УДК 532.5.0727.12

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ЗАКОНЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДАРСИ

В. П. Бушланов, И. В. Бушланов, Е. Н. Сентякова

Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова, 353925 Новороссийск
E-mail: bvp@ngs.ru

С использованием осредненного по объему фильтра уравнения "живых сил", полученного из уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости, с точностью до главных членов по числу Пуазейля выведена аналитическая формула для коэффициента проницаемости в классической задаче Дарси. Показано, что полученное значение коэффициента проницаемости обратно пропорционально квадрату удельной площади поверхности и безразмерной средней скорости диссипации кинетической энергии жидкости в фильтре.

Ключевые слова: закон Дарси, коэффициент проницаемости, удельная площадь поверхности.

Введение. Классический закон фильтрации Дарси имеет вид

$$\boldsymbol{V} = (k/\mu)\nabla P,$$

где μ, $\boldsymbol{V}$, P — динамическая вязкость, средние скорость и давление фильтруемой жидкости соответственно; k — коэффициент проницаемости. Схема эксперимента Дарси приведена на рисунке (см. [1]). Коэффициент k определяется экспериментально с использованием модели пористой среды и некоторых гипотез. Считается, что k зависит от пористости и формы открытых пор. В [2] приведено выражение

$$k = d_{\mathit{eff}}^2 \,\mathrm{Sl}\,(\alpha_i, \varepsilon),$$

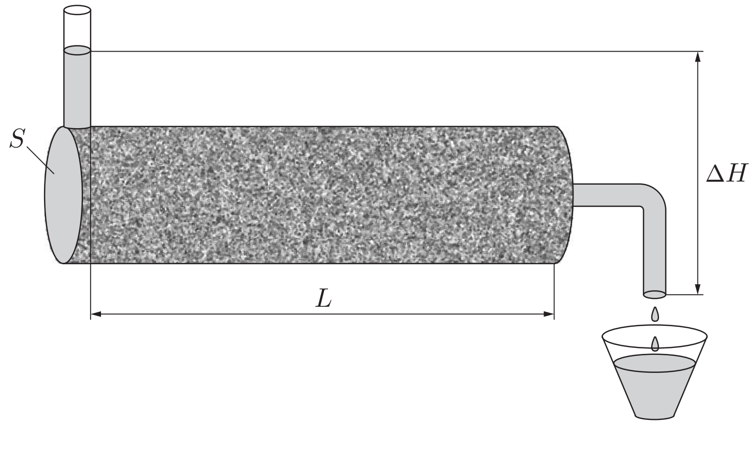

Схема эксперимента Дарси [1]

© Бушланов В. П., Бушланов И. В., Сентякова Е. Н., 2013

где d_{eff} — эффективный диаметр частиц, из которых состоит пористая среда; Sl — безразмерный коэффициент (число Слихтера), зависящий от пористости среды α и параметра структуры порового пространства ε, в свою очередь зависящего от формы частиц, из которых состоит среда, и от так называемого коэффициента извилистости ξ.

Согласно гипотезе Козени — Кармана [3]

$$k = \alpha^2/[K(1-\alpha^2)S_{12}^2],$$

где S_{12} — удельная площадь поверхности пор; K — коэффициент формы.

В настоящей работе для классической задачи Дарси коэффициент проницаемости определен теоретически из уравнений Навье — Стокса с точностью до главных членов по числу Пуазейля $\mathrm{Po} = (L/r)^2 \gg 1$, где $r = 2\alpha/S_{12}$ — средний поперечный размер пор; L — длина фильтра.

Уравнение "живых сил". Уравнение "живых сил" получим из уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, содержащейся внутри пор:

$$\nabla^k V^k = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla^k (\boldsymbol{V} V^k) = \frac{1}{\rho} \nabla^k \sigma^k + \boldsymbol{g}. \tag{1}$$

Здесь $\sigma^k = (-p\delta^{kq} + 2\mu e^{kq})\boldsymbol{e}^q$ — тензор напряжений в жидкости; $e^{kq} = (\nabla^k V^q + \nabla^q V^k)/2$; ρ — плотность несжимаемой жидкости; $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости жидкости; t — время; $\nabla^k = \partial/\partial x^k$; $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения; p — давление жидкости; $\boldsymbol{e}^q$ $(q = 1, 2, 3)$ — единичные векторы декартовой системы координат; x^1, x^2, x^3 — координаты радиус-вектора $\boldsymbol{x}$.

Вводя функцию напора $\Phi = -p/\rho - \boldsymbol{V}^2/2 + \boldsymbol{g}\boldsymbol{x}$ и учитывая первое уравнение (1), запишем второе уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} = \nabla\Phi + 2\nu \boldsymbol{e}^p \nabla^q e^{pq}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}$; $\nu = \mu/\rho$. Умножим скалярно уравнение (2) на вектор $\boldsymbol{V}$. С учетом уравнения неразрывности и тождества $e^{pq}(\nabla^p V^q - \nabla^q V^p) = 0$ получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \boldsymbol{V}^2}{\partial t} = \nabla\,(\Phi\boldsymbol{V}) + 2\nu\nabla^q(V^p e^{pq}) - 2\nu(e^{pq})^2. \tag{3}$$

Проинтегрируем (3) по объему жидкости W, содержащейся в порах фильтра, а также в подводящей и отводящей трубках (см. рисунок), и в первых двух слагаемых правой части полученного уравнения перейдем к поверхностным интегралам. С учетом равенства нулю скорости на твердых стенках трубок и поверхности пор имеем уравнение "живых сил"

$$\frac{W}{2}\,\frac{\partial\langle \boldsymbol{V}^2\rangle_W}{\partial t} + 2\nu W\langle (e^{pq})^2\rangle_W = \int\limits_{S_1+S_2} [\Phi(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n}) + \nu(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}) + \nu(\boldsymbol{n}\nabla)\,\boldsymbol{V}^2]\,ds,$$

где $W\langle \boldsymbol{V}^2\rangle_W = \displaystyle\int\limits_W \boldsymbol{V}^2\,dw$; S_1, S_2 — плоские сечения трубок, одна из которых подводит к фильтру жидкость, а другая отводит ее (см. рисунок).

Безразмерная форма уравнения "живых сил". Введем безразмерные (отмеченные знаком "$\sim$") параметры:

$$\boldsymbol{x} = r\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad t = \tilde{t}L/V_0, \quad \Phi = (\Phi_2 - \Phi_1)\tilde{\Phi}, \quad \boldsymbol{V} = V_0\tilde{\boldsymbol{V}}.$$

Здесь V_0 — масштаб скорости; $\Phi_2 - \Phi_1$ — разность напоров на длине L. При этом справедливо соотношение

$$\frac{G\Phi_k}{\rho} = \int\limits_{S_k} \Phi(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n})\, ds,$$

где $k = 1, 2$; G — массовый расход жидкости. Заметим, что средний эквивалентный радиус сечения открытых пор $r \ll L$.

Покажем, что r порядка $2\alpha/S_{12}$. Искомую оценку можно получить из уравнения $\alpha = S_{12}r/2$, которое означает, что объем порового пространства равен произведению половины удельной площади поверхности и среднего расстояния между частицами.

Уравнение “живых сил” в безразмерном виде записывается следующим образом (знак “$\sim$” опускается):

$$\frac{\partial \langle \boldsymbol{V}^2\rangle_W}{2\partial t} + 2\,\frac{L^2}{r^2}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\langle (e^{pq})^2\rangle_W = \\ = \frac{s}{\alpha S} \int\limits_{S_1+S_2} \Big[\mathrm{Eu}\,\Phi(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n}) + \frac{L}{r}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}) + \frac{L}{r}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\,(\boldsymbol{n}\nabla)\boldsymbol{V}^2\Big]\, ds. \quad (4)$$

Здесь $\mathrm{Eu} = (\Phi_2 - \Phi_1)/V_0^2$, $\mathrm{Re} = LV_0/\nu$ — безразмерные числа Эйлера и Рейнольдса; S — площадь сечения фильтра; s — площади сечений подводящей и отводящей трубок; $W = \alpha LS$ (объем трубок пренебрежимо мал по сравнению с объемом пор фильтра).

Пусть $r = 1/S_{12}$, $V_0 = \rho(\Phi_2 - \Phi_1)/(L\mu S_{12}^2)$. Тогда

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho^2(\Phi_2 - \Phi_1)}{\mu^2 S_{12}^2}, \qquad \mathrm{Po} = \frac{\rho_0(\Phi_2 - \Phi_1)L}{\mu V_0} = (LS_{12})^2 = \Big(\frac{L}{r}\Big)^2,$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{(LS_{12})^2}{\mathrm{Re}} = \frac{\mathrm{Po}}{\mathrm{Re}}.$$

Заметим, что формула, выбранная для V_0, имеет вид, аналогичный закону Дарси, а из неравенства $r \ll L$ следует, что $\mathrm{Po} = (LS_{12})^2 \gg 1$. Разделив левую и правую части уравнения (4) на $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Po}$, получим уравнение

$$\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Po}}\,\frac{\partial \langle \boldsymbol{V}^2\rangle_W}{2\,\partial t} + 2\,\langle (e^{pq})^2\rangle_W = \\ = \frac{s}{\alpha S} \int\limits_{S_1+S_2} \Big[\Phi(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n}) + \frac{1}{\mathrm{Po}^{1/2}}\,(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}) + \frac{1}{\mathrm{Po}^{1/2}}\,(\boldsymbol{n}\nabla)\boldsymbol{V}^2\Big]\, ds. \quad (5)$$

Приближенное уравнение “живых сил” с точностью до главных членов по числу Пуазейля. Сохраняя в уравнении (5) только главные члены с точностью до членов $O(\mathrm{Po}^{-1/2})$ (в торцевых сечениях трубок векторы скоростей и нормалей параллельны, а производные квадратов скоростей вдоль оси трубок малы) и вновь переходя к размерным переменным, получаем следующее приближенное уравнение “живых сил”:

$$2\nu W \langle (e^{pq})^2\rangle_W = \int\limits_{S_1+S_2} [\Phi(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n})]\, ds. \quad (6)$$

Заметим, что это уравнение проще получить из уравнения “живых сил” в размерном виде, отбрасывая слагаемые, соответствующие малым слагаемым уравнения (5) в безразмерном виде.

Так как $\rho(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n})\,ds = dG$ — массовый расход жидкости через сечение ds, то правая часть уравнения имеет вид

$$\int\limits_{S_1+S_2} [\Phi(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n})]\,ds = \frac{(\Phi_2-\Phi_1)G}{\rho}.$$

Левую часть приближенного размерного уравнения запишем в безразмерном виде, вводя безразмерную скорость с масштабирующим множителем $V_0 = V = G/(\alpha\rho S)$ и безразмерные координаты с масштабирующим множителем $r = 2\alpha/S_{12}$. (Следует отметить, что новый масштаб скорости $V_0 = V$ отличается от масштаба скорости, выбранного ранее.) Тогда уравнение (6) преобразуется к виду

$$\frac{2\langle(\tilde{e}^{pq})^2\rangle_W \nu\alpha SLV^2}{(2\alpha/S_{12})^2} = (\Phi_2-\Phi_1)\alpha VS,$$

откуда следует уравнение Дарси

$$V = \frac{k}{\nu}\,\frac{\Phi_2-\Phi_1}{L}, \qquad (7)$$

где $k = 4\alpha^2/[S_{12}^2\langle 2(\tilde{e}^{pq})^2\rangle_W]$; $\tilde{e}^{pq} = e^{pq}/(V/(2\alpha/S_{12}))$.

Выводы. Порядок величины безразмерного коэффициента проницаемости $\tilde{k} = kS_{12}^2$ определяется знаменателем дроби, который равен среднему по объему жидкости безразмерному значению скорости диссипации кинетической энергии. Если масштаб модуля производной скорости $V/(2\alpha/S_{12})$ выбран верно, то безразмерная скорость диссипации порядка единицы и $\tilde{k} \sim 4\alpha^2$. Из уравнения (7) следует, что коэффициент проницаемости k определяется не только формой пор фильтра, но и средней безразмерной скоростью диссипации кинетической энергии, поэтому указанный коэффициент можно определить, выполнив прямые численные расчеты уравнений Навье — Стокса (для этого требуется задать граничное условие для давления в сечении отводящей трубки, которое определяется из уравнения (7)).

Докажем следующее утверждение: в задаче Дарси течение с малыми силами инерции (удовлетворяющее уравнениям Стокса) имеет наименьшую общую скорость диссипации среди всех течений несжимаемой жидкости в той же области, если расходы жидкости для всех течений равны, давления в течении с минимальной скоростью диссипации на торцах трубок постоянны, векторы скоростей $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}_v$ на торцах ($\boldsymbol{V}$ — скорость течения с малыми силами инерции; $\boldsymbol{V}_v$ — скорость любого другого течения) параллельны осям трубок, а на поверхностях трубок и пор скорости равны нулю. Схема доказательства аналогична схеме доказательства в [4. С. 290]. С учетом сформулированных выше предположений из уравнения (6) следует

$$\int\limits_W (e_v^{pq}-e^{pq})e^{pq}\,dw = \int\limits_W (e_v^{pq}-e^{pq})\nabla^p V^q\,dw =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{S_1+S_2} [(\boldsymbol{V}_v-\boldsymbol{V})(\boldsymbol{n}\nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{n}((\boldsymbol{V}_v-\boldsymbol{V})\nabla)\boldsymbol{V}]\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_W (\boldsymbol{V}_v-\boldsymbol{V})\Delta\boldsymbol{V}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\int\limits_W (\boldsymbol{V}_v-\boldsymbol{V})(\nabla p-\rho\boldsymbol{g}) + \int\limits_{S_1+S_2} [(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{V}_v-\boldsymbol{V}))(\boldsymbol{n}\nabla)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{V})]\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\mu_i}\int\limits_{S_1+S_2} p\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{V}_v-\boldsymbol{V})\,ds = 0.$$

Таким образом,

$$2\mu \int\limits_W e_v^{pq} e_v^{pq}\, dw = 2\mu \int\limits_W [e^{pq} e^{pq} + (e_v^{pq} - e^{pq})(e_v^{pq} - e^{pq})]\, dw. \qquad (8)$$

Из уравнения (8) получаем доказываемое утверждение. Так как в размерном виде уравнение (7) можно записать следующим образом:

$$\langle 2(e^{pq})^2 \rangle_W = G(\Phi_2 - \Phi_1)/(\mu W),$$

то из этого утверждения следует минимальность разности напоров при заданном расходе (или минимальность расхода при заданной разности напоров).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ентов В. М.** Теория фильтрации // Сорос. образоват. журн. 1998. № 2. С. 121–128.
2. **Лейбензон Л. С.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. **Гольдберг В. М.** Проницаемость и фильтрация в глинах / В. М. Гольдберг, Н. П. Скворцов. М.: Недра, 1986.
4. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 16/I 2012 г.,
в окончательном варианте — 26/II 2013 г.