha = 1, \beta = 1, \theta = 0, \Delta x = \Delta z, r = 1, g = 0$, оставив интегрирование в (16) только по k .

В таблице приведены некоторые оптимальные значения параметров и интеграла $I(r, K)$ в зависимости от соотношения шагов разностной сетки $r = \Delta x / \Delta z$ и верхнего предела K в интеграле (16) для трех разных случаев.

Часть из них приведены в работах [10–12]. Там они указаны с точностью до 4-х, 5-ти знаков, здесь они указаны с точностью до 5-ти, 6-ти знаков. Для дифференциально-разностных уравнений естественно иметь максимально точные значения параметров уравнений.

Таблица.

α	β	c	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.91204	0.80209	0.66885	0.082963	0.082613	4.0427e–06	1.5	0.5
0.91604	0.81110	0.67522	0.081873	0.080517	5.9645e–05	1.5	1.0
0.92221	0.82497	0.68528	0.080132	0.077226	2.6459e–04	1.5	1.5
0.92987	0.84222	0.69829	0.077839	0.073014	6.9931e–04	1.5	2.0
1	1	0.76519	0.049635	0.067770	4.5674e–02	1.5	0.5
1	1	0.76738	0.050057	0.066255	4.2507e–02	1.5	1.0
1	1	0.77105	0.050626	0.063847	3.7882e–02	1.5	1.5
1	1	0.77623	0.051171	0.060716	3.2569e–02	1.5	2.0
		0.83481	0.082595		6.8792e–06		0.5
		0.83911	0.080447		1.0078e–04		1.0
		0.84583	0.077083		4.4175e–04		1.5
		0.85442	0.072789		1.1476e–03		2.0

Первые четыре строчки таблицы получены при минимизации по 5-ти параметрам α, β, c, d, g и при $r = \Delta x / \Delta z = 1.5$.

Следующие четыре строчки получены при минимизации по 3-м параметрам c, d, g , также при $r = \Delta x / \Delta z = 1.5$, но в отсутствие усреднения в пространственных производных, т. е. при $\alpha = 1, \beta = 1$.

Последние четыре строчки таблицы соответствуют одномерному случаю. Здесь минимизация проводилась по 2-м параметрам c, d .

Малые значения $K < 0.5$ соответствуют слабо меняющимся решениям. В таблице приведены значения параметров при $0.5 < K < 2$. В этой области оптимальное значение интеграла $I(r, K)$ растет с ростом K в первом и третьем случаях, в втором случае значение интеграла $I(r, K)$ падает с ростом K .

Наименьшее значение $I(r, K)$ достигается в первом случае при минимизации по 5-ти параметрам. Несколько больше значения $I(r, K)$ в третьем случае, который относится к одномерным уравнениям. Во втором случае, при минимизации по 3-м параметрам c, d, g , величина интеграла $I(r, K)$ более чем на порядок превышает соответствующие величины в других двух случаях.

Из значений $I(r, K)$ следует, что применение оптимальных параметров наиболее эффективно в случае оптимизации по 5-ти параметрам α, β, c, d, g и в одномерном случае, а наименее эффективно во втором случае.

Если в системе уравнений (9) провести обратное преобразование Лагерра, то с учетом оптимальных параметров уравнения системы примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \frac{\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j}}{\Delta z^2} + S_{n,i,j} \\ &= \frac{1}{V^2} \left(c \frac{\partial^2 E_{i,j}}{\partial t^2} + d \left(\frac{\partial^2 E_{i+1,j}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_{i-1,j}}{\partial t^2} \right) + g \left(\frac{\partial^2 E_{i,j+1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_{i,j-1}}{\partial t^2} \right) \right) + \\ & \quad \gamma \left(c \frac{\partial E_{i,j}}{\partial t} + d \left(\frac{\partial E_{i+1,j}}{\partial t} + \frac{\partial E_{i-1,j}}{\partial t} \right) + g \left(\frac{\partial E_{i,j+1}}{\partial t} + \frac{\partial E_{i,j-1}}{\partial t} \right) \right) + \chi \frac{\partial m_{i,j}}{\partial t}, \\ & \frac{\partial m_{i,j}}{\partial t} = -\lambda m_{i,j} - \nu \left(c E_{k,i,j} + d (E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) + g (E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1}) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Это система дифференциально-разностных уравнений. Они разностные по пространству и дифференциальные по времени.

Значения оптимальных параметров зависят только от соотношения пространственных шагов разностной схемы. В этом смысле они являются универсальными для системы дифференциально-разностных уравнений.

Из метода получения оптимальных параметров следует, что этот метод легко распространяется на 3-мерный случай уравнений.

Из таблицы видно, что параметры d и g значительно меньше параметра c . Для первого случая (первые четыре строчки таблицы) разница в 8 или 9 раз. Для двух последних случаев разница в значениях больше чем в 10 раз. Поэтому в первом уравнении системы (17) производные по времени с параметрами d и g являются малой поправкой. Учитывая это, можно использовать итерационный алгоритм численного решения системы дифференциально-разностных уравнений.

Возможны различные варианты формулы (10) усреднения $\langle E_k \rangle$. Таких вариантов не менее десятка. В общем случае среднее $\langle E_k \rangle$ можно представить в виде

$$\langle E_k \rangle = c E_{k,i,j} + \sum_m s_m \sum_{p,q} E_{k,p,q}. \quad (18)$$

Если параметры s_m значительно меньше параметра c , то при итерационном методе учета малых поправок в сумме (18) можно использовать большое количества пространственных точек.

В работе применялся метод простой итерации, где на первом шаге решалась система уравнений при $d = 0, g = 0$. Здесь для решения использовалась простая 3-х слойная

явная схема “крест”. На следующих шагах полученные на предыдущем шаге значения электрического поля $E_{i,j}$ использовались для аппроксимации производных по времени при параметрах d и g со вторым порядком.

В проведенных расчетах выполнялось 5–7 итераций.

Описанный итерационный алгоритм очень удобен при его практической реализации. Учет оптимальных параметров состоит в добавлении в программу решения волнового уравнения около двух десятков операторов (строк). Это составляет всего несколько первых процентов от размера программы.

Кроме этого, такой итерационный алгоритм позволяет использовать разное число оптимальных параметров без существенного изменения алгоритма и размера программы.

4. Результаты численных расчетов

Решение уравнения (1) конечно-разностным методом 2-го порядка аппроксимации с оптимальными параметрами (17) будем сравнивать с решением этих уравнений конечно-разностным методом 4-го порядка аппроксимации по пространству без оптимальных параметров. В обоих случаях по времени будем использовать 2-й порядок аппроксимации.

Источник тока брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s), \quad f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (19)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением

$$D(t) = \frac{\int_0^\infty |E_y(z, t) - E_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^\infty |E_{0y}(z, t)| dz}, \quad (20)$$

здесь $E_y = E$ — решение уравнений (1), полученное с использованием конечно-разностной схемы с оптимальными параметрами (17), E_{0y} — решение уравнений (1), полученное с использованием конечно-разностной схемы 4-го порядка аппроксимации. На рисунках, приведенных ниже, решение этой конечно-разностной схемой показано сплошной линией.

На рис. 1 показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y — компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Точками внизу показано расположение слоя в среде. Сплошная линия соответствует решению уравнений конечно-разностной схемой 4-го порядка аппроксимации. Показано прохождение импульсом через левую границу слоя. Шаги разностной схемы $\Delta x = 0.05$, $\Delta x/\Delta z = 1.5$. На рисунке штрихованная линия соответствует решению обычной неоптимальной разностной схемой 2-го порядка. Указана величина погрешности $D1$ для этого решения.

На этом же рис. 1 приведено решение оптимальной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации 5-ю параметрами (17) при $\alpha = 0.92987$, $\beta = 0.84222$, $A = 0.69829$, $d = 0.077839$, $g = 0.073014$, $r = \Delta x/\Delta z = 1.5$, $K = 2$ (4-я строка таблицы). Для него также указана величина погрешности решения $D2$. Графически это решение совпадает с решением разностной схемой 4-го порядка аппроксимации. Решение получено при пробеге импульсом расстояния в 10–12 длин волн.

Оптимальная схема (17) дает существенно более точное решение по сравнению с неоптимальной схемой. Погрешности $D1$ и $D2$ отличаются более чем в 10 раз.

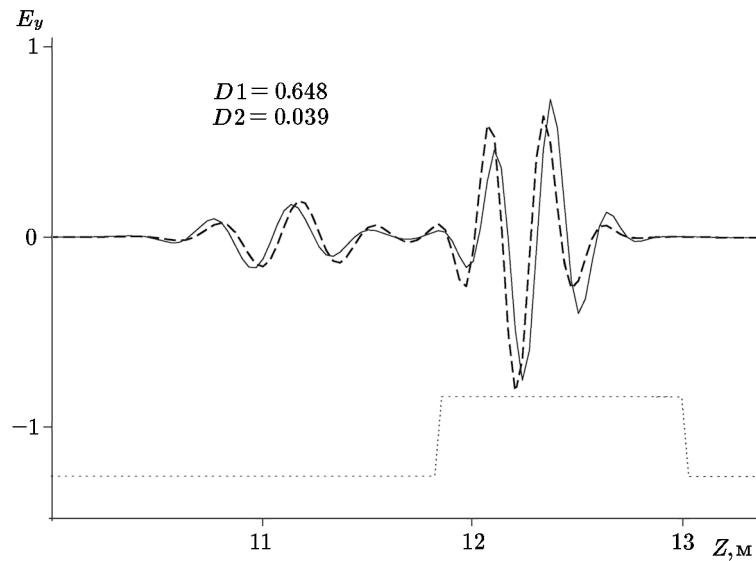


Рис. 1. Решение двумерных уравнений (1) неоптимальной схемой (штриховая линия) и оптимальной схемой (сплошная линия). Решение уравнений разностной схемой 4-го порядка аппроксимации и решение оптимальной разностной схемой графически совпадают

На рис. 2 приведена погрешность решения оптимальной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации 3-я параметрами (17) при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $A = 0.77623$, $d = 0.051171$, $g = 0.060716$, $r = \Delta x / \Delta z = 1.5$, $K = 2$ (8-я строка таблицы). Это схема дает более точное решение, чем схема без оптимальных параметров, она уступает по точности схеме с 5-ю параметрами.

На этом же рисунке приведено решение волнового уравнения в одномерном случае. Показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y — компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Точками показано расположение слоя в среде. Шаг разностной схемы $\Delta z = 0.033$.

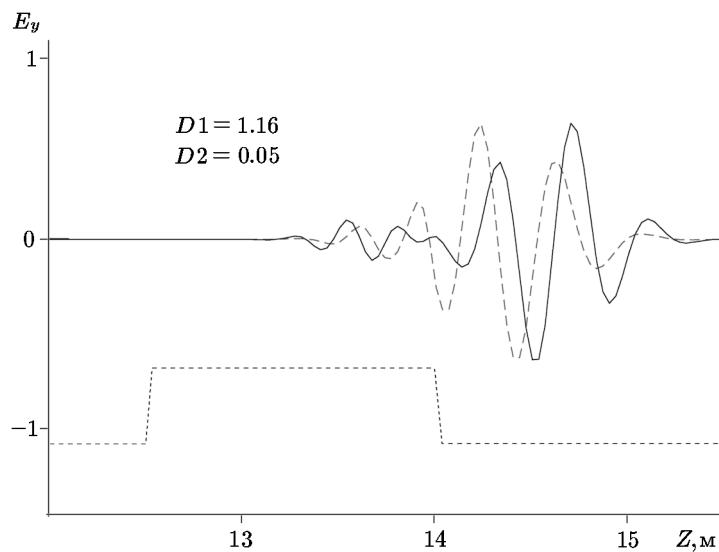


Рис. 2. Решение одномерных уравнений (1) неоптимальной схемой (штриховая линия) и оптимальной схемой (сплошная линия). Решение уравнений разностной схемой 4-го порядка аппроксимации и решение оптимальной разностной схемой графически совпадают

Сплошная линия соответствует решению уравнений конечно-разностной схемой 4-го порядка аппроксимации, штрихованная линия соответствует решению разностной схемой 2-го порядка без оптимальных параметров. Указана величина погрешности для этого решения $D1$, а также указана величина погрешности $D2$ для решения оптимальной схемой с двумя оптимальными параметрами, приведенными в таблице при $c = 0.83481$, $d = 0.082595$, $K = 0.5$.

Решение оптимальной схемой графически совпадает с решением разностной схемой 4-го порядка точности. Решение получено при пробеге импульсом расстояния в 15–17 длин волн. Показано прохождение импульсом через правую границу слоя.

Оптимальная схема дает существенно более точное решение по сравнению с неоптимальной схемой. Погрешности $D1$ и $D2$ отличаются более чем в 20 раз.

5. Заключение

Дифференциально-разностные уравнения, построенные с привлечением преобразования Лагерра, позволяют получать более точное решение волнового уравнения. Это верно для 1- и 2-мерных случаев. Решение получается методом простой итерации по малым оптимальным параметрам. Это позволяет использовать разное число оптимальных параметров в уравнениях. Оптимальные схемы с 5-ю оптимальными параметрами дают более точное решение, чем оптимальные схемы с 3-я оптимальными параметрами. Оптимальные схемы являются простой модернизацией обычных неоптимальных разностных схем, но их применение позволяет получать более точное решение задачи. Значения оптимальных параметров зависят только от отношения пространственных шагов разностной схемы и в этом смысле они являются универсальными, как и дифференциально-разностные уравнения.

Литература

1. Luebbers R., Hansberger F.P. FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Trans. Ant. Propog. — 1992. — Vol. 40. — P. 1297–1301.
2. Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K. Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics. — 1998. — Vol. 63. — P. 856–867.
3. Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K. A simplified Lax–Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // Geophysics. — 1999. — Vol. 64. — P. 1369–1377.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
5. Толстых А.И. Компактные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1990.
6. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // Докл. РАН. — 2010. — Т. 430, № 4. — С. 470–474.
7. Tam C.K., Webb J.C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Computational Physics. — 1993. — Vol. 107, № 2. — P. 262–281.
8. Jo C.H., Shin C., Suh H.S. An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // Geophysics. — 1996. — Vol. 61. — P. 529–537.
9. Chen J.B. An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // Geophysics. — 2012. — Vol. 77. — P. 201–210.

10. **Маstryukov А.Ф., Михайленко Б.Г.** Оптимальные разностные схемы для уравнений Максвелла при решении прямых задач электромагнитных зондирований // Геология и геофизика. — 2015. — Т. 56, № 9. — С. 1713–1722.
11. **Маstryukov А.Ф.** Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 385–399.
12. **Маstryukov А.Ф.** Разностные схемы на основе преобразования Лагерра // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 3. — С. 373–381.
13. **Ландau Л.Д., Lifshic E.М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
14. Электроразведка. Справочник геофизика / А.Г. Тархов, В.В. Федынский. — М.: Недра, 1980.
15. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
16. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 28 августа 2023 г.
После исправления 13 ноября 2023 г.
Принята к печати 19 ноября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Trans. Ant. Propog. — 1992. — Vol. 40. — P. 1297–1301.
2. **Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K.** Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics. — 1998. — Vol. 63. — P. 856–867.
3. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K.** A simplified Lax–Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // Geophysics. — 1999. — Vol. 64. — P. 1369–1377.
4. **Golub Dzh., Van Loun Ch.** Matrichnye vychisleniya. — M.: Mir, 1999.
5. **Tolstykh A.I.** Kompaktnye skhemy i ikh primenie v zadachakh aerogidrodinamiki. — M.: Nauka, 1990.
6. **Rogov B.V., Mikhailovskaya M.N.** Bikompaktnye skhemy chetvertogo poryadka approksimacii dlya giperbolicheskikh uravnenii // Dokl. RAN. — 2010. — Т. 430, № 4. — С. 470–474.
7. **Tam C.K., Webb J.C.** Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Computational Physics. — 1993. — Vol. 107, № 2. — P. 262–281.
8. **Jo C.H., Shin C., Suh H.S.** An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // Geophysics. — 1996. — Vol. 61. — P. 529–537.
9. **Chen J.B.** An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // Geophysics. — 2012. — Vol. 77. — P. 201–210.
10. **Mastryukov A.F., Mikhailenko B.G.** Optimal'nye raznostnye skhemy dlya uravnenii Maksvelла pri reshenii pramykh zadach elektromagnitnykh zondirovaniy // Geologiya i geofizika. — 2015. — Т. 56, № 9. — С. 1713–1722.
11. **Mastryukov A.F.** Optimal'nye raznostnye skhemy dlya volnovogo uravneniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 385–399.
12. **Mastryukov A.F.** Raznostnye skhemy na osnove preobrazovaniya Lagerra // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2021. — Т. 61, № 3. — С. 373–381.
13. **Landau L.D., Lifshic E.M.** Elektrordinamika sploshnykh sred. — M.: Nauka, 1982.
14. Elektrorazvedka. Spravochnik geofizika / A.G. Tarkhov, V.V. Fedynskii. — M.: Nedra, 1980.

15. Spravochnik po special'nym funkciyam / M. Abramovic, I. Stigan.—M.: Nauka, 1979.
16. **Vasil'ev F.P.** Chislennye metody resheniya ekstremal'nykh zadach.—M.: Nauka, 1980.