



**ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА В ЗАДАЧЕ О ВНЕДРЕНИИ КЛИНОВИДНОГО  
ИНСТРУМЕНТА В МАССИВ ГОРНЫХ ПОРОД**

**А. И. Чанышев**

*Новосибирский государственный университет экономики и управления,  
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, ул. Каменская 56, г. Новосибирск 630099, Россия  
Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

Решается задача о внедрении абсолютно жесткого индентора в виде круглого конуса в весо-мную горную породу (осесимметричная задача теории пластичности). Определяется предельная нагрузка, зависящая от угла внутреннего трения породы, сцепления, раствора угла при вершине конуса, веса породы. Приводится зависимость нагрузки от указанных параметров.

*Пластичность, полная пластичность, условие Кулона–Мора, вес породы, индентор, коническая головка, осесимметричная задача, предельная нагрузка*

**LIMITING LOAD IN THE PROBLEM OF A WEDGE-SHAPED  
INSTRUMENT PENETRATION INTO THE ROCK MASS**

**A. I. Chanyshev**

*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch Russian Academy of Sciences.,  
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, 54 Krasny prospect, Novosibirsk, 630091, Russia  
Novosibirsk State University of Economics and Management,  
ul. Kamenskaya 52, Novosibirsk 630099, Russia*

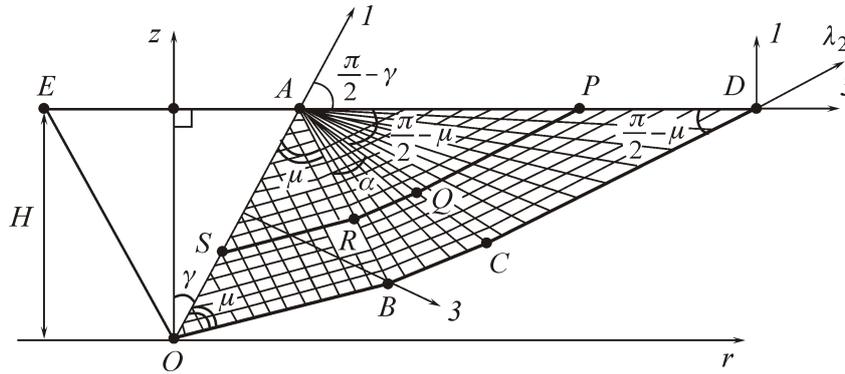
The problem of penetrating an absolutely rigid indenter in the form of a round cone into a weighted rock (an axisymmetric plasticity problem) is being solved. Limiting load is determined, depending on the internal friction angle of rock, adhesion, angular opening at the top of cone, rock weight. The dependence of load on the above parameters is given.

*Plasticity, complete plasticity, Coulomb–Mohr condition, rock weight, indenter, conic head, axisymmetric problem, limiting load*

Задачи о вдавливании жесткого штампа в деформируемую среду рассматривались в [1–6], о внедрении жесткого клина в [7–10], осесимметричные задачи о вдавливании штампов исследовались в [11–13]. Основные особенности решений [1–13] — применение математических моделей пластичности по схеме жесткопластического тела с пренебрежением упругих деформаций, проведение расчетов с применением метода характеристик. Применительно к геопроблемам задачи в основном касались расчетов оснований и фундаментов [12, 13]. Между тем для горного дела не менее важны ещё и расчеты породоразрушающих инструментов, в том числе подвод необходимой энергии для разрушения той или иной горной породы. При этом есть потребность в изучении влияния веса породы на значения предельных нагрузок.

Пусть в массив горных пород внедряется жесткий конусообразный инструмент с углом раствора при вершине равным  $2\gamma$ . Материал вокруг внедряемого инструмента — горная порода. Трением на контакте “инструмент–порода” для упрощения вычислений пренебрежем.

Требуется определить такую нагрузку, приложенную к инструменту по границе  $EOA$ , при которой вокруг конуса образуется пластическая область, как показано на рисунке.



Внедрение индентора в горную породу

Задача решается в осесимметричной постановке. Тензор напряжений и деформаций при этом имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{rz} & 0 \\ \tau_{rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi} \end{pmatrix}, \quad T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{rz} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r}$ ,  $\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$ ;  $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ ,  $r, z, \varphi$  — оси цилиндрической системы координат.

Главные оси тензоров  $T_{\sigma}$ ,  $T_{\varepsilon}$  обозначим как 1, 2, 3, при этом  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Для описания пластического состояния среды используем условие Кулона – Мора:

$$\max_n \{ \tau_n + \operatorname{tg} \psi \sigma_n \} = \kappa, \quad (2)$$

где  $\kappa, \psi$  — константы горной породы;  $\sigma_n, \tau_n$  — нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью  $\vec{n}$ . Далее, поскольку в состоянии (2)

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \psi, \quad \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \psi, \quad (3)$$

что следует из рассмотрения диаграммы Мора для напряжений [2], то вместо (2) получаем уравнение

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cos \psi} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg} \psi = \kappa. \quad (4)$$

На (4) не влияет второе главное напряжение  $\sigma_2$ . С другой стороны в теории пластичности существует такое понятие как состояние полной пластичности, для которого два главных напряжения ( $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ) совпадают. Для такого состояния система уравнений равновесия для напряжений становится гиперболического типа [2, 14, 15]. Эта гипотеза принимается также здесь. Поскольку напряжение  $\sigma_{\varphi}$  в силу (1) является главным, то равенство двух главных напряжений означает, что

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{rz}^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{rz}^2} = \sigma_2 = \sigma_{\varphi}. \quad (5)$$

Для описания состояний (4), (5) вводятся обозначения

$$\sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2}, \quad \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{rz}}{\sigma_r - \sigma_z},$$

где  $\theta$  – угол между первым направлением для тензора  $T_\sigma$  и осью  $r$  на рисунке. Решается совместно следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, & \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\gamma_\epsilon, \\ \frac{\tau}{\cos \psi} + \sigma \operatorname{tg} \psi = \kappa, & \sigma_r = \sigma + \tau \cos 2\theta, \quad \sigma_z = \sigma - \tau \cos 2\theta, \quad \tau_{rz} = \tau \sin 2\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma - \tau, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\gamma_\epsilon$  — удельный вес среды.

Как результат находятся характеристики системы дифференциальных уравнений равновесия в виде:

$$\lambda_1 = \left(\frac{dz}{dr}\right)_1 = \operatorname{tg}(\theta + \mu)m, \quad \lambda_2 = \left(\frac{dz}{dr}\right)_2 = \operatorname{tg}(\theta - \mu), \quad (7)$$

где углы  $\mu$  и  $\psi$  связаны соотношением

$$\mu = \pi/4 + \psi/2. \quad (8)$$

Кроме того, на каждой из характеристик (7) определяются соотношения, связывающая дифференциалы  $d\theta$ ,  $d\sigma$ ,  $dr$  функций  $\theta = \theta(r, z)$ ,  $\sigma = \sigma(r, z)$  и координату  $r$ . Для характеристики  $\lambda_1$  соотношение получается в виде

$$2d\theta + \frac{\sin 2\mu}{\sigma \cos 2\mu + a} d\sigma + \left[ \frac{2 \cos \theta \sin \mu}{r \cos(\theta + \mu)} + \gamma_\epsilon \frac{\cos(\theta - \mu)}{(\sigma \cos 2\mu + a) \cos(\theta + \mu)} \right] dr = 0, \quad (9)$$

для характеристики  $\lambda_2$ :

$$2d\theta - \frac{\sin 2\mu}{\sigma \cos 2\mu + a} d\sigma + \left[ -\frac{2 \cos \theta \sin \mu}{r \cos(\theta - \mu)} + \gamma_\epsilon \frac{\cos(\theta - \mu)}{(\sigma \cos 2\mu + a) \cos(\theta - \mu)} \right] dr = 0, \quad (10)$$

где  $a = \kappa \cos \psi$ .

Дальнейшая задача состоит в применении соотношений (7)–(10) к решению поставленной задачи. Решение начинаем строить, двигаясь от точек границы  $AD$  на рисунке к точкам границы  $OA$  (по линии  $PQRS$ ). На границе  $AD$  напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  равны нулю – контур свободен от напряжений. С другой стороны треугольник  $ACD$  при внедрении клина  $EOA$  в массив пород будет поджат с боков, т.е. тангенциальное напряжение  $\sigma_r$  на границе  $AD$  будет сжимающим. Это означает, что первым главным напряжением на  $AD$  будет напряжение  $\sigma_z$  и угол между первым главным направлением для тензоров  $T_\sigma$  и  $T_\epsilon$  становится равным  $\pi/2$ , т. е.

$$\theta|_{AD} = \pi/2. \quad (11)$$

При этом характеристиками, образующими острый угол с осью  $Or$  будут характеристики семейства  $\lambda_2$ , они образуют угол с осью  $Or$  со значением  $\pi/2 - \mu = \pi/4 - \psi/2$ . На границе  $AD$  выполняется условие пластичности (4), где  $\sigma_1 = \sigma_z = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_r$ , поэтому

$$\sigma_3 = -\frac{2\kappa \cos \psi}{1 - \sin \psi} = -2\kappa \operatorname{tg} \mu, \quad \sigma|_{AD} = -\kappa \operatorname{tg} \mu. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь треугольник  $OAB$ . Здесь направления главных осей 1, 3 указаны на рисунке (вдоль отрезка  $OA$  тангенциальное напряжение  $\sigma_t$  будет отрицательным, но его абсолютное значение меньше абсолютного значения сжимающего напряжения  $\sigma_3$ , совпадающего с нормальным напряжением  $\sigma_n$  на  $OA$ ). Значение угла  $\theta$  на  $OA$ , в силу указанного расположения главных осей, равно

$$\theta|_{OA} = \pi/2 - \gamma, \quad (13)$$

где  $2\gamma$  — раствор угла при вершине  $O$  инструмента конической формы, внедряемого в массив пород.

Напряжение  $\sigma_3 = -p$ , где величина давления  $p$  определится далее из решения задачи. На границе  $OA$  справедливо (4), откуда при  $\sigma_3 = -p$  следует

$$\sigma_1 = 2\kappa \operatorname{ctg} \mu - p \operatorname{ctg}^2 \mu, \quad \sigma|_{OA} = \kappa \operatorname{ctg} \mu - \frac{p}{2 \sin^2 \mu}. \quad (14)$$

Угол, который образует характеристика семейства  $\lambda_2$  с осью  $Or$ , на основе (7), (13) получается равным  $\pi/2 - \gamma - \mu$ . Поэтому угол  $\angle BOA \leq \mu$ . Поскольку треугольник  $OAB$  является равнобедренным, то и угол  $\angle OAB$  также совпадает с  $\mu$ . Следовательно угол  $\angle EAB$  получается равным  $\pi/2 - \gamma + \mu$ . Вычисляя угол  $\angle EAC$ , находим его значение  $\pi - \angle CAD$ , но  $\angle CAD = \angle ADC = \pi/2 - \mu$  и таким образом угол  $\angle EAC = \pi/2 + \mu$ . Сравнивая углы  $\angle EAB$  и  $\angle EAC$ , находим, что  $\angle BAC = \gamma$ . Далее в треугольниках  $OAB$  и  $ACD$  предполагаем, что угол  $\theta$  постоянен.

Рассмотрим центрированное поле  $BAC$ . Для его описания используем полярные координаты  $\rho, \chi$ :

$$r - r_A = \rho \cos \chi, \quad z - z_A = \rho \sin \chi. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (7), находим зависимости

$$\begin{cases} (\lambda_1): (d\rho \sin \chi + \rho \cos \chi d\chi) \cos(\theta + \mu) = (d\rho \cos \chi - \rho \sin \chi d\chi) \sin(\theta + \mu), \\ (\lambda_2): (d\rho \sin \chi + \rho \cos \chi d\chi) \cos(\theta + \mu) = (d\rho \cos \chi - \rho \sin \chi d\chi) \sin(\theta + \mu) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\lambda_1): d\rho(\sin \chi \cos(\theta + \mu) + \cos \chi \sin(\theta + \mu)) = -\rho(\cos \chi \cos(\theta + \mu) + \sin \chi \sin(\theta + \mu))d\chi, \\ (\lambda_2): d\rho(\sin \chi \cos(\theta - \mu) - \cos \chi \sin(\theta - \mu)) = -\rho(\cos \chi \cos(\theta - \mu) + \sin \chi \sin(\theta - \mu))d\chi. \end{cases} \quad (16)$$

Полагая, что характеристиками семейства  $\lambda_1$  являются прямые линии, удовлетворяющие уравнению  $\chi = \operatorname{const}$ , выходящими из точки  $A$ , то для этих линий имеем равенство  $d\chi = 0$  и из первого уравнения (16) следует, что при этом должно быть выполнено требование  $\sin(\chi - \theta - \mu) = 0$  или следующая зависимость  $\chi - \theta - \mu = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел. Анализируя рисунок замечаем, что на границе  $AB$  угол  $\theta = \theta|_{OA} = \pi/2 - \gamma$  и полярный угол  $\chi = -(\pi/2 + \gamma - \mu)$ , поэтому в предыдущем выражении следует положить  $n = -1$ , то есть  $\chi = \theta + \mu - \pi$ . Подставляя это условие во второе уравнение (16) замечаем, что

$$d\rho \sin(\chi - \theta + \mu) = -\rho \cos(\chi - \theta + \mu)d\chi,$$

или

$$d\rho \sin 2\mu = -\rho \cos 2\mu d\chi. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\frac{d\rho}{\rho d\chi} = -\operatorname{ctg} 2\mu.$$

или

$$\rho = \rho_0 e^{-(\chi - \chi_0) \operatorname{ctg} 2\mu}. \quad (18)$$

Полагаем здесь, что  $\chi_0 = -\pi/2 + \mu$ . Тогда для  $\chi = \chi_0$  получаем  $\rho = \rho_0 = AQ$ , для  $\chi = -\pi/2 + \mu - \gamma$ ,  $\rho = \rho_0 e^{\gamma \operatorname{ctg} 2\mu} = AR$ , при этом  $\rho < \rho_0$  или  $AR < AQ$  как изображено на рисунке.

Дальнейшие шаги решения – соединить все эти три состояния, распределенные в треугольниках  $ACD$ ,  $OAB$ , секторе  $BAC$  в одно целое, используя соотношения на характеристиках (10). Расчет начинаем вести, двигаясь от границы  $AD$ , в предположении, что во всем треугольнике  $ACD$  угол  $\theta = \pi/2$ . Подставляя это значение в (10), получаем уравнение

$$-\sin 2\mu \frac{d\sigma}{dr} = \gamma_\epsilon,$$

после интегрирования которого находим выражение для  $\sigma$  в виде

$$\sigma = -\frac{\gamma_\epsilon}{\sin 2\mu} r + C, \quad (19)$$

где  $C$  — константа интегрирования. В точке  $P$  изображенной на рисунке значения  $r = r_p$ , при этом  $r_A \leq r_p \leq r_D$ , где  $r_A = H \operatorname{tg} \gamma$ ,  $H$  — глубина погружения инструмента,  $r_D = H \operatorname{tg} \mu e^{-\gamma \operatorname{ctg} 2\mu} / \cos \gamma$ . Значение  $\sigma$  в точке  $P$  согласно (12) равняется  $\sigma = -\kappa \operatorname{tg} \mu$ . На основании этих данных константа интегрирования

$$C = -\kappa \operatorname{tg} \mu + \gamma_\epsilon r_p / \sin 2\mu,$$

поэтому значение  $\sigma$  вдоль линии  $PQ$  в треугольнике  $ACD$  определяется выражением

$$\sigma = -\kappa \operatorname{tg} \mu + \gamma_\epsilon (r_p - r) / \sin 2\mu,$$

в частности при  $r = r_Q$

$$\sigma_Q = -\kappa \operatorname{tg} \mu + \gamma_\epsilon (r_p - r_Q) / \sin 2\mu. \quad (20)$$

Поскольку  $r_p \leq r_Q$ , то  $|\sigma_Q| \geq |\sigma_p|$ .

Рассмотрим отрезок  $SR$  ломаной  $PQRS$ . Здесь также как при рассмотрении треугольника  $ACD$  считается, что в треугольнике  $OAB$  угол  $\theta$  также сохраняет постоянное значение (13), поэтому  $d\theta = 0$  и уравнение (10) преобразуется в

$$-\operatorname{tg} 2\mu d(\sigma \cos 2\mu + a) + \left[ -\frac{2 \sin \gamma \sin \mu}{r \sin(\gamma + \mu)} (\sigma \cos 2\mu + a) + \gamma_\epsilon \frac{\sin(\gamma - \mu)}{\sin(\gamma + \mu)} \right] dr = 0. \quad (21)$$

Это – линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции  $\sigma \cos 2\mu + a$ . Его решение имеет вид:

$$\sigma \cos 2\mu + a = \gamma_\epsilon \frac{\operatorname{ctg} 2\mu \sin(\gamma - \mu) \cos \mu}{\sin \gamma \cos 2\mu + \cos \mu \sin(\gamma + \mu)} r + \frac{C}{r^{\frac{\sin \gamma \cos 2\mu}{\cos \mu \sin(\gamma + \mu)}}}. \quad (22)$$

Константу интегрирования  $C$  в (22) находим из условия (14):

$$C = \left( \frac{\kappa \sin 2\mu - p}{2 \sin^2 \mu} \cos 2\mu - \gamma_\epsilon \frac{\operatorname{ctg} 2\mu \sin(\gamma - \mu) \cos \mu}{\sin \gamma \cos 2\mu + \cos \mu \sin(\gamma + \mu)} r_S \right) r_S^{\frac{\sin \gamma \cos 2\mu}{\cos \mu \sin(\gamma + \mu)}}, \quad (23)$$

где  $p$  — неизвестное давление в точке  $S$  изображенной на рисунке,  $r_S$  — значение полярного радиуса в точке  $S$ . Применяя (22), (23) находим значение  $\sigma$  в точке  $R$ .

Рассмотрим движение по дуге  $RQ$  изображенной на рисунке. Для этого случая

$$\begin{aligned} dr &= d(r_A + \rho \cos \chi) = d\rho \cos \chi - \rho \sin \chi d\chi = \\ &= \rho_0 e^{\chi_0 \operatorname{ctg} 2\mu} \cdot e^{-\chi \operatorname{ctg} 2\mu} (-\operatorname{ctg} 2\mu \cos \chi - \sin \chi) d\chi = -\rho \frac{\cos(\theta - \mu)}{\sin 2\mu} d\chi. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив (24) в (10), получаем уравнение для определения функции  $t = \sigma \cos 2\mu + a$  в виде

$$-\operatorname{tg} 2\mu \frac{dt}{d\theta} + t \left( 2 + \frac{\cos \theta}{((r_A/\rho_0) e^{(\theta-\pi/2)\operatorname{ctg} 2\mu} + \cos(\theta + \mu)) \cos \mu} \right) = \gamma_s \frac{\rho_0 e^{-(\theta-\pi/2)\operatorname{ctg} 2\mu} \cdot \cos(\theta + \mu)}{\sin 2\mu}. \quad (25)$$

Уравнение (25) – линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, решение которого отыскивается в виде  $t = u \cdot v$ , где для определения функций  $u$  и  $v$  получается система уравнений

$$\begin{cases} -\operatorname{tg} 2\mu v' + v \left( 2 + \frac{\cos \theta}{[(r_A/\rho_0) \cdot e^{(\theta-\pi/2)\operatorname{ctg} 2\mu} + \cos(\theta + \mu)] \cos \mu} \right) = 0, \\ -\operatorname{tg} 2\mu u' \cdot v = \gamma_s \rho_0 \frac{e^{-(\theta-\pi/2)\operatorname{ctg} 2\mu} \cdot \cos(\theta + \mu)}{\sin 2\mu}. \end{cases} \quad (26)$$

Из первого уравнения (26) восстанавливается функция  $v$ , из второго –  $u$  [16]. Таким образом определяется функция  $t = u \cdot v$  на участке  $QR$ .

В итоге получено аналитическое решение задачи во всех областях деформирования: в треугольнике  $ACD$  изображенном на рисунке в виде (20), в центрированном поле  $BAC$  в виде (26), в треугольнике  $OAB$  в виде (22), (26). Решения в каждой области зависят от “своей” константы, которые находятся из условий непрерывности решений на границах  $AC$ ,  $AB$ . Константа в треугольнике  $ACD$  определяется граничными условиями на границе  $AD$ . Нагрузка на  $AO$  соответствует решению в треугольнике  $OAB$ .

Замечание. Понятно, что следует из приведенных выше решений (20), (22), (26), давление в точке  $S$  изображенной на рисунке зависит от координаты  $r$  точки  $P$ . Это означает, что давление в каждой точке  $S$  на грани клина  $OA$  будет “своим”. Чтобы получить полную нагрузку (или силу) на  $OA$ , потребуется проинтегрировать все нормальные напряжения  $\sigma_3$  вдоль  $OA$ .

В работе приводятся результаты вычислений предельной нагрузки в зависимости от входных параметров.

## ВЫВОДЫ

Для весомой среды проинтегрированы соотношения на характеристиках гиперболической системы неупругого деформирования массы горных пород, вокруг инструмента конусообразной формы. Показано, что эти соотношения представляют собой линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Исследовано поле напряжений в случае простых напряженных состояний с однородным нагружением, а также в случае центрированного поля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Hill R. The Mathematical Theory OF Plasticity. – Moscow: GITTL, 1956, 529 pp. (in Russian) [Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 529 с.]
2. Sokolovsky V. V. Theory of Plasticity. – Moscow: High School, 1969. – 608 p. (in Russian) [Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.]

3. **Kachanov L. M.** Fundamentals of the Theory of Plasticity, Moscow: Science, 1969, 420 pp. (in Russian) [Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.]
4. **Hill R., Lee E.H., and Tupper S. J.** The theory of wedge indentation of ductile materials, Proc. Roy. Soc. L., 1947, Ser. A. vol. 188, 273 pp.
5. **Ivlev D. D. and Maksimova L. A.** On the Indentation of Indenter in Ideal Rigid-plastic Strip, Proc. RAS. Mechanics and Solid Body, 200, no. 3, pp. 131–136. (in Russian) [Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 3. — С. 131–136.]
6. **Soloviev Yu. I.** To the Problem of Plastic State of a Material under a Rigid Rough Stamp with out-of-center Loading, Applied Mechanics and Technical Physics, 1960, no. 1, pp. 110–116. (in Russian) [Соловьев Ю. И. К задаче о пластическом состоянии материала под жестким шероховатым штампом при вне центральном нагружении // ПМТФ. — 1960. — № 1. — С. 110–116.]
7. **Ivlev D. D.** Indentation of a thin Blade into a Plastic Medium, Proc. USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences, 1957, no. 10, pp. 89–93. (in Russian) [Ивлев Д. Д. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Известия АН СССР. ОТН, 1957. — № 10. — С. 89–93.]
8. **Anisimov A. N., Khromov A. I.** The Introduction of a Wedge into Half-space Subject to the Coulomb-Mohr Fluidity, Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics, 2007, no. 1 (14), pp. 44–49. (in Russian) [Анисимов А.Н., Хромов А.И. Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона–Мора // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. — 2007. — № 1 (14). — С. 44–49.]
9. **Davydov D. V. and Myasninkin Yu. M.** On the Introduction of Bodies into a Rigid Plastic Medium, Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2009, no. 1, pp. 94–100. (in Russian) [Давыдов Д. В., Мяснинкин Ю. М. О внедрении тел в жесткопластическую среду // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2009. — № 1. — С. 94–100.]
10. **Chanyshev A. I. and Abdulin I. M.** The problem solution on wedge penetration in an initially anisotropy medium within the rigid-plastic scheme. In the conference proceedings IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2018, pp. 012011.
11. **Chanyshev A. I., Abdulin I. M., Gutarova I. V., Efimenko L. L., Frolova I. V., and Lukyashko O. A.** The State of Complete and Incomplete Plasticity for Non-uniformly Anisotropic Media, Fundamental and Applied Questions of Mining Sciences, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 244–249. (in Russian) [Чанышев А. И., Абдулин И. М., Гутарова И. В., Ефименко Л. Л., Фролова И. В., Лукьяшко О. А. Состояние полной и неполной пластичности для неравномерно анизотропных сред // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук, — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 244–249.]
12. **Soloviev Yu. I. and Karaulov A. M.** The Static-kinematic Method in the Theory of Limiting Equilibrium of Soils and the Prandtl Problem, Proc. Universities. Construction, 1991, no. 11, pp. 100–106. (in Russian) [Соловьев Ю. И., Караулов А. М. Статико-кинематический метод в теории предельного равновесия грунтов и задача Прандтля // Известия вузов. Строительство. — 1991. — № 11. — С. 100–106.]
13. **Karaulov A. M.** Ultimate Pressure of an Annular Foundation on a Foundation with a Hard Underlying Layer, Proc. Universities. Construction, 2008, no. 5, pp. 14–18. (in Russian) [Караулов А. М. Предельное давление кольцевого фундамента на основание с жестким подстилающим слоем // Изв. вузов. Строительство. — 2008. — № 5. — С. 14–18.]
14. **Berezantsev V. G.** Calculation of the Foundations of Structures, Leningrad, Stroyizdat, 1970, 208 pp. (in Russian) [Березанцев В. Г. Расчет оснований сооружений. — Ленинград: Стройиздат, 1970. — 208 с.]
15. **Berezantsev V. G.** The Axisymmetric Problem of the Theory of Limit Equilibrium of a Granular Medium, Moscow, GITL, 1952, 120 pp. (in Russian) [Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. — М.: ГИТЛ, 1952. — 120 с.]
16. **Korn G. A. and Korn T. M.** Math Reference Book for Scientists and Engineers, Moscow, Nauka, 1974, 832 pp. (in Russian) [Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. — 832 с.]