УДК 539.3;534.1

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

А. Е. Алексеев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Приводится линеаризованная система уравнений упругого деформирования тонких пластин с произвольными граничными условиями на лицевых поверхностях в произвольной криволинейной системе координат. Эти уравнения являются первым приближением однопараметрической последовательности уравнений двумерных задач, полученных из исходной трехмерной задачи путем аппроксимации неизвестных функций в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра. Решена задача о потере устойчивости бесконечно длинной пластины при сжатии в одном направлении. Проводится сравнение полученных результатов с известными.

Существует много подходов к построению уравнений упругого деформирования пластин, которые условно можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, основанные на принятии упрощающих гипотез (классическая теория, уравнения типа Тимошенко и т. д.), ко второй — методы, в которых исходная трехмерная задача сводится к последовательности двумерных (асимптотические методы, методы разложения по толщине с использованием различных базисных функций). В качестве базисных функций часто применяются полиномы Лежандра (см., например, [1]). В [2] изложен способ получения уравнений упругого деформирования пластин и оболочек постоянной толщины с произвольными граничными условиями для перемещений и напряжений на лицевых поверхностях, в основе которого лежит применение нескольких аппроксимаций одних и тех же неизвестных величин в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра. С использованием этой методики в [3] получено однопараметрическое семейство последовательных приближений уравнений деформирования слоя переменной толщины в произвольной криволинейной системе координат. В [4] предложенная в [2, 3] методика обобщается на случай нелинейного упругого деформирования пластин.

В данной работе рассматривается линеаризованная система уравнений первого приближения последовательности уравнений, полученных в [4].

1. Уравнения нелинейной теории упругости в произвольной криволинейной системе координат. Рассмотрим произвольную криволинейную систему координат Лагранжа ξ^i $(i = 1, 2, 3)$. Уравнения равновесия сплошной среды в векторной форме записываются в виде

$$\hat{\boldsymbol{t}}^i_{,i} + \hat{\boldsymbol{f}} = 0, \qquad \hat{\boldsymbol{t}}^i = J\boldsymbol{t}^i, \qquad \hat{\boldsymbol{f}} = J\boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{t}^i = \sigma^{ij}\boldsymbol{g}_j, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{g}_i$ — ковариантный базис криволинейной системы координат ξ^i в деформированном состоянии; $J = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)$ — якобиан преобразования координат; σ^{ij} — компоненты тензора напряжений Коши; $\boldsymbol{f}$ — вектор объемных сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00525).

Компоненты тензора деформаций Грина — Лагранжа ε_{ij} связаны с вектором перемещений $\boldsymbol{u}$ нелинейными соотношениями

$$2\varepsilon_{ij} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_i \cdot \boldsymbol{u}_{,j} + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_j \cdot \boldsymbol{u}_{,i} + \boldsymbol{u}_{,i} \cdot \boldsymbol{u}_{,j}, \tag{1.2}$$

где $\overset{0}{\boldsymbol{g}}_i$ — ковариантный базис системы координат ξ^i в недеформированном состоянии; нуль над символом означает, что соответствующая величина относится к недеформированному состоянию.

Ковариантный базис системы координат ξ^i в деформированном состоянии имеет вид

$$\boldsymbol{g}_i = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_i + \boldsymbol{u}_{,i}. \tag{1.3}$$

Закон Гука принимается в виде

$$\tau^{ij} = \overset{0}{C}{}^{ijks}\varepsilon_{ks}, \tag{1.4}$$

где τ^{ij} — контравариантные компоненты второго тензора напряжений Пиола — Кирхгофа; $\overset{0}{C}{}^{ijks}$ — контравариантные компоненты тензора четвертого ранга, удовлетворяющие условиям симметрии $\overset{0}{C}{}^{ijks} = \overset{0}{C}{}^{jiks} = \overset{0}{C}{}^{ksij}$.

В системе координат ξ^i имеет место равенство

$$\overset{0}{J}\tau^{ij} = J\sigma^{ij}, \tag{1.5}$$

где $\overset{0}{J} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_1 \cdot (\overset{0}{\boldsymbol{g}}_2 \times \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3)$ — якобиан преобразования координат в метрике исходного пространства.

В дальнейшем краевые условия относятся к недеформированному состоянию.

Полагаем, что граница $\overset{0}{S}$ недеформированного тела состоит из двух частей: $\overset{0}{S}_u$, где заданы перемещения

$$\boldsymbol{u}\big|_{\overset{0}{S}_u} = \boldsymbol{u}_*, \tag{1.6}$$

и $\overset{0}{S}_\sigma$, где заданы напряжения

$$\tau^{ij}\boldsymbol{g}_j\overset{0}{\nu}_i\big|_{\overset{0}{S}_\sigma} = \boldsymbol{p}_*. \tag{1.7}$$

Здесь $\overset{0}{\nu}_i$ — направляющие косинусов вектора внешней нормали к границе $\overset{0}{S}$; $\boldsymbol{u}_*$, $\boldsymbol{p}_*$ — заданные вектор-функции на $\overset{0}{S}$.

Краевая задача (1.1)–(1.7) относительно недеформированного состояния принимается в качестве исходной краевой задачи нелинейной теории упругости.

2. Линеаризованные уравнения первого приближения в случае, когда текущее состояние описывается геометрически нелинейными уравнениями. Рассмотрим пластину постоянной толщины $2h$, занимающую в недеформированном состоянии объем $\overset{0}{V}$, ограниченный лицевыми поверхностями $\overset{0}{S}{}^+$, $\overset{0}{S}{}^-$ и торцевой поверхностью $\overset{0}{\Sigma}$.

Пусть x_i — декартовы координаты. В недеформированном состоянии срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью $x_3 = 0$, а лицевым поверхностям $\overset{0}{S}{}^+$, $\overset{0}{S}{}^-$ соответствуют значения $x_3 = +h$, $x_3 = -h$.

Выберем криволинейную систему координат Лагранжа ξ^k таким образом, чтобы координатная ось ξ^3 в недеформированном состоянии совпадала с осью x_3. Координаты x_3

и ξ^3 связаны зависимостью $x_3 = h\xi^3$. В недеформированном состоянии положение любой внутренней точки пластины объема $\overset{0}{V}$ задается вектор-функцией криволинейных координат ξ^k

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}}(\xi^k) = \overset{0}{\boldsymbol{r}}(\xi^\alpha) + h\boldsymbol{n}\xi^3, \qquad \xi^k \in V_\xi \subset \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

где $V_\xi = \{\xi^k \mid \xi^\alpha \in S_\xi \subset \mathbb{R}^2,\ \xi^3 \in [-1,1]\}$; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в направлении оси координат x_3.

Из (2.1) получаем, что ковариантный локальный базис системы координат ξ^k в недеформированном состоянии имеет вид

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{R}}_{,\alpha} = \overset{0}{\boldsymbol{r}}_{,\alpha}, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 = \overset{0}{\boldsymbol{R}}_{,3} = h\boldsymbol{n}. \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что векторы $\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha$ зависят только от координат ξ^α, а вектор $\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3$ не зависит от ξ^k.

Поскольку координата $\xi^3 \in [-1,1]$, неизвестные функции $\boldsymbol{u}$, $\hat{\boldsymbol{t}}^i$ можно представить в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{\infty} [\boldsymbol{u}]^k P_k, \qquad \hat{\boldsymbol{t}}^i = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k P_k.$$

Здесь $P_k(\xi^3)$ — ортогональные полиномы Лежандра; $[\boldsymbol{u}]^k$, $[\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k$ — коэффициенты разложений, зависящие от координат $\{\xi^\alpha\} \in S_\xi \subset \mathbb{R}^2$:

$$[\boldsymbol{u}]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{u} P_k \, d\xi^3, \qquad [\hat{\boldsymbol{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \hat{\boldsymbol{t}}^i P_k \, d\xi^3.$$

В [4] получено однопараметрическое семейство последовательных N-приближений нелинейных уравнений упругого деформирования пластин. Наибольший интерес представляет первое приближение ($N = 0$). В этом случае для вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ вводятся две аппроксимации

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{U}' = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{1} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 (\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot [\boldsymbol{u}]^0), \\ \boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{U}'' = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{3} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \sum_{k=0}^{2} [\boldsymbol{u}]^k P_k\Big). \end{gathered} \tag{2.3}$$

В соответствии с (2.3) в выражениях (1.3) для ковариантного базиса деформированного состояния $\boldsymbol{g}_i$ принимаются следующие приближения:

$$\boldsymbol{g}_\alpha \sim \boldsymbol{G}_\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha + \boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \qquad \boldsymbol{g}_3 \sim \boldsymbol{G}_3 = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 + \boldsymbol{U}''_{,3}. \tag{2.4}$$

В (2.4) векторы $\boldsymbol{U}'$ и $\boldsymbol{U}''$ являются аппроксимациями вектора перемещений $\boldsymbol{u}$, различающимися количеством членов в рядах: первая используется при вычислении производной по координатам ξ^α, вторая — по координате ξ^3.

Уравнения равновесия (1.1) аппроксимируются соотношениями

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot (\hat{\boldsymbol{T}}'^{i}_{,i} + \hat{\boldsymbol{F}}) = 0, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot (\hat{\boldsymbol{T}}''^{i}_{,i} + \hat{\boldsymbol{F}}) = 0. \tag{2.5}$$

Здесь величины $\hat{\boldsymbol{T}}'^i$, $\hat{\boldsymbol{T}}''^i$, $\hat{\boldsymbol{F}}$ соответствуют отрезкам рядов

$$\hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha = \sum_{k=0}^{1} [\hat{\boldsymbol{t}}^\alpha]^k P_k, \quad \hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha = [\hat{\boldsymbol{t}}^\alpha]^0, \quad \hat{\boldsymbol{T}}'^3 = \hat{\boldsymbol{T}}''^3 = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \sum_{k=0}^{2} ([\hat{\boldsymbol{t}}^3]^k \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha) P_k + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \sum_{k=0}^{1} ([\hat{\boldsymbol{t}}^3]^k \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3) P_k,$$

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \sum_{k=0}^{1} ([\,\hat{\boldsymbol{f}}\,]^k \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha) P_k + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 ([\hat{\boldsymbol{f}}]^0 \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3).$$

Таким образом, в (2.5) для одних и тех же величин $\hat{\boldsymbol{t}}^\alpha$ имеем две аппроксимации: аппроксимация $\hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha$ принимается в уравнениях равновесия в координатной плоскости ξ^α, аппроксимация $\hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha$ — в условии равновесия в поперечном направлении.

Аппроксимации компонент тензора деформаций Грина — Лагранжа ε_{ij} (1.2) принимаются в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim 2E_{\alpha\beta} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\beta \cdot \boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \boldsymbol{U}'_{,\beta} + \boldsymbol{U}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{U}'_{,\beta},$$

$$\varepsilon_{3\alpha} \sim 2E_{3\alpha} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \boldsymbol{U}''_{,3} + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \boldsymbol{U}'_{,\alpha} + \boldsymbol{U}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{U}''_{,3}, \qquad \varepsilon_{33} \sim E_{33} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot \boldsymbol{U}''_{,3} + 0{,}5\boldsymbol{U}''_{,3} \cdot \boldsymbol{U}''_{,3}.$$

Наряду с текущим (достигнутым) состоянием рассмотрим возмущенное, которому соответствуют возмущенные перемещения $\tilde{\boldsymbol{U}}'$, $\tilde{\boldsymbol{U}}''$:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}' = \boldsymbol{U}' + \Delta\boldsymbol{U}', \qquad \tilde{\boldsymbol{U}}'' = \boldsymbol{U}'' + \Delta\boldsymbol{U}''.$$

Здесь векторы возмущений $\Delta\boldsymbol{U}'$, $\Delta\boldsymbol{U}''$ представляют собой отрезки рядов, аналогичные отрезкам (2.3).

Для векторов ковариантного базиса возмущенного состояния получим

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_i = \boldsymbol{G}_i + \Delta\boldsymbol{G}_i, \qquad \Delta\boldsymbol{G}_\alpha = \Delta\boldsymbol{U}'_{,\alpha}, \qquad \Delta\boldsymbol{G}_3 = \Delta\boldsymbol{U}''_{,3}. \tag{2.6}$$

Согласно [4] линеаризованная система уравнений первого приближения включает:

— уравнения равновесия (аппроксимации уравнений (1.1))

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot (\Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^i_{,i} + \Delta\hat{\boldsymbol{F}}) = 0, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot (\Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^i_{,i} + \Delta\hat{\boldsymbol{F}}) = 0; \tag{2.7}$$

— уравнения закона Гука (аппроксимации уравнений (1.4), записанные в виде отрезков рядов)

$$\Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha = \sum_{k=0}^{1} P_k \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} \overset{0}{J} \tilde{C}^{\alpha jmn} (\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n) \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3,$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \overset{0}{J} \tilde{C}^{\alpha jmn} (\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n) \boldsymbol{G}_j P_0 \, d\xi^3, \tag{2.8}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{T}}^3 = \Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^3 = \Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^3 = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \sum_{k=0}^{2} \Big(P_k \, \frac{1+2k}{2} \, \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot \int_{-1}^{1} \overset{0}{J} \tilde{C}^{3jmn} (\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n) \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3 \Big) +$$

$$+ \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \sum_{k=0}^{1} \Big(P_k \, \frac{1+2k}{2} \, \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot \int_{-1}^{1} \overset{0}{J} \tilde{C}^{3jmn} (\boldsymbol{G}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n) \boldsymbol{G}_j P_k \, d\xi^3 \Big);$$

— уравнения граничных условий на лицевых поверхностях (аппроксимации условий (1.6), (1.7))

$$\Delta \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}_u^+} = \Delta \boldsymbol{u}_*, \quad \Delta \boldsymbol{U}''\Big|_{\overset{0}{S}{}_u^-} = \Delta \boldsymbol{u}_*, \quad \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}_\sigma^+} = \Delta \boldsymbol{p}_*, \quad \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}_\sigma^-} = \Delta \boldsymbol{p}_*. \qquad (2.9)$$

В уравнениях равновесия (2.7) вектор возмущения массовых сил $\Delta \hat{\boldsymbol{F}}$ аппроксимируется отрезками рядов

$$\Delta \hat{\boldsymbol{F}} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \sum_{k=0}^{1} ([\Delta \hat{\boldsymbol{f}}]^k \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha) P_k + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 ([\Delta \hat{\boldsymbol{f}}]^0 \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3) P_0.$$

В уравнениях (2.8) компоненты тензора четвертого ранга $\tilde{C}^{ijmn}$ имеют вид

$$\tilde{C}^{ijmn} = \overset{0}{C}{}^{ijmn} + \tau^{in} G^{mj}, \qquad G^{mj} = \boldsymbol{G}^m \cdot \boldsymbol{G}^j, \qquad \boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{G}^i = \delta_j^i,$$

где δ_j^i — символ Кронекера; τ^{ij} связаны с аппроксимациями E_{ks} законом Гука (1.4). Система линейных уравнений (2.6)–(2.9) дополняется линеаризованными краевыми условиями на торцевых поверхностях (аппроксимациями граничных условий (1.6), (1.7))

$$\Delta \boldsymbol{U}'\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \Delta \boldsymbol{U}'_*, \qquad \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^\alpha \nu_\alpha^0}{J^0}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = \Delta \boldsymbol{P}'_* \qquad (\overset{0}{\Sigma}_u \cup \overset{0}{\Sigma}_\sigma = \overset{0}{\Sigma}),$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^\alpha = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\gamma (\Delta \hat{\boldsymbol{T}}'^\alpha \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\gamma) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 (\Delta \hat{\boldsymbol{T}}''^\alpha \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3).$$

Здесь векторы $\Delta \boldsymbol{U}'_*$, $\Delta \boldsymbol{P}'_*$ представляют собой отрезки рядов:

$$\Delta \boldsymbol{U}'_* = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{1} [\Delta \boldsymbol{u}_*]^k P_k\Big) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 (\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot [\Delta \boldsymbol{u}_*]^0 P_0),$$

$$\Delta \boldsymbol{P}'_* = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \Big(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{1} [\Delta \boldsymbol{p}_*]^k P_k\Big) + \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 (\overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \cdot [\Delta \boldsymbol{p}_*]^0 P_0).$$

Линейная система уравнений (2.7)–(2.9) является линеаризованной системой нелинейных уравнений упругого деформирования тонких пластин (первое приближение), дифференциальный порядок которой равен десяти [4], и не зависит от вида граничных условий на лицевых поверхностях (могут задаваться как напряжения, так и перемещения).

3. Линеаризованные уравнения первого приближения в случае, когда текущее состояние описывается геометрически линейными уравнениями. Полагаем

$$\boldsymbol{g}_\alpha \simeq \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha. \qquad (3.1)$$

Соответственно в (2.2) имеем

$$G_\alpha \simeq \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha. \qquad (3.2)$$

Подставляя (3.1), (3.2) в уравнения (2.7)–(2.9), получим линеаризованную систему уравнений тонких пластин, которая включает:

— уравнения равновесия

$$\overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^\alpha \cdot (\Delta \hat{\boldsymbol{T}}'^i_{,i} + \Delta \hat{\boldsymbol{F}}) = 0, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^3 \cdot (\Delta \hat{\boldsymbol{T}}''^i_{,i} + \Delta \hat{\boldsymbol{F}}) = 0; \qquad (3.3)$$

— уравнения закона Гука

$$\Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^{\alpha} = \sum_{k=0}^{1} P_k \,\frac{1+2k}{2} \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{\alpha jmn}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\overset{0}{\boldsymbol{g}}_j P_k \, d\xi^3,$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^{\alpha} = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{\alpha jmn}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n)\overset{0}{\boldsymbol{g}}_j P_0 \, d\xi^3, \tag{3.4}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{T}}^{3} = \Delta\hat{\boldsymbol{T}}'^{3} = \Delta\hat{\boldsymbol{T}}''^{3} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha \sum_{k=0}^{2} \Big(P_k \,\frac{1+2k}{2} \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{3\alpha mn}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n) P_k \, d\xi^3) +$$

$$+ \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 \sum_{k=0}^{1} \Big(P_k \frac{1+2k}{2} \int\limits_{-1}^{1} \overset{0}{J}\tilde{C}^{33mn}(\overset{0}{\boldsymbol{g}}_m \cdot \Delta\boldsymbol{G}_n) P_k \, d\xi^3);$$

— граничные условия на лицевых поверхностях

$$\Delta\boldsymbol{U}''\big|_{\overset{0}{S}{}_u^+} = \Delta\boldsymbol{u}_*, \quad \Delta\boldsymbol{U}''\big|_{\overset{0}{S}{}_u^-} = \Delta\boldsymbol{u}_*, \quad \frac{\Delta\hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}_\sigma^+} = \Delta\boldsymbol{p}_*, \quad \frac{\Delta\hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}_\sigma^-} = \Delta\boldsymbol{p}_*. \tag{3.5}$$

В уравнениях (3.4) компоненты тензора четвертого ранга $\tilde{C}^{ijmn}$ принимают вид

$$\tilde{C}^{ijmn} = \overset{0}{C}{}^{ijmn} + \tau^{in}\overset{0}{g}{}^{mj}, \qquad \overset{0}{g}{}^{mj} = \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^m \cdot \overset{0}{\boldsymbol{g}}{}^j. \tag{3.6}$$

Дифференциальный порядок линейной системы уравнений (3.3)–(3.5), как и в предыдущем случае, равен десяти.

4. Потеря устойчивости бесконечной пластины при сжатии. Рассмотрим бесконечно длинную пластину шириной l и толщиной $2h$. Массовыми силами пренебрегаем ($\boldsymbol{f} = 0$).

Введем систему координат ξ^k:

$$x_\alpha = \xi^\alpha, \qquad x_3 = h\xi^3, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{g}}_3 = h\boldsymbol{e}_3, \qquad \overset{0}{J} = h, \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — ортонормированный базис декартовой системы координат x_i.

Решается задача о потере устойчивости шарнирно опертой на торцах пластины при сжатии вдоль координатной оси x_1 усилием интенсивности p.

Принимаются следующие предположения:

— докритическое состояние описывается геометрически линейными уравнениями, поэтому рассматривается линеаризованная система уравнений (3.3)–(3.5);

— докритическое напряженное состояние однородно:

$$\tau_{11} = -p, \qquad \tau_{13} = 0, \qquad \tau_{33} = 0; \tag{4.2}$$

— материал пластины изотропный:

$$\overset{0}{C}{}^{ijmn} = \lambda\overset{0}{g}{}^{ij}\overset{0}{g}{}^{mn} + \mu(\overset{0}{g}{}^{im}\overset{0}{g}{}^{jn} + \overset{0}{g}{}^{in}\overset{0}{g}{}^{jm}) \tag{4.3}$$

(λ, μ — параметры Ламе) и в силу (4.1)

$$\overset{0}{g}{}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}, \qquad \overset{0}{g}{}^{\alpha 3} = 0, \qquad \overset{0}{g}{}^{33} = 1/h^2.$$

Из (4.2), (4.3) следует, что компоненты $\tilde{C}^{ijmn}$ в (3.6) равны нулю, за исключением следующих:

$$\begin{gathered}\tilde{C}^{1111} = \lambda + 2\mu - p, \qquad \tilde{C}^{1331} = (\mu - p)/h^2, \qquad \tilde{C}^{3333} = (\lambda + 2\mu)/h^4,\\ \tilde{C}^{1133} = \tilde{C}^{3311} = \tilde{C}^{1313} = \tilde{C}^{3131} = \tilde{C}^{3113} = \mu/h^2.\end{gathered} \tag{4.4}$$

В случае плоской деформации имеем

$$\Delta \boldsymbol{G}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{e}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{U}'' = 0. \tag{4.5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{U}'' = u + \psi P_1 + [u]^2 P_2 + [u]^3 P_3, \qquad \boldsymbol{e}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{U}'' = v + [v]^1 P_1 + [v]^2 P_2. \tag{4.6}$$

Используя свойства полиномов Лежандра и соотношения (4.1)–(4.6), из уравнений закона Гука (3.4) можно получить следующие выражения:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e}_1 \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{T}}'^1 = (\lambda + 2\mu - p)(u_{,1} P_0 + \psi_{,1} P_1) + \lambda([v]^1 P_0 + 3[v]^2 P_1),\\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{T}}''^1 = (\mu - p) h v_{,1} + \mu([u]^1 + [u]^3),\\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3 = (\mu/h)(([u]^1 + [u]^3 + h v_{,1}) P_0 + 3[u]^2 P_1 + 5[u]^3 P_2),\\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3 = \lambda(u_{,1} P_0 + \psi_{,1} P_1) + ((\lambda + 2\mu)/h)([v]^1 P_0 + 3[v]^2 P_1).\end{gathered} \tag{4.7}$$

Неизвестные функции u, v, ψ, входящие в (4.7) вместе с первыми производными, назовем основными, а $[u]^2$, $[u]^3$, $[v]^1$, $[v]^2$ — дополнительными.

Лицевые поверхности $x_3 = \pm h$ свободны от напряжений, и уравнения граничных условий (3.5) имеют вид

$$\frac{\Delta \hat{\boldsymbol{T}}^3}{\overset{0}{J}}\Big|_{\overset{0}{S}{}^{\pm}} = 0. \tag{4.8}$$

Подставим в (4.8) последние два выражения (4.7). В результате имеем систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех дополнительных неизвестных функций, решением которой являются выражения

$$[u]^2 = 0, \qquad [u]^3 = -\frac{1}{6}(\psi + h v_{,1}), \quad [v]^1 = -\frac{h\lambda}{3(\lambda + 2\mu)}\, u_{,1}, \quad [v]^2 = -\frac{h\lambda}{\lambda + 2\mu}\, \psi_{,1}. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.9) в (4.7), а полученные выражения — в (3.3), получим линейную систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех основных неизвестных функций u, v, ψ:

$$u_{,11} = 0, \quad \Big(\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda + 2\mu} - p\Big)\psi_{,11} - \frac{5\mu}{2h^2}\,(\psi + h v_{,1}) = 0, \quad \psi_{,1} + \Big(1 - \frac{6p}{5\mu}\Big) h v_{,11} = 0. \tag{4.10}$$

На торцевых поверхностях $x = 0$, $x = l$ пластина шарнирно оперта, что эквивалентно следующим граничным условиям:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \psi_{,1} = 0 \qquad \text{при } x = 0,\ x = l. \tag{4.11}$$

Исключая в (4.10), (4.11) функцию ψ, получим однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка при однородных граничных условиях

$$\begin{gathered}\Big(\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda + 2\mu} - p\Big)\Big(\frac{5\mu}{6} - p\Big) v_{,1111} + \frac{5\mu}{2h^2}\, p v_{,11} = 0,\\ v = 0, \qquad v_{,11} = 0 \qquad \text{при } x = 0,\ x = l.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Решение задачи (4.12) ищется в виде

$$v = C\sin(m\pi x/l). \tag{4.13}$$

После подстановки (4.13) в (4.12) имеем уравнение для определения критической нагрузки p

$$\Big(\frac{(\lambda+2\mu)^2-\lambda^2}{\lambda+2\mu}-p\Big)\Big(\frac{5\mu}{6}-p\Big)m^2\alpha^2-\frac{5\mu}{2}p=0, \tag{4.14}$$

где $\alpha = h\pi/l$.

Полагая $m = 1$, квадратное уравнение (4.14) запишем в виде

$$ap_*^2 - bp_* + c = 0,$$
$$a = \frac{4\alpha^4}{15(1-\nu)}, \qquad b = \frac{4\alpha^2}{5(1-\nu)}+\frac{\alpha^2}{3}+1, \qquad c = 1, \tag{4.15}$$

где ν — коэффициент Пуассона; $p_* = p/p_e$; $p_e = \alpha^2 E/(3(1-\nu^2))$ — критическая нагрузка Эйлера; E — модуль Юнга. С точностью до α^4 решение уравнения (4.15) записывается в виде

$$p_* \simeq 1-\alpha^2(17-5\nu)/(15(1-\nu)). \tag{4.16}$$

Значения критических нагрузок на основе уточненной теории пластин получены в работе [5]:

$$p_1 \simeq 1-\alpha^2 4/(5(1-\nu)). \tag{4.17}$$

В трехмерной линеаризованной постановке при малых начальных деформациях критические нагрузки получены в [6]:

$$p_2 \simeq 1-\alpha^2\Big(\frac{2(6-\nu)}{15(1-\nu)}+\frac{1}{3}\Big). \tag{4.18}$$

Из сравнения критических нагрузок (4.16)–(4.18) следуют оценки

$$p_* \leqslant p_2 < p_1. \tag{4.19}$$

Знак равенства в (4.19) достигается при $\nu = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Понятовский В. В.** Уточненная теория трансверсально-изотропных пластин // Исследования по теории упругости и пластичности. 1967. № 6. С. 72–92.
2. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980.
3. **Алексеев А. Е.** Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
4. **Алексеев А. Е.** Нелинейные уравнения упругого деформирования пластин // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 3. С. 135–145.
5. **Гузь А. Н., Пелех Б. Л., Бабич И. Ю., Тетерс Г. А.** Об области применимости прикладных теорий в задачах устойчивости стержней и пластинок с низкой сдвиговой жесткостью // Механика полимеров. 1969. № 6. С. 1124–1126.
6. **Гузь А. Н., Бабич И. Ю.** Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. Киев: Вища шк., 1980.

Поступила в редакцию 17/VIII 2001 г.,
в окончательном варианте — 29/X 2001 г.