

УДК 539.311

DOI: 10.15372/PMTF202315275

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА С ШАРНИРНО СОЕДИНЕННЫМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ШИРИНЫ

Н. П. Лазарев, В. А. Ковтуненко^{*,**}

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия

^{*} Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

^{**} Институт математики и компьютерных наук Грацкого университета им. Карла и Франца, Грац, Австрия

E-mails: nyurgun@ngs.ru, kovtunenkov@hydro.nsc.ru

Исследованы две модели, описывающие равновесие неоднородного двумерного тела с двумя соединенными жесткими включениями. Первая модель соответствует упругому телу с объемными жесткими включениями, расположенными в областях с постоянной шириной (криволинейный прямоугольник и трапеция). В рамках второй модели рассмотрены тонкие включения, описываемые кривыми. Для обоих типов моделей предполагается, что на границе контакта упругой матрицы и жестких включений имеется трещина, которая задается одной и той же кривой. На берегах трещины ставится одностороннее условие непроникания. Исследуется зависимость решений задач о равновесии от параметра ширины объемных включений. Показано, что решения задач о равновесии при наличии объемных включений в сильной топологии сходятся к решению задач для тонких включений при стремлении параметра ширины к нулю.

Ключевые слова: вариационная задача, жесткое включение, условие непроникания, упругая матрица, шарнирное соединение

Введение. Интерес к исследованию математических моделей, описывающих различные особенности неоднородных тел, обусловлен широким использованием композитов в промышленности, например в машиностроении. Геометрические характеристики структурных элементов составных тел могут оказывать влияние на прочностные свойства конструкции в целом. В частности, варьирование геометрических параметров в математических моделях может привести к топологическому изменению размерности. Известно, что при изменении размерности геометрического объекта возникают трудности, связанные с обоснованием формальных асимптотических методов. Поэтому исследование предельных переходов в математических моделях, содержащих геометрические объекты различной размерности, является актуальной задачей.

Физические особенности неоднородных тел с включениями, такие как различие коэффициентов упругости, коэффициентов температурного расширения для матрицы и включений, могут приводить к образованию трещин на границе контакта разных материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-947 от 16.02.2023).

© Лазарев Н. П., Ковтуненко В. А., 2023

Задачи теории трещин, описывающие неоднородные тела с жесткими включениями, и линейные граничные условия на трещине изучались, например, в работах [1–4]. В монографии [5] предложена вариационная теория трещин с нелинейными условиями непроникания между их берегами. Условия непроникания применяются для класса задач о составных телах и композитах, содержащих жесткие включения (см. [6–10]). Следует отметить, что анализ нелинейных задач для однородных и неоднородных тел с трещинами осложняется негладкостью (отсутствием свойства липшицевости) их границ [11–15].

Асимптотический анализ вариации формы и топологии тел с трещинами для вариационных задач был проведен в работах [16–22] и др. В частности, для моделей тел с условиями непроникания на трещине в работах [23, 24] исследованы задачи оптимального управления формой и положением малого упругого включения, в которых функционал качества определен в соответствии с критерием разрушения Гриффитса. В [25] обоснован предельный переход при стремлении параметра ширины упругого включения к нулю и построена асимптотическая модель упругого тела, содержащего тонкое включение.

В работах [26, 27] получены явные формулы для производной энергии по параметру изменения формы жестких включений. С использованием граничных условий типа условий Синьорини задачи о равновесии для составных тел с тонкими упругими или тонкими жесткими включениями изучены, например, в работах [28–31], в которых под тонким включением понимается включение, размерность которого на единицу меньше размерности рассматриваемого тела в целом.

В данной работе рассматривается нелинейная модель, описывающая двумерное тело с двумя жесткими включениями, соединенными шарниром, т. е. предполагается, что оба включения имеют одну общую точку шарнирного соединения. Кроме того, включения отслаиваются от упругой матрицы на участке границы, образуя тем самым трещину. Для задач, описывающих тело с двумя объемными жесткими включениями (при этом размерность объемного включения совпадает с размерностью тела), доказано, что предельный переход при стремлении параметра ширины включения t к нулю дает задачу о двух тонких жестких включениях, соединенных шарнирным способом. Настоящая работа является продолжением работ [32–35], в которых обоснован асимптотический переход между моделями упругих тел с многообразиями разных размерностей. В отличие от моделей, представленных в [32–35], в предлагаемой модели содержится не одно, а два соединенных включения.

1. Вариационные задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей Γ класса $C^{0,1}$. Предположим, что граница Γ состоит из двух непересекающихся участков $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$; $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$. Предположим, что кривая γ лежит в области Ω , которую можно разбить на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, так чтобы выполнялись условия $\gamma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ и $\text{meas}(\partial\Omega_i \cap \Gamma_0) > 0$, $i = 1, 2$. Последнее условие необходимо для выполнения неравенства Корна в нелипшицевой области $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Далее кривая γ соответствует трещине.

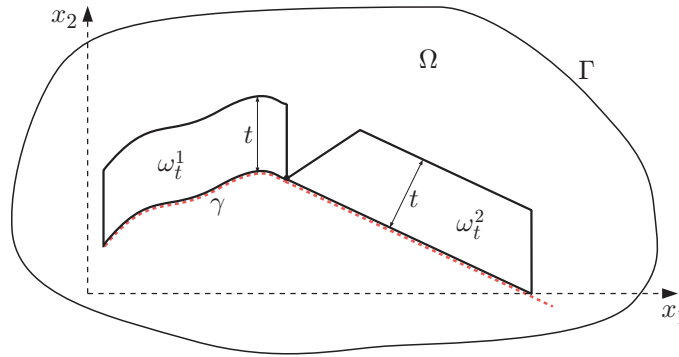
1.1. Случай объемных включений. Рассмотрим два семейства подобластей в Ω . Первое семейство состоит из областей $\omega_t^1 \subset \Omega$, каждая из которых имеет форму криволинейного прямоугольника шириной $t \in (0, T]$:

$$\omega_t^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \quad g(x_1) < x_2 < g(x_1) + t, \quad x_1 \in (s_1, s_2)\},$$

где $g \in C^{0,1}(s_1, s_2)$ — заданная функция; $s_1 \in \mathbb{R}$, $s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 < s_2$. Предположим, что общая нижняя сторона

$$\gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \quad x_2 = g(x_1), \quad x_1 \in (s_1, s_2)\}$$

криволинейных прямоугольников ω_t^1 является частью кривой γ (см. рисунок). Второе семейство состоит из трапеций вида $\omega_t^2 \subset \Omega$, ширина которых задана параметром t . При



Геометрия двумерного композитного тела с объемными включениями

этом трапеции ω_t^2 имеют общую фиксированную нижнюю сторону γ_2 , такую что $\gamma_2 \subset \gamma$ и $\gamma_2 \cap \gamma_1 = \emptyset$. Предположим, что выбор этих двух семейств областей обеспечивает выполнение следующих геометрических условий для всех $t \in (0, T]$:

1) замыкания областей и соответствующих кривых имеют одну общую точку пересечения

$$\bar{\omega}_t^1 \cap \bar{\omega}_t^2 = \bar{\gamma}_2 \cap \bar{\gamma}_1 = x^* = (x_1^*, x_2^*);$$

2) кривую γ можно продолжить до некоторой ограничивающей область O замкнутой кривой Γ , такой что $\bar{O} \subset \Omega$, $\partial O = \Gamma$ и наибольшие включения $\omega_T^i \subset O$, $i = 1, 2$. При этом границы областей $O \setminus \overline{\omega_t^1 \cup \omega_t^2}$ являются липшицевыми для всех $t \in (0, T]$.

Для вектора перемещений $W = (w_1, w_2)$ компоненты тензора, описывающие деформацию и напряжение упругого неоднородного тела, выражаются соотношениями

$$\varepsilon_{ij}(W) = (w_{i,j} + w_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где c_{ijkl} — заданный тензор модулей упругости, который полагается симметричным и положительно определенным:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} = \text{const},$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi: \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 > 0.$$

Введем следующее пространство Соболева:

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega_\gamma) = \{w \in H^1(\Omega_\gamma): w = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \quad H(\Omega_\gamma) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega_\gamma)^2.$$

В соответствии с предположением о возможности разбиения области Ω_γ на липшицевы подобласти в силу неравенства Корна выполняется равномерная оценка снизу

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) dx \geq c\|W\|_{H(\Omega_\gamma)}^2 \quad \forall W \in H(\Omega_\gamma) \quad (1)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от W (см. [5, 36]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (1) обеспечивает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega_\gamma)$ и полунормы, определяемой его левой частью, а также коэрцитивность функционала энергии $\Pi(W)$, определенного ниже.

Для того чтобы сформулировать задачу о равновесии упругого тела с шарнирно соединенными объемными включениями, зафиксируем параметр $t \in (0, T]$. Предположим, что

области ω_t^1 и ω_t^2 соответствуют жестким включениям, а дополнение $\Omega_\gamma \setminus \overline{\omega_t^1 \cup \omega_t^2}$ — упругому телу. Следуя подходу [37], подвижное жесткое включение, соответствующее некоторому множеству $Q \subset \Omega$, будем описывать, задавая поля перемещений на Q , так чтобы выполнялось условие $W|_Q = \rho$, $\rho \in R(Q)$, где $R(Q)$ — пространство инфинитезимальных жестких перемещений [37]:

$$R(Q) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2): \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); \quad b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in Q\}.$$

Наличие двух объемных жестких включений, занимающих области ω_t^1 и ω_t^2 , моделируется следующими соотношениями:

$$W|_{\omega_t^i} = \rho^i, \quad \rho^i \in R(\omega_t^i), \quad i = 1, 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия $W \in H(\Omega_\gamma)$ и $W|_{\omega_t^i} = \rho^i$, $\rho^i \in R(\omega_t^i)$, $i = 1, 2$ означают, что можно продолжить функции

$$\rho^i = b^i(x_2, -x_1) + (c_1^i, c_2^i), \quad (x_1, x_2) \in \omega_t^i$$

до границы множеств $\bar{\omega}_t^1$, $\bar{\omega}_t^2$ с прежними значениями

$$\rho^i(x) = b^i(x_2, -x_1) + (c_1^i, c_2^i), \quad (x_1, x_2) \in \bar{\omega}_t^i$$

и получить равенство в точке шарнирного соединения

$$\rho^1(x^*) = \rho^2(x^*),$$

где

$$W|_{\omega_t^i} = \rho^i, \quad \rho^i \in R(\bar{\omega}_t^i), \quad i = 1, 2.$$

Условие взаимного непроникания на двух противоположных берегах трещины γ^+ (выше кривой γ (см. рисунок)) и γ^- (ниже кривой γ (см. рисунок)) задается согласно [5]:

$$[W]\nu \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \quad (2)$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к γ , направленный внутрь включений (см. рисунок); $[v] = v|_{\gamma^+} - v|_{\gamma^-}$ — скачок функции v на γ . На участке Γ_0 внешней границы Γ задается однородное условие Дирихле. Введем функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) dx - \int_{\Omega_\gamma} FW dx,$$

где $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega_\gamma)^2$ — заданный вектор внешних сил. Задачу о равновесии тела с трещиной можно сформулировать в виде задачи минимизации: найти значения $U_t \in K_t$, такие что

$$\Pi(U_t) = \inf_{W \in K_t} \Pi(W), \quad (3)$$

где K_t — множество допустимых перемещений:

$$K_t = \{W \in H(\Omega_\gamma): \quad W|_{\omega_t^i} = \rho^i, \quad \rho^i \in R(\omega_t^i), \quad i = 1, 2\}$$

(W удовлетворяет (2)).

Нетрудно показать, что множество K_t является выпуклым и замкнутым, а следовательно, слабозамкнутым. Коэрцитивность квадратичного функционала энергии $\Pi(W)$ (1) гарантирует, что задача (3) имеет единственное решение. Кроме того, функционал $\Pi(W)$

является дифференцируемым по Гато, и задача (3) эквивалентна следующему вариационному неравенству (см. [5]):

$$U_t \in K_t, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t) \varepsilon_{ij}(W - U_t) dx \geq \int_{\Omega_\gamma} F(W - U_t) dx \quad \forall W \in K_t. \quad (4)$$

Следуя [6], можно показать, что вариационная задача (3) при достаточной гладкости решения эквивалентна задаче в дифференциальной постановке:

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j}(U_t) &= f_i \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega_t^1 \cup \omega_t^2}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_\tau^-(U_t) &= (0, 0), \quad [U_t]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^-(U_t) \leq 0, \quad \sigma_\nu^-(U_t)([U_t]\nu) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \\ U_t &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ U_t|_{\omega_t^2} &= \rho_t^1, \quad U_t|_{\omega_t^2} = \rho_t^2, \quad \rho_t^i \in R(\omega_t^i), \quad i = 1, 2, \\ - \int_{\partial\omega_t^1} \sigma_{ij}(U_t) n_j^1 \rho_i^1 - \int_{\partial\omega_t^2} \sigma_{ij}(U_t) n_j^2 \rho_i^2 &= \int_{\omega_t^1} F \rho^1 + \int_{\omega_t^2} F \rho^2 \end{aligned}$$

для всех $\rho^1 = (\rho_1^1, \rho_2^1) \in R(\omega_t^1)$ и $\rho^2 = (\rho_1^2, \rho_2^2) \in R(\omega_t^2)$. Здесь $n^1 = (n_1^1, n_2^1)$ — внешняя нормаль к ω_t^1 ; $n^2 = (n_1^2, n_2^2)$ — внешняя нормаль к ω_t^2 ,

$$\sigma_\nu(U_t) = \sigma_{ij}(U_t) \nu_i \nu_j; \quad (5)$$

$$\sigma_\tau(U_t) = (\sigma_\tau^1(U_t), \sigma_\tau^2(U_t)) = (\sigma_{1j}(U_t) \nu_j, \sigma_{2j}(U_t) \nu_j) - \sigma_\nu(U_t) \nu. \quad (6)$$

1.2. Случай тонких включений. Наряду с рассматриваемыми задачами о равновесии составного тела с объемными жесткими включениями сформулируем также задачу о равновесии упругого тела с двумя шарнирно соединенными тонкими включениями. Тонкие включения соответствуют кривым γ_1 и γ_2 . Как и в рассмотренном выше случае (см. подп. 1.1), предположим, что тело содержит трещину, расположенную на границе контакта разных материалов. При этом в недеформированном состоянии трещина описывается той же кривой γ . Для случая тонких включений определим выпуклое и замкнутое множество допустимых перемещений

$$K_0 = \{W \in H(\Omega_\gamma): W|_{\gamma_i^+} = \rho^i, \quad \rho^i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2\}$$

(W удовлетворяет (2) согласно замечанию 2).

Аналогично тому, как это сделано в замечании 2, можно продолжить функции $\rho^i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$ на замкнутые множества $\bar{\gamma}_i$, $i = 1, 2$ и записать равенство в точке шарнирного соединения

$$\rho^1(x^*) = \rho^2(x^*),$$

где

$$W|_{\gamma_i^+} = \rho^i, \quad \rho^i \in R(\bar{\gamma}_i), \quad i = 1, 2.$$

Те же свойства K_0 и $\Pi(W)$, что и для задачи (3), позволяют установить существование и единственность решения U_0 следующей вариационной задачи:

$$\Pi(U_0) = \inf_{W \in K_0} \Pi(W). \quad (7)$$

Можно показать, что эта задача эквивалентна вариационному неравенству (см. [6])

$$U_0 \in K_0, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(W - U_0) dx \geq \int_{\Omega_\gamma} F(W - U_0) dx \quad \forall W \in K_0. \quad (8)$$

Также справедливо утверждение, что задача (5) при достаточной гладкости решения U_0 является эквивалентной следующей задаче в дифференциальной постановке [6]:

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j}(U_0) &= f_i \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_\tau^-(U_0) &= (0, 0), \quad [U_0]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^-(U_0) \leq 0, \quad \sigma_\nu^-(U_0)([U_0]\nu) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \\ U_0 &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ U_0|_{\gamma_1} &= \rho_0^1, \quad U_0|_{\gamma_2} = \rho_0^2, \quad \rho_0^i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \\ \int_{\gamma_1} [\sigma_{ij}(U_0)\nu_j]\rho_i^1 + \int_{\gamma_2} [\sigma_{ij}(U_0)\nu_j]\rho_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

для всех $\rho^1 = (\rho_1^1, \rho_2^1) \in R(\gamma_1)$ и $\rho^2 = (\rho_1^2, \rho_2^2) \in R(\gamma_2)$. Функции $\sigma_\nu^-(U_0)$, $\sigma_\tau^-(U_0)$ определяются так же, как функции $\sigma_\nu^-(U_t)$, $\sigma_\tau^-(U_t)$ в (5), (6).

2. Предельный переход. Покажем, что задача (8) может быть получена как предельная для задач с объемными включениями (4) при $t \rightarrow 0$. Докажем, что решения $\{U_t\}$ задач (4) сходятся сильно к U_0 при $t \rightarrow 0$ в $H(\Omega_\gamma)$.

Для обоснования указанного выше предельного перехода построим сходящиеся последовательности пробных функций из допустимых множеств K_t и K_0 .

Лемма. Пусть $\{t_n\} \subset (0, T]$ — последовательность действительных чисел, сходящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда для произвольной функции $W \in K_0$ найдутся подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$, такие что $W_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$ и $W_k \rightarrow W$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подпоследовательность $t_{n_k} = 0$, то утверждение леммы справедливо для $W_k \equiv W$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_n > 0$ при достаточно больших n . Обозначим через $\rho^i = (b^i x_2 + c_1^i, -b^i x_1 + c_2^i)$ жесткие перемещения на γ_i , $i = 1, 2$ и расширим области определения ρ^1 , ρ^2 на наибольшие области ω_T^i , $i = 1, 2$ равенствами

$$\rho^i = (b^i x_2 + c_1^i, -b^i x_1 + c_2^i), \quad x = (x_1, x_2) \in \omega_T^i, \quad i = 1, 2.$$

Для построения искомой последовательности $\{W_k\}$ рассмотрим вспомогательные задачи со специальными краевыми условиями и условиями для перемещений на ω_t^1 , ω_t^2 , $t \in (0, T]$. Зафиксируем произвольное значение $t \in (0, T]$ и сформулируем следующие вспомогательные вариационные задачи: найти значения $W_t \in K'_t$, такие что

$$p(W_t) = \inf_{\chi \in K'_t} p(\chi), \quad (9)$$

где

$$p(\chi) = \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\chi - W) \varepsilon_{ij}(\chi - W) dx,$$

$$K'_t = \{\chi \in H(\Omega_\gamma): \chi = W \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \gamma^+ \cup \gamma^-, \quad \chi|_{\omega_t^i} = \rho^i, \quad i = 1, 2\}.$$

В силу неравенства Корна (1) квадратичный функционал $p(\chi)$ является коэрцитивным и слабополунепрерывным снизу в пространстве $H(\Omega_\gamma)$. Нетрудно показать, что множество K'_t выпукло и замкнуто в $H(\Omega_\gamma)$. С учетом строгой выпуклости $p(\chi)$ эти свойства обеспечивают существование единственного решения W_t задачи (9), которая эквивалентна следующему вариационному неравенству (см. [5]):

$$W_t \in K'_t, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_t - W) \varepsilon_{ij}(\chi - W_t) dx \geq 0 \quad \forall \chi \in K'_t. \quad (10)$$

Построим пробную функцию $\hat{W}$, принадлежащую множествам K'_t при всех $t \in (0, T]$. Применяя операторы поднятия для липшицевых областей $O \setminus \overline{\omega_T^1 \cup \omega_T^2}$ и $\Omega \setminus \overline{O}$, зададим функцию $\hat{W} \in H(\Omega_\gamma)$, такую что $\hat{W} = \rho^i$ в ω_T^i , $i = 1, 2$ и $\hat{W} = W$ на $\Gamma_1 \cup \gamma^+ \cup \gamma^-$. Подставляя $\hat{W}$ в качестве пробных функций в (10), получаем

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_t - W) \varepsilon_{ij}(\hat{W}) dx + \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W_t) dx \geq \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_t) \varepsilon_{ij}(W_t) dx \quad \forall t \in (0, T].$$

Отсюда с учетом неравенства Корна следует равномерная по t оценка

$$\|W_t\| \leq c \quad \forall t \in (0, T].$$

Таким образом, из последовательности $\{W_{t_n}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{W_l\}$, которая определяется равенствами $W_l = W_{t_{n_l}}$, $l \in \mathbb{N}$ (далее для элементов подпоследовательности используется обозначение $t_l = t_{n_l}$) и слабо сходится к некоторому пределу $\tilde{W}$ в $H(\Omega_\gamma)$. Покажем далее, что $\tilde{W} = W$ совпадает с заданной функцией.

Поскольку по построению $W_l - W \in H_0^1(\Omega_\gamma)^2$, в силу слабой замкнутости $H_0^1(\Omega_\gamma)^2$ функция $\tilde{W} - W$ принадлежит пространству $H_0^1(\Omega_\gamma)^2$. Рассмотрим комбинации вида $\chi_l^\pm = W_l \pm \varphi$, где φ — произвольная функция в пространстве гладких финитных функций $C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$. Заметим, что $\chi_l^\pm \in K'_l$ при достаточно больших l . Подставим элементы последовательностей χ_l^+ и χ_l^- в качестве пробных функций в неравенства (10), соответствующие параметрам t_l . В результате получаем

$$W_l \in K'_{t_l}, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_l - W) \varepsilon_{ij}(\varphi) dx = 0. \quad (11)$$

Зафиксируем функцию φ . Переходя к пределу $l \rightarrow \infty$ в (11), находим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\tilde{W} - W) \varepsilon_{ij}(\varphi) dx = \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\tilde{W} - W) \varepsilon_{ij}(\varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2.$$

Поскольку пространство $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ является плотным в $H_0^1(\Omega_\gamma)$, получаем $\tilde{W} - W = 0$ в $H_0^1(\Omega_\gamma)^2$. Таким образом, имеет место равенство $\tilde{W} = W$ в $H(\Omega_\gamma)$. Следовательно, существует последовательность $\{W_l\}$, такая что $W_l \in K'_{t_l}$, $l \in \mathbb{N}$ и $W_l \rightarrow W$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $l \rightarrow \infty$.

Докажем сильную сходимост $W_l \rightarrow W$. Согласно теореме Мазура существуют функция $N: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и последовательность действительных чисел $\{\alpha(n)_i: i = n, \dots, N(n)\}$ со свойствами

$$\alpha(n)_i \geq 0, \quad i = n, \dots, N(n), \quad \sum_{i=n}^{N(n)} \alpha(n)_i = 1,$$

такая что последовательность $\{W_n\}$, заданная выпуклой комбинацией

$$W_n = \sum_{i=n}^{N(n)} \alpha(n)_i W_i,$$

сходится к W сильно в $H(\Omega_\gamma)$. Определим искомую последовательность $\{W_k\}$ следующим образом:

$$W_1 = W_{N(1)}, \quad W_2 = W_{N(N(1))}, \quad \dots, \quad W_k = W_{N^k(1)}, \quad \dots$$

Построенная функция W_k принадлежит множеству $K_{t_{N^k(1)}}$, соответствующему подпоследовательности $\{t_{N^k(1)}\}$ последовательности $\{t_n\}$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть U_t — решения задачи минимизации с объемными включениями (3), соответствующие параметрам $t \in (0, T]$, а U_0 — решение задачи с тонкими включениями (7). Тогда $U_t \rightarrow U_0$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $t \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение от противного. Предположим, что существуют число $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{t_n\} \subset (0, T]$, такие что $t_n \rightarrow 0$, $\|U_n - U_0\|_{H(\Omega_\gamma)} \geq \epsilon_0$, где $U_n = U_{t_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) — решения задачи (3), соответствующие t_n . Поскольку $W^0 \equiv 0 \in K_t$ для всех $t \in (0, T]$, подставляя $W = W^0$ в вариационное неравенство (4) для фиксированного $t \in (0, T]$, получаем

$$U_t \in K_t, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t) \varepsilon_{ij}(U_t) dx \leq \int_{\Omega_\gamma} F U_t dx \quad \forall t \in (0, T].$$

Отсюда следует, что для всех $t \in (0, T]$ справедлива равномерная оценка

$$\|U_t\|_{H(\Omega_\gamma)} \leq c$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от t . Заменяя последовательность $\{U_n\}$ ее подпоследовательностью, получаем, что $\{U_n\}$ сходится к некоторой функции $\tilde{U}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$.

Покажем, что $\tilde{U} \in K_0$. Имеем $U_n|_{\omega_{t_n}^i} = \rho_n^i \in R(\omega_{t_n}^i)$, $i = 1, 2$. В соответствии с теоремой вложения Соболева (см. [5])

$$U_n|_\gamma \rightarrow \tilde{U}|_\gamma \quad \text{сильно в } L_2(\gamma^+)^2 \quad \text{и} \quad L_2(\gamma^-)^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Выбирая подпоследовательность, будем считать, что $U_n \rightarrow \tilde{U}$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$ как на γ^+ , так и на γ^- . Это позволяет сделать вывод, что каждая из числовых последовательностей $\{b_n^i\}$, $\{c_{1n}^i\}$, $\{c_{2n}^i\}$, определяющих структуру жестких перемещений ρ_n^i на γ_i , $i = 1, 2$, ограничена по модулю. Выделяя подпоследовательности, для которых сохраняются прежние обозначения с индексом n , находим

$$b_n^i \rightarrow b^i, \quad c_{1n}^i \rightarrow c_1^i, \quad c_{2n}^i \rightarrow c_2^i, \quad i = 1, 2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С учетом сказанного выше и в силу (12) можно сделать вывод, что след на верхнем берегу трещины является функцией с заданной линейной структурой:

$$\tilde{U}|_{\gamma_i^+} = \rho^i = (b^i x_2 + c_1^i, -b^i x_1 + c_2^i) \quad \text{на } \gamma_i,$$

т. е. $\rho^i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$. Справедливость условия непроникания (2) для предельной функции $\tilde{U}$ следует из существования подпоследовательности, такой что $\{U_{n_k}\} \rightarrow \tilde{U}$ почти всюду на γ (см., например, [5, 32]). Таким образом, $\tilde{U} \in K_0$.

Докажем, что предел $\tilde{U} = U_0$ совпадает с решением задачи (7). Для этого покажем возможность предельного перехода в неравенствах (4). Согласно лемме для любого $W \in K_0$ существуют подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$, таких что $W_k \in K_{t_k}$ и $W_k \rightarrow W$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$. Вследствие слабой сходимости $U_n \rightarrow \tilde{U}$ это позволяет перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве (4) для $t = t_k$ и пробных функций W_k , $k = 1, 2, \dots$:

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_{n_k}) \varepsilon_{ij}(W_{n_k} - U_{n_k}) dx \geq \int_{\Omega_\gamma} F(W_{n_k} - U_{n_k}) dx.$$

В пределе получаем вариационное неравенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\tilde{U}) \varepsilon_{ij}(W - \tilde{U}) dx \geq \int_{\Omega_\gamma} F(W - \tilde{U}) dx \quad \forall W \in K_0.$$

Однозначная разрешимость этого неравенства доказывает тождество $\tilde{U} \equiv U_0$.

Докажем сильную сходимость $U_n \rightarrow U_0$ в $H(\Omega_\gamma)$. Из вариационного неравенства (4) для некоторого $t \in (0, T]$ в результате подстановки $W = 2U_t$ и $W = 0$ получаем равенство

$$U_t \in K_t, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t) \varepsilon_{ij}(U_t) dx = \int_{\Omega_\gamma} F U_t dx \quad \forall t \in (0, T]. \quad (13)$$

Из уравнения (13) наряду со слабой сходимостью $U_n \rightarrow U_0$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n) \varepsilon_{ij}(U_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\gamma} F U_n dx = \int_{\Omega_\gamma} F U_0 dx = \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(U_0) dx.$$

С учетом эквивалентности норм (см. замечание 1) последнее равенство означает сильную сходимость $U_n \rightarrow U_0$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$.

Заключение. Проведен анализ семейства вариационных задач (3), описывающих равновесие упругих тел с двумя шарнирно соединенными объемными включениями варьируемой ширины $t \in (0, T]$. Нелинейность исследованных задач обусловлена тем, что на кривой, описывающей трещину на границе включений, заданы условия непроникания типа неравенств. Доказано, что задача для тела с шарнирно соединенными тонкими включениями (7) может быть представлена как предельная для семейства задач (3) с двумя шарнирно соединенными объемными включениями. При этом установлена сильная сходимость решений U_t задач (3) к решению U_0 задачи (7) при $t \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dal Corso F., Bigoni D., Gei M. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Pt 1. Full-field solution and asymptotics // J. Mech. Phys. Solids. 2008. V. 56, N 3. P. 815–838.
2. Il'ina I. I., Sil'vestrov V. V. The problem of a thin interfacial inclusion detached from the medium along one side // Mech. Solids. 2005. V. 40, N 3. P. 123–133.
3. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. angew. Math. Mech. 2012. Bd 92, N 9. S. 716–730.
4. Xiao Z. M., Chen B. J. Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // Intern. J. Fracture. 2001. V. 108. P. 193–205.
5. Khludnev A. M. Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunencko. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
6. Khludnev A., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Methods Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
7. Lazarev N. P., Rudoy E. M. Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // Z. angew. Math. Mech. 2017. Bd 97, N 9. S. 1120–1127.
8. Lazarev N. Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff — Love plate // Boundary Value Problems. 2015. V. 2015. 180.
9. Rudoy E. M. The Griffith formula and Cherepanov — Rice integral for a plate with a rigid inclusion and a crack // J. Math. Sci. 2012. V. 186, N 3. P. 511–529.

10. **Rudoy E. M.** Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion // *J. Appl. Industr. Math.* 2016. V. 10, N 2. P. 264–276.
11. **Faella L., Khludnev A.** Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 39, N 12. P. 3381–3390.
12. **Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S.** Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Math. Mech. Solids.* 2017. V. 22, N 4. P. 737–750.
13. **Shcherbakov V. V.** The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *Z. angew. Math. Mech.* 2016. Bd 96, N 11. S. 1306–1317.
14. **Shcherbakov V. V.** Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // *Z. angew. Math. Phys.* 2016. Bd 67, N 3. 71.
15. **Itou H., Kovtunen V. A., Rajagopal K. R.** Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration // *Math. Mech. Solids.* 2017. V. 22, N 6. P. 1334–1346.
16. **Sokołowski J., Źochowski A.** Topological derivatives for optimization of plane elasticity contact problems // *Engng Anal. Boundary Elements.* 2008. V. 32. P. 900–908.
17. **Sokołowski J.** Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis / J. Sokołowski, J. P. Zolésio. Berlin: Springer, 1992.
18. **Ghilli D., Kunisch K., Kovtunen V. A.** Inverse problem of breaking line identification by shape optimization // *J. Inverse Ill-Posed Problems.* 2020. V. 28, N 1. P. 119–135.
19. **Cakoni F., Kovtunen V. A.** Topological optimality condition for the identification of the center of an inhomogeneity // *Inverse Problems.* 2018. V. 34, N 3. 035009.
20. **Novotny A. A.** Topological derivatives in shape optimization. Ser. Interaction of mechanics and mathematics / A. A. Novotny, J. Sokołowski. Berlin: Springer-Verlag, 2013.
21. **Hintermüller M., Laurain A.** Optimal shape design subject to variational inequalities // *SIAM J. Control Optimizat.* 2011. V. 49. P. 1015–1047.
22. **Furtsev A., Rudoy E.** Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff — Love theory of plates // *Intern. J. Solids Structures.* 2020. V. 202. P. 562–574.
23. **Leugering G., Sokolowski J., Zochowski A.** Control of crack propagation by shape-topological optimization // *Discret. Continuous Dynamic Systems. Ser. A.* 2015. V. 35, N 6. P. 2625–2657.
24. **Kovtunen V. A., Leugering G.** A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model // *SIAM J. Control Optimizat.* 2016. V. 54, N 3. P. 1329–1351.
25. **Rudoy E. M., Itou H., Lazarev N. P.** Asymptotic justification of the models of thin inclusions in an elastic body in the antiplane shear problem // *J. Appl. Industr. Math.* 2021. V. 15. P. 129–140.
26. **Rudoy E. M.** Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // *Z. angew. Math. Phys.* 2015. Bd 66, N 4. S. 1923–1937.
27. **Rudoy E., Shcherbakov V.** First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // *Appl. Math. Optimizat.* 2021. V. 84. P. 2775–2802.
28. **Khludnev A., Esposito A. C., Faella L.** Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // *J. Optimizat. Theory Appl.* 2020. V. 184. P. 293–314.
29. **Khludnev A. M., Popova T. S.** On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body // *Z. angew. Math. Mech.* 2020. Bd 100, N 8. e202000063.
30. **Khludnev A. M.** Inverse problems for elastic body with closely located thin inclusions // *Z. angew. Math. Phys.* 2019. Bd 70, N 5. 134.
31. **Khludnev A. M., Shcherbakov V. V.** Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler — Bernoulli inclusions // *Math. Mech. Solids.* 2017. V. 22, N 11. P. 2180–2195.

32. **Lazarev N. P.** Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Z. angew. Math. Mech. 2016. Bd 96, N 4. S. 509–518.
33. **Khludnev A. M.** Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // Mech. Solids. 2010. V. 45, N 5. P. 733–742.
34. **Neustroeva N. V.** A rigid inclusion in the contact problem for elastic plates // J. Appl. Industr. Math. 2010. V. 4, N 4. P. 526–538.
35. **Khludnev A. M.** On bending an elastic plate with a delaminated thin rigid inclusion // J. Appl. Industr. Math. 2011. V. 5. P. 582–594.
36. **Hlavaček I.** Solution of variational inequalities in mechanics / I. Hlavaček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek. N. Y.: Springer-Verlag, 1988.
37. **Khludnev A. M.** Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // Europ. J. Mech. A. Solids. 2010. V. 29, N 3. P. 392–399.

*Поступила в редакцию 23/III 2023 г.,
после доработки — 10/IV 2023 г.
Принята к публикации 24/IV 2023 г.*
