

УДК 532.59

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ С ВЫСОКИМИ ГРАДИЕНТАМИ ЭНЕРГИИ И ДАВЛЕНИЯ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА В ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Е. А. Кочурин

Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

E-mail: kochurin@ier.uran.ru

С использованием метода конформных преобразований проведено моделирование нелинейной динамики свободной поверхности идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости со значительной проницаемостью в сильном горизонтальном электрическом поле. Показано, что на начальных стадиях взаимодействия встречных периодических волн значительной амплитуды наблюдается прямой энергетический каскад, наличие которого приводит к переходу энергии в возмущения малых масштабов. Вследствие этого на поверхности жидкости формируются области с крутым волновым фронтом, в которых динамическое давление и давление электрического поля претерпевают разрыв. Показано, что образование областей с большими градиентами электрического поля и скорости жидкости сопровождается опрокидыванием поверхностных волн; величина углов наклона границы стремится к значению, равному 90° , а кривизна поверхности неограниченно увеличивается.

Ключевые слова: свободная поверхность, нелинейные волны, электрическое поле, электрогидродинамика, опрокидывание волн, жидкие диэлектрики.

DOI: 10.15372/PMTF20180110

Введение. Известно, что внешнее электрическое поле, направленное по касательной к невозмущенной поверхности жидкости, оказывает на нее стабилизирующее воздействие [1]. Возможность подавления таких гидродинамических неустойчивостей, как неустойчивость Рэля — Тейлора или Кельвина — Гельмгольца, анализировалась, например, в работах [2, 3]. В работе [4] обнаружено, что в отсутствие дестабилизирующих факторов нелинейные волны произвольной формы могут распространяться без искажений по поверхности непроводящей жидкости со значительной диэлектрической проницаемостью в направлении действия приложенного сильного тангенциального электрического поля и противоположном ему направлению. В работе [5] данный результат обобщен для слабонелинейных волн на границе двух несмешивающихся жидкостей. В [6] показано, что взаимодействие локализованных нелинейных волн на свободной границе жидкости является упругим (энергия и импульс каждой волны сохраняются) и в случае уединенных волн — относительно слабым.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 0389-2015-0023 при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-38-60002_мол_а_дк, 16-08-00228_а, 17-08-00430_а), Президиума УрО РАН (коды проектов 15-8-2-8, 18-2-2-15) и Совета по грантам Президента РФ (грант № СП-132.2016.1).

© Кочурин Е. А., 2018

В настоящей работе рассматривается взаимодействие периодических встречных волн значительной амплитуды. Для моделирования динамики непроводящей жидкости используется метод на основе конформного преобразования области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость, предложенный в [7] для описания динамики нелинейных волн на поверхности жидкости в поле силы тяжести. Показано, что на начальной стадии взаимодействия периодических волн возникает так называемый прямой каскад энергии [8], приводящий к возбуждению гармоник с малой длиной волны, т. е. наблюдается переход энергии в возмущения малых масштабов. При возбуждении гармоник из высокочастотной части спектра на границе жидкости формируются области с большими плотностями энергии и градиентами электрического поля.

1. Уравнения движения. Рассмотрим потенциальное течение несжимаемой идеальной диэлектрической (непроводящей) жидкости, имеющей бесконечную глубину и свободную поверхность и помещенной во внешнее однородное горизонтальное электрическое поле. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $y = 0$ (ось x прямоугольной системы координат лежит в этой плоскости, ось y направлена по нормали к ней). Пусть функция $\eta(x, t)$ задает отклонение границы от плоской поверхности, т. е. уравнение $y = \eta$ определяет профиль поверхности. Будем полагать, что напряженность электрического поля направлена по оси x и по абсолютной величине равна E .

Рассмотрим случай, когда диэлектрическая проницаемость жидкости велика: $\varepsilon \gg 1$. Согласно [4, 6] в этом пределе нормальная компонента напряженности электрического поля (по отношению к свободной поверхности) много меньше тангенциальной компоненты. Следовательно, силовые линии поля внутри жидкости направлены по касательной к ее поверхности. Тогда задачу о распределении поля в жидкости можно решить без учета распределения поля над ее поверхностью. Запишем соответствующие уравнения движения. Потенциал скорости жидкости ϕ и потенциал электрического поля φ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \phi_t + (\nabla \phi)^2 / 2 &= (P_E - P_0) / \rho, & y &= \eta(x, t); \\ \varphi_y - \eta_x \varphi_x &= 0, & y &= \eta(x, t), \\ \phi &\rightarrow 0, & \varphi &\rightarrow -Ex, & y &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости; P_E — электростатическое давление, для которого в пределе $\varepsilon \gg 1$ имеем $P_E \approx \varepsilon(\nabla \varphi)^2 / (8\pi)$; $P_0 \approx \varepsilon E^2 / (8\pi)$ — плотность энергии внешнего электрического поля в жидкости. Нестационарное уравнение Бернулли (1) приводится в предположении сильного поля (см. [4, 6]), в котором движение границы определяется электростатическими силами (капиллярные и гравитационные силы не учитываются). Уравнения движения замыкаются кинематическим соотношением

$$\eta_t = \phi_y - \eta_x \phi_x, \quad y = \eta(x, t).$$

Следует отметить, что в рамках этих уравнений линейные поверхностные волны распространяются бездисперсионно, без искажений, со скоростью $c = \sqrt{2P_0/\rho}$. Перейдем к безразмерным переменным:

$$\varphi \rightarrow \lambda c \varphi, \quad \phi \rightarrow \lambda E \phi, \quad \eta \rightarrow \lambda \eta, \quad x \rightarrow \lambda x, \quad y \rightarrow \lambda y, \quad t \rightarrow \lambda c^{-1} t,$$

где λ — характерная длина волны. В новых переменных скорость линейных волн равна единице.

По аналогии с работами [6, 7] проведем конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в параметрическую полуплоскость $-\infty < v \leq 0$ и $-\infty < u < +\infty$. В новых переменных уравнения Лапласа для потенциалов электрического поля и скорости можно решить аналитически, в результате исходная задача о движении жидкости может быть сведена к имеющей меньшую размерность $(1 + 1)$ задаче о движении ее свободной поверхности.

Форма поверхности жидкости задается параметрическими выражениями

$$y = Y(u, t), \quad x = X(u, t) = u - \hat{H}Y$$

(\hat{H} — интегральное преобразование Гильберта). Связь между функциями $\eta(x, t)$ и $Y(u, t)$ определяется неявным соотношением $Y(u, t) = \eta(u - \hat{H}Y)$.

Введем комплексные функции $Z = X + iY$, $\Phi = \Psi + i\hat{H}\Psi$, где $\Psi(u, t)$ — значение потенциала скорости на границе $v = 0$. Для проведения численного анализа перейдем к переменным Дьяченко [7]:

$$R = 1/Z_u, \quad V = i\Phi_u/Z_u.$$

В результате система уравнений принимает симметричный вид [6]

$$R_t = i(UR_u - U_uR), \quad V_t = i(UV_u - D_uR), \tag{2}$$

где $U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$; $D = \hat{P}(V\bar{V} - R\bar{R})$; $\hat{P} = (1 + i\hat{H})/2$ — оператор-проектор; черта над функциями R, V означает комплексное сопряжение.

Следует отметить, что величина $|R(u, t)|^2 = 1/J$, т. е. обратный якобиан конформного преобразования, имеет смысл плотности энергии электрического поля, или, в рассматриваемом случае, электростатического давления на границу жидкости. Модуль функции $V(u, t)$ определяет скорость жидкости на границе, следовательно, $|V(u, t)|^2$ — плотность кинетической энергии, или динамическое давление на границе.

2. Численный алгоритм. Как правило, для численного моделирования динамики жидкостей используются конечно-разностные схемы, такие как метод конечных разностей и метод конечных элементов. Данные методы достаточно эффективны и могут применяться для решения широкого круга задач (см., например, [9]). Однако непосредственное использование конечно-разностных схем для решения системы уравнений (2) осложняется тем, что она содержит сингулярный интегральный оператор \hat{P} , обладающий свойством

$$\hat{P}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-iku}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-iku}$$

(a_k — коэффициенты ряда Фурье некоторой функции $a(u)$). Заметим также, что операция дифференцирования в фурье-пространстве определяется следующим образом:

$$\partial_u\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-iku}\right) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik \cdot a_k e^{-iku}.$$

Следовательно, численное решение системы (2) целесообразно строить с использованием спектральных методов, т. е. функции аппроксимируются конечными рядами Фурье (граничные условия являются периодическими).

Приближенное решение находим в виде

$$R_n(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N R_k e^{-iku}, \quad V_n(u, t) = \sum_{k=1}^N V_k e^{-iku},$$

где R_k, V_k — спектральные функции. Функции R, V содержат только отрицательные гармоники в силу своей аналитичности в нижней комплексной полуплоскости. Используя теорему о свертке, операцию умножения $A \cdot B$ введем следующим образом:

$$A_n \cdot B_n = F^{-1}(A_k * B_k).$$

Здесь F^{-1} — обратное преобразование Фурье; знак “*” обозначает операцию циклической свертки. Во всех численных экспериментах интегрирование по времени проводится с помощью четырехшагового метода Рунге — Кутты.

3. Результаты численного моделирования и их обсуждение. Рассмотрим результаты численного моделирования, приведенные на рис. 1–4.

3.1. *Сравнение с точным решением.* Для того чтобы оценить точность используемых методов, сравним точное аналитическое решение и результаты, полученные с помощью численного расчета. Начальные условия зададим следующим образом:

$$R(u) = 1 + 0,5e^{-iu}, \quad V(u) = -0,5ie^{-iu}.$$

Точное решение, соответствующее данным условиям, описывает стационарное распространение плоской волны с пространственным и временным периодом $L = 2\pi$ в направлении, противоположном направлению действия электрического поля.

В первом численном эксперименте полное число гармоник равно $N = 1024$. Интегрирование по времени проводилось с шагом $\Delta t = 0,001$. Для того чтобы показать устойчивость численного решения, необходимо провести расчет на достаточно большом интервале времени. В рассматриваемом случае $T = 1000 \cdot 2\pi \approx 6283$.

Результаты численного эксперимента хорошо согласуются с результатами аналитического решения. Результаты расчетов показывают, что на всем временном интервале значительного увеличения амплитуды высших гармоник не происходит. На рис. 1, *а* представлен спектр функции R относительно конформной переменной u в различные моменты времени. Видно, что существенной является только первая гармоника. Поскольку исследуемая система является гамильтоновой, можно оценить точность вычислений. Относительная погрешность равна $\Delta H/H$, где H — полная энергия системы; ΔH — ее изменение. На

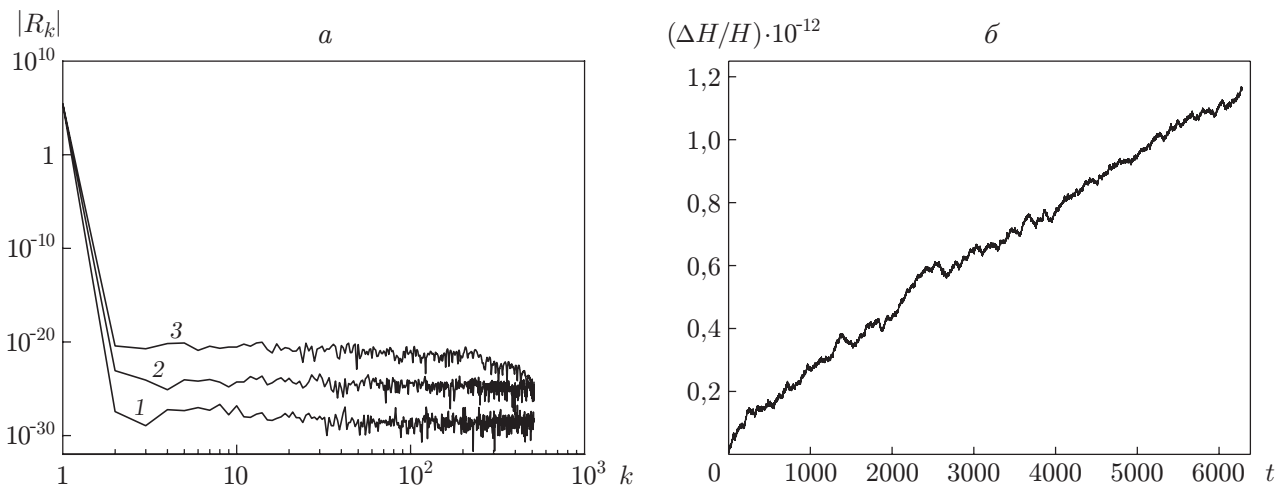


Рис. 1. Спектр функции $R(u, t)$ в различные моменты времени (*а*) и зависимость относительной погрешности вычислений от времени (*б*) для первого численного эксперимента:

1 — $t = 0$, 2 — $t = 100$, 3 — $t \approx 6283$

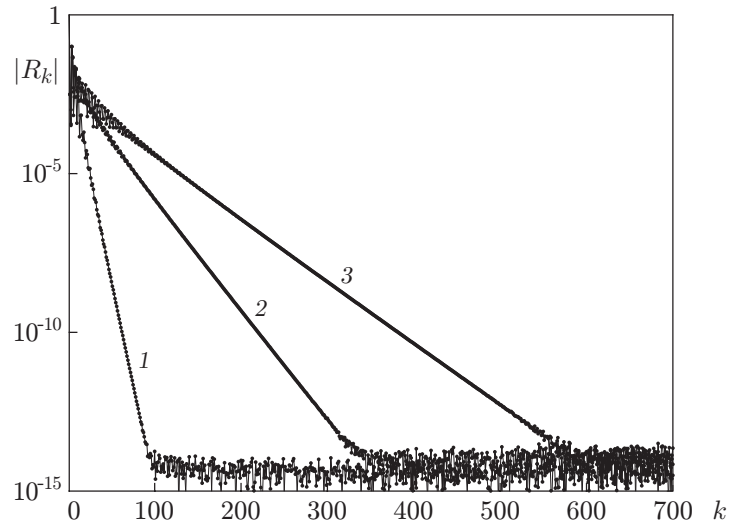


Рис. 2. Спектр функции $R(u, t)$ для второго численного эксперимента в различные моменты времени:
 1 — $t = 10$, 2 — $t = 75$, 3 — $t = 95$

рис. 1, б приведена зависимость $\Delta H/H$ от времени. Видно, что погрешность увеличивается очень медленно и в конце расчетного интервала $\Delta H/H \approx 10^{-12}$.

3.2. *Взаимодействие встречных волн.* В работе [6] показано, что взаимодействие встречных локализованных волн значительной амплитуды может приводить к их деформации, а многократные столкновения — к формированию на поверхности особых точек (заострений), в которых существенно увеличивается электрическое поле. Таким образом, при взаимодействии встречных локализованных волн наблюдается тенденция к переходу энергии в возмущения малых масштабов. Используемые в настоящей работе спектральные методы численного описания нелинейной динамики границы жидкости позволяют исследовать процесс перераспределения энергии по гармоникам и отследить эволюцию спектральных функций в широком диапазоне волновых чисел.

Итак, рассмотрим взаимодействие встречных периодических волн значительной амплитуды при начальных условиях

$$R(u) = 1 + 0,1 \exp(2iu) + 0,05 \exp(3iu), \quad V(u) = 0,1 \exp(2iu) - 0,05 \exp(3iu).$$

Параметры второго численного эксперимента зададим следующим образом: $N = 8192$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$, $L = 2\pi$. На рис. 2 в полулогарифмическом масштабе представлен спектр функции $R(u, t)$ в различные моменты времени. Видно, что динамика взаимодействующих волн существенно отличается от эволюции уединенной волны, спектр которой остается неизменным в течение всего расчетного периода. Вследствие нелинейного взаимодействия возникают волны с кратной длиной, которые также распространяются в противоположных направлениях. Дальнейшая эволюция приводит к тому, что профиль спектра функции R становится экспоненциальным. Наблюдаемый процесс возбуждения гармоник с большими волновыми числами представляет собой прямой каскад энергии.

В отсутствие сил вязкости диссипации энергии на малых масштабах не происходит. Это означает, что в результате перехода энергии в моды с малой длиной волны на границе жидкости могут формироваться области с высокой концентрацией энергии. На рис. 3 представлены форма поверхности и распределения электростатического и динамического (плотности кинетической энергии) давлений на границе жидкости в начальный момент

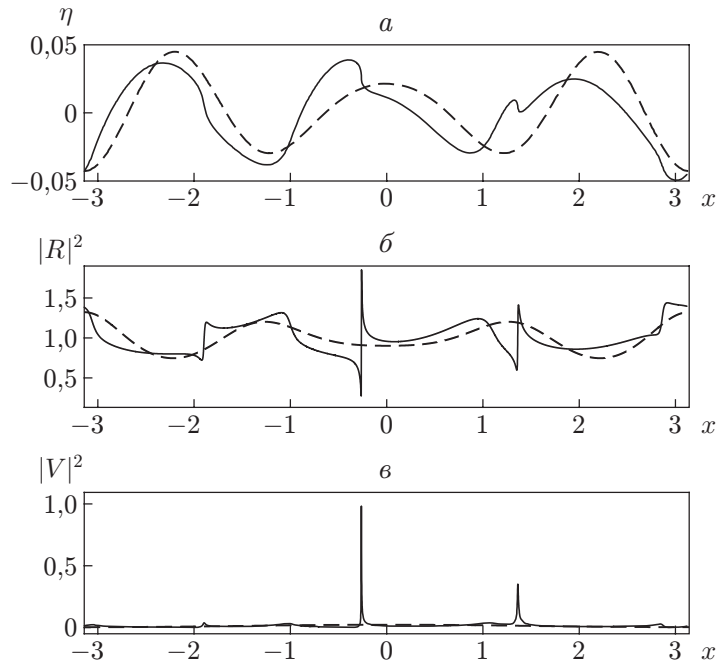


Рис. 3. Форма поверхности (а) и распределения электростатического давления (б) и динамического давления (в) на границе жидкости: штриховая линия — в начальный момент времени, сплошная — в конце расчетного периода

времени и в конце расчетного периода. Моделирование проводилось до тех пор, пока погрешность вычислений не достигала значения 10^{-6} , что составило $t \approx 149$, или приблизительно 24 периода. Видно, что в результате нелинейного взаимодействия на границе жидкости формируются области с крутым волновым фронтом. В этих точках электростатическое давление претерпевает разрыв, а плотность кинетической энергии увеличивается практически на порядок. Такое поведение подобно опрокидыванию простой волны Римана, наблюдающемуся в газовой динамике и приводящему к формированию ударной волны, в которой происходит скачок плотности и давления газа [10]. Согласно расчетам величина угла наклона поверхности, в начальный момент времени не превышающая 10° , становится экстремально большой (порядка 80° , т. е. стремится к 90°). Кривизна поверхности $K = \eta_{xx}/(1 + \eta_x^2)^{3/2}$ меняет знак в особой точке, при этом ее максимальное значение увеличивается приблизительно на три порядка, т. е. особенность представляет собой точку перегиба. Поэтому наблюдаемые сингулярности могут быть аналогичны слабым корневым особенностям, формирующимся при развитии неустойчивости Кельвина — Гельмгольца при тангенциальном разрыве скорости жидкости [11, 12].

О сингулярном поведении системы свидетельствует также спектр функции R , представленный на рис. 4. Видно, что в моменты времени, близкие к моментам опрокидывания волн, распределение гармоник в спектре R принимает степенной характер. Зависимость, представленная на рис. 4, близка к зависимости $|R_k| \sim k^{-1}$. Для сравнения, при опрокидывании волны Римана затухание спектра происходит по закону $k^{-4/3}$ [13].

Заключение. В работе с использованием метода динамических конформных преобразований проведено моделирование динамики непроводящей жидкости со свободной поверхностью в тангенциальном электрическом поле. Полученные результаты хорошо согласуются с точным частным решением в виде плоской волны, распространяющейся без иска-

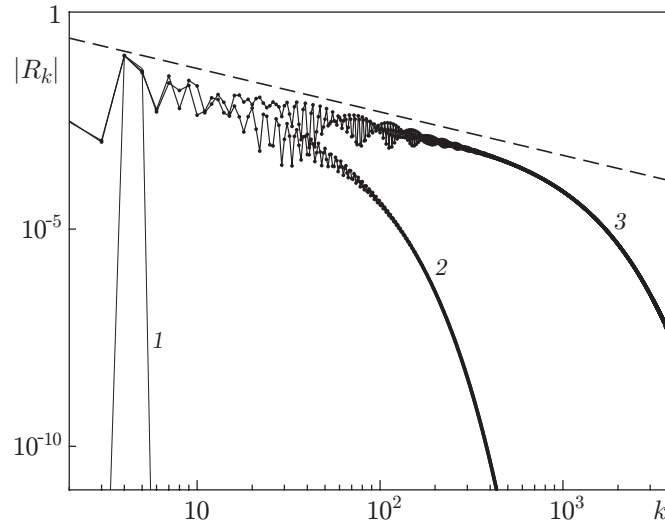


Рис. 4. Спектр функции $R(u, t)$ в логарифмическом масштабе в различные моменты времени:
 1 — $t = 0$, 2 — $t = 95$, 3 — $t = 145$; штриховая линия — степенная зависимость $|R_k| \sim k^{-1}$

жений (т. е. в отсутствие дисперсии) вдоль поверхности жидкости в направлении действия внешнего поля либо в противоположном направлении. Показано, что при взаимодействии встречных периодических волн происходит генерация высших гармоник, т. е. наблюдается прямой энергетический каскад, приводящий к переходу энергии в возмущения малых масштабов. На поздних стадиях эволюции системы данный процесс приводит к формированию особенностей — точек на границе жидкости, в которых давление электрического поля претерпевает разрыв. Результаты численных экспериментов показывают, что вблизи сингулярности величины углов наклона границы близки к предельно большим (90°), а кривизна поверхности изменяется от минус до плюс бесконечности, обращаясь в нуль в особой точке. Следует отметить, что наблюдаемое поведение границы жидкости существенно отличается от опрокидывания волн, при котором проекции на ось x градиентов давления и плотности энергии стремятся к бесконечности даже в случае их непрерывного распределения вдоль границы, что обусловлено исключительно формой поверхности. О сингулярном характере поведения исследуемой системы свидетельствуют спектральные функции: в моменты времени, близкие к моментам, когда формируется особенность, они имеют степенной вид $|R_k| \sim k^{-1}$. Полученные результаты означают, что при взаимодействии встречных нелинейных волн начиная с некоторого момента времени капиллярные эффекты становятся существенными и возникает необходимость их учета.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Melcher J. R., Schwarz W. J.** Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 2604–2616.
2. **Barannyk L. L., Papageorgiou D. T., Petropoulos P. G.** Suppression of Rayleigh — Taylor instability using electric fields // Math. Comput. Simulat. 2012. V. 82. P. 1008–1016.
3. **El-Sayed M. F.** Electro-aerodynamic instability of a thin dielectric liquid sheet sprayed with an air stream // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 7588–7591.
4. **Зубарев Н. М., Зубарева О. В.** Бездисперсионное распространение волн конечной амплитуды по поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 20. С. 40–44.

5. **Зубарев Н. М., Кочурин Е. А.** Трехмерные нелинейные волны на границе раздела диэлектрических жидкостей во внешнем горизонтальном электрическом поле // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 52–58.
6. **Зубарев Н. М., Кочурин Е. А.** Взаимодействие сильно нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле // Письма в ЖЭТФ. 2014. Т. 99, № 11. С. 729–734.
7. **Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
8. **Фрик П. Г.** Турбулентность: методы и подходы. Курс лекций. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1999.
9. **LeVeque R. J.** Finite difference methods for ordinary and partial differential equations. Philadelphia: SIAM, 2007.
10. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
11. **Moore D. W.** The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 365. P. 105–119.
12. **Зубарев Н. М., Кузнецов Е. А.** Формирование особенностей на поверхности раздела жидкостей при развитии неустойчивости Кельвина — Гельмгольца // Журн. эксперим. и техн. физики. 2014. Т. 145, № 6. С. 1–11.
13. **Pelinovsky D., Pelinovsky E., Kartashova E., et al.** Universal power law for the energy spectrum of breaking Riemann waves // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98, № 3. С. 265–269.

*Поступила в редакцию 31/X 2016 г.,
в окончательном варианте — 7/XII 2016 г.*
