УДК 538.566 + 621.371

ИССЛЕДОВАНИЕ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ, ДИФРАГИРОВАННОГО НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КЛИНЕ

А. А. Александрова, Н. А. Хижняк
(*Харьков*)

В работе [1] с помощью метода, основанного на использовании интегральных уравнений макроскопической электродинамики [2], решена задача дифракции плоской электромагнитной волны определенной поляризации на прямоугольном диэлектрическом клине. В данной работе приведены выражения для полного электромагнитного поля как внутри диэлектрического клина произвольного угла раскрыва, так и вне его, полученные тем же методом.

1. Структура поля внутри диэлектрического клина. Пусть на диэлектрический клин с произвольным углом раскрыва α у вершины, диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости которого в общем случае могут быть комплексными и произвольными по величине, падает плоская электромагнитная волна. Не нарушая общности задачи, выберем поляризацию падающей волны такой, что поле имеет отличные от нуля компоненты

$$\mathbf{E}_0 = (E_{x0},\ 0,\ 0),\ \mathbf{H} = (0,\ H_{\rho 0},\ H_{\varphi 0}),$$

где

$$E_{x0}(\rho, \varphi) = E_{x0} e^{ik\rho\cos(\varphi-\varphi_0)};$$

φ_0 — угол падения, отсчитываемый от грани $\varphi = 0$ (фиг. 1).

Тогда поле внутри клина будет иметь ту же поляризацию и ненулевые компоненты поля $\mathbf{E} = (E_x,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{H} = (0,\ H_\rho,\ H_\varphi)$, где H_ρ, H_φ — цилиндрические компоненты поля; причем поля представлены в виде совокупности плоских преломленных волн и краевой волны от ребра в виде интеграла Зоммерфельда

$$(1.1) \qquad E_x(\rho, \varphi) = \sum_j A_j e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\varphi-\psi_j)} + \int_{G_0} e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\varphi-\eta)} f(\eta)\,d\eta;$$

$$H_\varphi(\rho, \varphi) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{\sum_j A_j e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\varphi-\psi_j)}\cos(\psi_j-\varphi) + \right.$$

$$\left. + \int_{G_0} e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\varphi-\eta)}\cos(\eta-\varphi)\cdot f(\eta)\,d\eta\right\};$$

$$H_\rho(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{\sum_j A_j e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\varphi-\psi_j)}\sin(\psi_j-\varphi) + \right.$$

$$\left. + \int_{G_0} e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\varphi-\eta)}\sin(\eta-\varphi)\cdot f(\eta)\,d\eta.\right.$$

Рассмотрим первую часть решения в виде совокупности плоских преломленных волн. Ввиду того, что при освещении клина падающей волной возникает три ситуации в зависимости от освещенности граней клина, рассмотрим в отдельности каждую из них.

Если падающая волна освещает только одну грань клина ($\varphi = 0$ или $\varphi = \alpha$), то и внутри клина возбуждается лишь одна преломленная волна (лежащая соответственно в области $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi_1$ или в области $\psi_2 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$). Амплитуды волн определяются формулами, приводящимися к формулам Френеля: при освещении грани $\varphi = 0$

$$A_1 = \frac{2E_{0x} \sin \varphi_0 \cdot \cos \psi_1 \cdot \mu}{\sin (\varphi_0 + \psi_1) + (\mu - 1) \sin \varphi_0 \cdot \cos \psi_1}; \tag{1.2}$$

при освещении грани $\varphi = \alpha$

$$A_2 = \frac{2E_{0x} \sin (\alpha - \varphi_0) \cdot \cos (\alpha - \psi_2) \cdot \mu}{\sin (2\alpha - \varphi_0 - \psi_2) + (\mu - 1) \sin (\alpha - \varphi_0) \cdot \cos (\alpha - \psi_2)}, \tag{1.3}$$

где углы преломления ψ_1, ψ_2, отсчитываемые от грани $\varphi = 0$, определяются соотношениями, выражающими хорошо известные законы преломления электромагнитных волн на границе с диэлектриком при выбранной схеме отсчета углов

$$\sqrt{\varepsilon\mu} \cos \psi_1 = \cos \varphi_0, \quad \sqrt{\varepsilon\mu} \cos (\alpha - \psi_2) = \cos (\alpha - \varphi_0). \tag{1.4}$$

В общем случае освещения обеих граней клина ($0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \alpha$) в нем имеются две преломленные волны, амплитуды которых определяются соотношениями (1.2), (1.3). Однако при этом следует иметь в виду различные случаи.

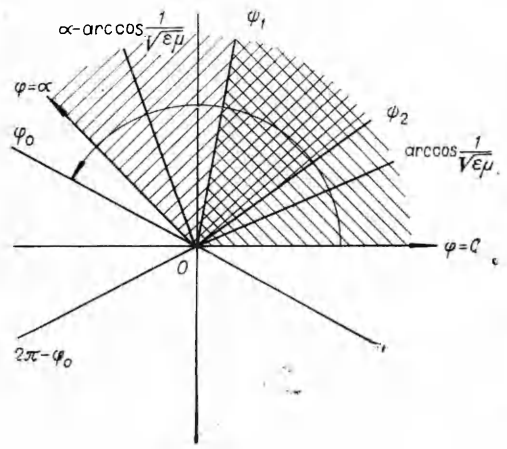
Предположим, что диэлектрический клин изготовлен из материала, для которого $\varepsilon\mu > 1$, тогда возможны следующие ситуации.

1. Если $\alpha < \pi/2$, то обе преломленные волны присутствуют во всех внутренних точках клина. Следовательно, для каждой из внутренних точек $r \in V$ преломленная плоская волна имеет вид

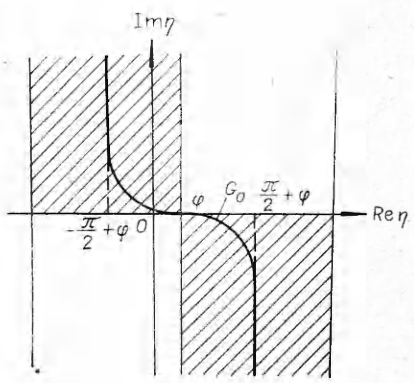
$$E_{\text{пл.вн}} = \sum_{j=1}^{2} A_j e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu} \cos (\psi_j - \varphi)}, \tag{1.5}$$

где $A_{1,2}$, $\psi_{1,2}$ определяются формулами (1.2) — (1.4).

2. Если $\alpha > \pi/2$, то внутреннюю область клина можно представить состоящей из трех отдельных областей (см. фиг. 1). В первой области существует лишь одна волна, преломленная на грани $\varphi = \alpha$, и внутреннюю



Фиг. 1



Фиг. 2

плоскую волну можно представить в виде одного слагаемого

$$E_{\text{пл}} = A_2 e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\psi_2-\varphi)}, \quad \alpha > \varphi > \psi_1.$$

Во второй области $\psi_1 > \varphi > \psi_2$ присутствуют одновременно обе преломленные волны, и поэтому $E_{\text{пл}}$ определяется полной суммой (1.5).

В третьей области $\psi_2 > \varphi > 0$ снова присутствует лишь одна преломленная волна, сформированная первой гранью

$$E_{\text{пл}} = A_1 e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\psi_1-\varphi)}, \quad \psi_2 > \varphi > 0.$$

Если же диэлектрический клин изготовлен из материала менее плотного, чем окружающая среда, то возможны и дополнительные ситуации, которые необходимо рассмотреть особо. В дальнейшем всегда будем предполагать $\varepsilon\mu > 1$.

Рассмотрим теперь оставшийся член (1.1) в виде интеграла зоммерфельдовского типа с весовой функцией $f(\eta)$, задающей краевую волну, которая также в зависимости от угла наблюдения прошедшей волны φ будет определяться различными соотношениями. Прежде чем переходить к конкретным выражениям весовой функции, рассмотрим общий вид решений дифракционной задачи в виде интеграла Зоммерфельда, контур интегрирования которого G_0 представлен на фиг. 2. Решения в виде интеграла Зоммерфельда удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к решениям уравнений Максвелла, представленным в виде интегральных слагаемых.

Можно поверить, что они конечны, непрерывны, однозначны на римановой поверхности при всех $\rho > 0$, имеют требуемую особенность при $\rho = 0$ и удовлетворяют принципу излучения на бесконечности [3].

Непосредственными вычислениями легко убедиться, что дифференциальные уравнения Максвелла

$$ik\mu H_\rho = (1/\rho)\partial E_x/\partial\varphi; \quad ik\mu H_\varphi = -\partial E_x/\partial\rho; \tag{1.6}$$
$$-ik\varepsilon E_x = (1/\rho)\partial(\rho H_\varphi)/\partial\rho - (1/\rho)\partial H_\rho/\partial\varphi$$

удовлетворяются решениями (1.1) независимо от вида функции $f(\eta)$.

Выпишем теперь в зависимости от угла наблюдения прошедшей волны весовую функцию, задающую волну от ребра. Рассмотрим общий случай освещения обеих граней клина. При $\alpha - \arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu}) < \varphi < \alpha$, $0 < \varphi < \arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$, $\mathrm{Re}\,\eta = \varphi$ решения представлены разветвленными функциями на римановой поверхности, которая строится над плоскостью комплексного переменного $\eta(z)$ для функций $z = \arccos(\sqrt{\varepsilon\mu} \times \cos\eta)$, $z = \alpha - \arccos[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha - \eta)]$:

$$f\left(\arccos\frac{\cos(u/n)}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = \frac{A_j}{2\pi i n}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{n}\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\frac{u}{n}}\cdot g_{\text{p}}(u, \psi_j)}{\left(\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\frac{u}{n}} + \mu\sin\frac{u}{n}\right)}; \tag{1.7}$$

(1.8)

$$f\left(\frac{\alpha}{n} - \arccos\frac{\cos\left(\frac{\alpha - u}{n}\right)}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = -\frac{A_j}{2\pi i n}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{n}\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\left(\frac{\alpha - u}{n}\right)}\cdot g_{\text{p}}(u, \psi_j)}{\left[\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\left(\frac{\alpha - u}{n}\right)} + \mu\sin\frac{u}{n}\right]},$$

где

$$(1.9)\quad g_p(u,\psi_j)=\frac{\left\{(\varepsilon-1)\mu+(\mu-1)\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{\psi_j-u}{n}\right)\right\}}{\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\frac{\psi_j}{n}-\cos\frac{u}{n}\right)\left[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\left(\frac{\alpha-\psi_j}{n}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-u}{n}\right)\right]}.$$

При $\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})<\varphi<\psi_2$, $\psi_1<\varphi<\alpha-\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$ разветвленные решения переходят в обычные, соответствующие случаю $j=1$, $j=2$

$$(1.10)\qquad f\left(\arccos\frac{\cos u}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)=\frac{A_j}{2\pi i}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2 u}\cdot\sin\alpha\cdot g(u,\psi_j)}{(\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2 u}+\mu\sin u)};$$

$$(1.11)\quad f\left(\alpha-\arccos\frac{\cos(\alpha-u)}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)=-\frac{A_j}{2\pi i}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2(\alpha-u)}\cdot g(u,\psi_j)\cdot\sin\alpha}{[\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2(\alpha-u)}+\mu\sin(\alpha-u)]},$$

где

$$(1.12)\quad g(u,\psi_j)=\frac{(\varepsilon-1)\mu+(\mu-1)\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\psi_j-u)}{\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\frac{\psi_j}{n}-\cos u\right)[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha-\psi_j)-\cos(\alpha-u)]}.$$

Наконец, при $\psi_2<\varphi<\psi_1$ получается обратное решение, соответствующее случаю $j=1,\ 2$,

$$f\left(\arccos\frac{\cos u}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)=\frac{\sin\alpha\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2 u}}{2\pi i(\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2 u}+\mu\sin u)}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j A_j g(u,\psi_j)\times$$
$$\times\frac{\{2u-\alpha+\arccos[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha-\psi_j)]-\arccos[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\psi_j]\}}{\{\alpha-\arccos(\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\psi_j)-\arccos[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha-\psi_j)]\}};$$

$$f\left(\alpha-\arccos\frac{\cos(\alpha-u)}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)=-\frac{\sin\alpha\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2(\alpha-u)}}{2\pi i[\sqrt{\varepsilon\mu-\cos^2(\alpha-u)}+\mu\sin(\alpha-u)]}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{2}(-1)^j A_j g(u,\psi_j)\frac{\{2u-\alpha+\arccos[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha-\psi_j)]-\arccos(\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\psi_j)\}}{\{\alpha-\arccos(\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\psi_j)-\arccos[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha-\psi_j)]\}},$$

где $g(u,\psi_j)$ определяется формулой (1.12), A_j и ψ_j — (1.2) — (1.4).

Если же освещена одна грань клина ($\varphi=0$ или $\varphi=\alpha$), то весовая функция определяется следующими выражениями в зависимости от угла наблюдения прошедшей волны: при $0<\varphi<\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$, $\alpha-\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})<\varphi<\alpha$, $f(\eta)$ задается соотношениями (1.7), (1.8) при $\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})<\varphi<\alpha-\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$, $f(\eta)$ задается соотношениями (1.10), (1.11), причем при освещении грани $\varphi=0$ $j=1$, при освещении грани $\varphi=\alpha$ $j=2$.

2. Структура рассеянного поля на диалектрическом клине. Общий вид полного электромагнитного поля вне клина следующий: (случай $\pi\geqslant\varphi_0\geqslant\alpha$, $\alpha\leqslant 2\arccos(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$)

$$(2.1)\quad E_x(\rho,\varphi)=\begin{cases}E_{x0}(\rho,\varphi)-\dfrac{E_{x0}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1-\sin\varphi_0\right)e^{ik\rho\cos(\varphi+\varphi_0)}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1+\sin\varphi_0\right)}+P_{E_x}(\rho,\varphi), & 2\pi-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\\ E_{x0}(\rho,\varphi)+P_{E_x}(\rho,\varphi), & \varphi_0\leqslant\varphi\leqslant2\pi-\varphi_0,\\ P_{E_x}(\rho,\varphi), & \alpha\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0;\end{cases}$$

(2.2)

$$H_\rho(\rho,\varphi)=\begin{cases} E_{x0}(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0-\varphi)+\dfrac{E_{x0}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1-\sin\varphi_0\right)e^{ik\rho\cos(\varphi+\varphi_0)}}{\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1+\sin\varphi_0\right)}\times \\ \qquad\times\sin(\varphi+\varphi_0)+P_{H_\rho}(\rho,\varphi), & 2\pi-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, \\ E_{x0}(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0-\varphi)+P_{H_\rho}(\rho,\varphi), & \varphi_0\leqslant\varphi\leqslant2\pi-\varphi_0, \\ P_{H_\rho}(\rho,\varphi), & \alpha\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0; \end{cases}$$

(2.3) $H_\varphi(\rho,\varphi)=$

$$\begin{cases} -E_{x0}(\rho,\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0)+\dfrac{\cos(\varphi+\varphi_0)E_{x0}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1-\sin\varphi_0\right)e^{ik\rho\cos(\varphi+\varphi_0)}}{\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1+\sin\varphi_0\right)}+ \\ \qquad+P_{H_\varphi}(\rho,\varphi), & 2\pi-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, \\ -E_{x0}(\rho,\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0)+P_{H_\varphi}(\rho,\varphi), & \varphi_0\leqslant\varphi\leqslant2\pi-\varphi_0, \\ P_{H_\varphi}(\rho,\varphi), & \alpha\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0, \end{cases}$$

где

$$P_{E_x}(\rho,\varphi)=-\frac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{4\pi in\mu}\left\{\int\limits_{G_1}e^{ik\rho\cos(u+\varphi)}g(u)c(u)\,du-\int\limits_{G_2}e^{ik\rho\cos(u-\varphi)}g(u)\,du\right\},$$

(2.4) $$\varphi\in(\pi,2\pi);$$

$$P_{E_x}(\rho,\varphi)=-\frac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{4\pi in\mu}\left\{\int\limits_{G_1}e^{ik\rho\cos(u-\varphi)}g(u)\,du-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{G_2}e^{ik\rho\cos(u+\varphi-2\alpha)}g(u)c(\alpha-u)\,du\right\},\quad\varphi\in(\alpha,\pi);$$

$$P_{H_\rho}(\rho,\varphi)=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{4\pi in\mu}\left\{\int\limits_{G_1}e^{ik\rho\cos(u+\varphi)}g(u)\sin(u+\varphi)\cdot c(u)\,du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{G_2}e^{ik\rho\cos(u+\varphi)}g(u)\sin(u-\varphi)\,du\right\},\quad\varphi\in(\pi,2\pi);$$

$$P_{H_\rho}(\rho,\varphi)=-\frac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{4\pi in\mu}\left\{\int\limits_{G_1}e^{ik\rho\cos(u-\varphi)}g(u)\sin(u-\varphi)\,du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{G_2}e^{ik\rho\cos(u+\varphi-2\alpha)}g(u)\sin(u+\varphi-2\alpha)\cdot c(\alpha-u)\,du\right\},\quad\varphi\in(\pi,\alpha);$$

$$P_{H_\varphi}(\rho,\varphi)=-\frac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{4\pi in\mu}\left\{-\int\limits_{G_1}e^{ik\rho\cos(u+\varphi)}g(u)\cos(u+\varphi)\cdot c(u)\,du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{G_2}e^{ik\rho\cos(u-\varphi)}g(u)\cos(u-\varphi)\,du\right\},\quad\varphi\in(\pi,2\pi);$$

$$P_{H_\varphi}(\rho, \varphi) = -\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{4\pi i n \mu}\left\{-\int_{G_1} e^{ik\rho\cos(u-\varphi)} g(u)\cos(u-\varphi)\,du + \right.$$

$$\left. + \int_{G_2} e^{ik\rho\cos(u+\varphi-2\alpha)} g(u)\cos(u+\varphi-2\alpha)\cdot c(\alpha-u)\,du\right\}, \quad \varphi \in (\pi, \alpha);$$

$g(u)$ определяется соотношением (1.9),

$$c(u) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\frac{u}{n}} - \mu\sin\frac{u}{n}}{\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\frac{u}{n}} + \mu\sin\frac{u}{n}},$$

контуры G_1 и G_2 определяются уравнениями кривых соответственно:

$$u = \arccos\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\eta\right), \quad \eta \in G_0;$$

$$u = \alpha - \arccos\left[\sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha - \eta)\right], \quad \eta \in G_0.$$

Можно убедиться, что компоненты рассеянного поля (2.1) — (2.3), полученные с помощью интегральных уравнений Максвелла [2], также удовлетворяют дифференциальным уравнениям Максвелла (1.6).

3. Структуры полей в окрестности граней диэлектрического клина. Имея явные выражения для полей во внутренней и внешней областях клина, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, можно непосредственно исследовать их структуру в окрестности граней клина и одновременно проверить их правильность и корректность всей схемы построения решения дифракционной задачи. Для этого необходимо убедиться в том, что построенные решения удовлетворяют граничным условиям на боковых гранях клина

$$E_{t_\text{р}} = E_{t_\text{в}}, \quad H_{t_\text{р}} = H_{t_\text{в}}, \quad D_{n_\text{р}} = D_{n_\text{в}}, \quad B_{n_\text{р}} = B_{n_\text{в}} \quad \text{при } \varphi = 0, \quad \varphi = \alpha,$$

где $E_t = E_x$, $H_t = H_\rho$, $B_n = B_\varphi$.

Для краткости подробные вычисления проведем лишь для двух случаев: получим выражение для E_x в окрестности грани $\varphi = 0$ и параллельно установим непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. Для этого произведем замену переменной $\eta - \varphi = u$ в интегральном члене соотношения (1.1) и разложим подынтегральную весовую функцию в ряд Тейлора по малому параметру φ. Ограничиваясь двумя первыми членами ряда, а также подставляя конкретные значения A, ψ, $f[\arccos(\cos(u/n)/\sqrt{\varepsilon\mu})]$ в виде (1.1), (1.4), (1.7), получим выражение для внутреннего поля при малых φ

$$E_x(\rho, 0) = \frac{E_{x0} e^{ik\rho\cos\varphi_0} 2\sin\varphi_1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\psi_1 + \sin\varphi_0\right)} + \tag{3.1}$$

$$+ \frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{2\pi i n}\int_{G_1} \frac{e^{ik\rho\cos u} g(u)\sin\frac{u}{n}\,du}{\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\frac{u}{n}} + \mu\sin\frac{u}{n}} + \varphi I(\rho);$$

$$I(\rho) = \int_{\eta \in G_0 - \varphi} e^{ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\eta} f'_\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Первое выражение (2.1) для E_x, компоненты рассеянного поля, допускает построение решения на грани $\varphi = 0$, где $P_{E_x}(\rho, \varphi)$ определяется первым соотношением (2.4). Для получения граничного значения поля произведем следующие преобразования. Интегралы приводим к одному контуру интегрирования G_1, это возможно благодаря тому, что подынтегральная функция аналитична во внутренней области D_1^+ (определяемой контуром $\Gamma = G_1 + G_2$). После несложных преобразований найдем, что значение рассеянного поля при малых φ также определяется соотношением (3.1), где

$$I(\rho) = -\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{4\pi i n\mu}\left\{\int\limits_{(u+\varphi)\in G_1} e^{ik\rho\cos u}\,[g(u)\,c(u)]'_{\varphi}\,du - \int\limits_{(u-\varphi)\in G_2} e^{ik\rho\cos u} g'_{\varphi}(u)\,du\right..$$

Из (3.1) видно, что на грани $\varphi = 0$ граничные значения внутреннего и рассеянного полей совпадают.

Аналогичную проверку выполнения условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля можно произвести на грани $\varphi = \alpha$ с той лишь разницей, что во внутреннем поле используем выражение для весовой функции в виде (1.8), а в интегральном члене рассеянного поля, для которого последнее выражение (2.1) допускает построение решения на грани $\varphi = \alpha$, деформируем контур G_1 в контур G_2. Тогда граничные значения внутреннего и рассеянного полей на грани $\varphi = \alpha$ будут совпадать $(\psi < \alpha)$

$$E_x(\rho, \alpha) = -\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{2\pi i n}\int\limits_{G_2}\frac{e^{ik\rho\cos(u-\alpha)} g_{\text{р}}(u)\sin\left(\frac{\alpha-u}{n}\right)du}{\left[\sqrt{\varepsilon\mu - \cos^2\left(\frac{\alpha-u}{n}\right)} + \mu\sin\left(\frac{\alpha-u}{n}\right)\right]}.$$

Произведя аналогичные действия над остальными компонентами поля (1.1), (2.2), (2.3), можно убедиться в выполнении условий

$$H_{t_{\text{р}}} = H_{t_{\text{в}}},\quad B_{n_{\text{р}}} = B_{n_{\text{в}}}\ \text{при}\ \varphi = 0,\ \varphi = \alpha.$$

Если рассмотреть случай, когда переотражений нет, т. е. большие углы раскрыва клина, малые углы падения, отсчитываемые от нормали к поверхности, и т. д., то можно выделить следующие области освещенности во внутреннем и внешнем полях при освещении грани $\varphi = 0$. Так, в области тени рассеянного поля при $\alpha < \varphi < \varphi_0$ имеется лишь краевая волна (при $k\rho\sqrt{\varepsilon\mu} \gg 1$ она имеет вид цилиндрической волны), при $2\pi - \varphi_0 > \varphi > \varphi_0$ распространяются падающая и краевая волны. Поэтому луч $\varphi = \varphi_0$ — граница между освещенной областью и областью тени $\varphi_0 > \varphi > \alpha$. Аналогично луч $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ — граница между областью, где распространяется отраженная волна $(2\pi - \varphi_0 < \varphi < 2\pi)$ и где ее нет $(\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0)$. Во внутренней клиновидной области граница тени $\varphi = \psi_1$ разбивает физическое пространство на две области: $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi_1$ и $\psi_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. В первой из них цилиндрическая волна интерферирует с плоской преломленной волной. В области геометрической тени $(\psi_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ цилиндрическая волна существует изолированно от других волн. В окрестности границы тени $\varphi = \psi_1$, φ_0, $2\pi - \varphi_0$, т. е. в зоне полутени, поле имеет более сложный характер и не выражается в общем случае через плоские и цилиндрические функции. При более детальном исследовании краевой волны можно найти, что в окрестности $\varphi = \psi_1$ поле равно

$$(3.2) \qquad -\frac{e^{i(k\rho\sqrt{\varepsilon\mu}-\pi/4)-ik\rho\sqrt{\varepsilon\mu}s_0^2}2\sqrt{2\pi}\, if(\varphi)\,[\cos(\psi-\varphi)-1]}{s_0}\int\limits_{\infty s_0}^{\sqrt{2k\sqrt{\varepsilon\mu}\rho}\cdot s_0} e^{ig^2}dg,$$

$$s_0^2 = 2\sin^2\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right),$$

$f(\varphi)$ определяется соотношением (1.11). Интеграл, входящий в выражение (3.2), представляет собой интеграл Френеля, нижний предел его по абсолютной величине всегда равен бесконечности, а знак его определяется знаком $\sin[(\psi-\varphi)/2]$. Поэтому при переходе через границу плоских волн $\varphi = \psi$ нижний предел меняет знак, и интеграл испытывает конечный разрыв, обеспечивая на границе тени непрерывность дифракционного поля.

Поступила 22 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александрова А. А., Хижняк Н. А.** Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине.— ЖТФ, 1974, т. X, вып. 11.
2. **Хижняк Н. А.** Функция Грина уравнения Максвелла для неоднородных сред. — ЖТФ, 1958, т.XXVIII, вып. 7.
3. **Франк Ф., Мизес Р.** Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, 1937.