

другу. После разрушения вследствие истечения ПД оболочка набирает не более 10 % от максимальной скорости. Это позволяет использовать формулы (2.4), (4.1)—(4.3) для оценки скорости оболочки в инженерных расчетах. В данной работе был выбран критерий разрушения Тейлора, справедливый для толстых оболочек [3, 4]. В случае тонких оболочек необходимо применять энергетический критерий [10], что приведет к некоторому изменению скорости оболочки и деформации разрушения, в частности к возникновению масштабного эффекта.

В заключение отметим, что обнаруженный эффект существенного уменьшения скорости оболочки в результате разрушения будет, по-видимому, иметь место и для тонких оболочек, так как он обусловлен волновыми процессами в продуктах детонации. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.
2. Одинцов В. А., Селиванов В. В., Чудов Л. А. Расширение идеально пластической оболочки под действием продуктов детонации // ПМТФ.— 1974.— № 2.
3. Taylor G. I. *Scient. Papers.* — Cambridge, 1963.— V. 3.
4. Hoggat G., Recht R. F. Fracture behavior of tubular bomb // *J. Appl. Phys.*— 1968.— V. 39, N 3.
5. Каширский А. В., Коровин Ю. В., Одинцов В. А. Движение оболочки при осевой детонации // ПМТФ.— 1971.— № 1.
6. Одинцов В. А., Чудов Л. А. Расширение и разрушение оболочек под действием продуктов детонации // Проблемы упругопластических сред.— М.: Мир, 1975.
7. Мерзиевский Л. А., Реснянский А. Д. Расширение металлических трубок под действием продуктов детонации // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 60.
8. Гладышев А. М., Саножников Г. А. Численный расчет метания пластин под действием продуктов детонации // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
9. Finger M., Honing H. C., Lee E. L., Kury J. W. Metal acceleration by composite explosives // Fifth Symp. (Intern.) on Detonation.— Pasadena, California, 1970.
10. Иванов А. Г., Кочкин Л. И. и др. Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали // ПМТФ.— 1983.— № 1.
11. Сериков С. В. Оценка осколкообразования при разрушении шаровой оболочки // ПМТФ.— 1983.— № 3.
12. Фомин В. М., Киселев С. П. Комбинированный разрыв в смеси газа и твердых частиц // ЧММСС.— 1984.— Т. 15, № 2.
13. Рождественский Б. Л., Яненко Н. И. Система квазилинейных уравнений.— М.: Наука, 1978.
14. Уилкинс М. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.
15. Крайко А. Н., Миллер Л. Г., Ширковский И. А. О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости // ПМТФ.— 1982.— № 1.

г. Новосибирск

Поступила 1/VII 1987 г.,
в окончательном варианте —
15/III 1988 г.

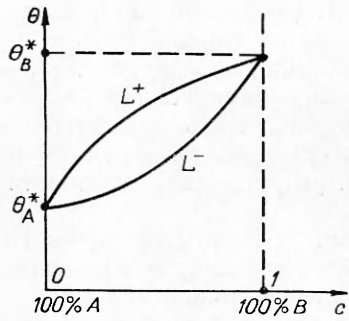
УДК 536.421]

И. Г. Гету, А. М. Мейрманов

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ БИНАРНОГО СПЛАВА

Предлагается модель обобщенного движения (ОД), описывающая кристаллизацию бинарного сплава с переходной фазой. Модель ОД содержит в себе как частный случай общепринятую модель с выделенной границей фазового перехода и удобна для численных расчетов, например, методом сквозного счета с использованием неявных схем.

В рамках феноменологической теории задача о кристаллизации бинарного сплава, как правило, формулируется следующим образом: в области Ω требуется определить гладкую поверхность $\Gamma(t)$ (граница фазового перехода), разбивающую область Ω на две подобласти $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$, за-



Р и с. 1

нятые соответственно жидкой и твердой фазами. Жидкое или твердое состояние среды в данной точке пространства в данный момент времени определяется с помощью диаграммы фазового равновесия (рис. 1) по значениям температуры θ и концентрации примеси c : если температура θ больше $\varphi^+(c)$, то среда находится в жидком состоянии, а если температура меньше $\varphi^-(c)$, то — в твердом. Кривые $L^\pm = \{(\theta, c) | \theta = \varphi^\pm(c), 0 < c < 1\} = \{(\theta, c) | c = f^\pm(\theta), \theta_A^* < \theta < \theta_B^*\}$ носят название ликвидус и солидус. В каждой из областей $\Omega^\pm(t)$ температура удовлет-

воряет уравнению теплопроводности

$$(1) \quad a \partial \theta / \partial t = \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta),$$

а концентрация — уравнению диффузии примеси

$$(2) \quad \partial c / \partial t = \operatorname{div}(D \nabla c).$$

Здесь a , κ , D — коэффициенты теплоемкости, теплопроводности и диффузии, которые, как правило, считаются постоянными в каждой фазе, но, вообще говоря, различными. Например, $a = a^+ = \text{const}$ в жидкой фазе, $a = a^- = \text{const}$ в твердой фазе и $a^+ \neq a^-$.

На искомой границе $\Gamma(t)$ должны выполняться условия баланса энергии (условие Стефана)

$$(3) \quad [U] V_n = -[\kappa \partial \theta / \partial n], \quad x \in \Gamma(t)$$

и баланса массы

$$(4) \quad [c] V_n = -[D \partial c / \partial n], \quad x \in \Gamma(t),$$

где $[U] = U^+ - U^-$; U^\pm — предельное значение энтальпии U на границе $\Gamma(t)$ из $\Omega^\pm(t)$; V_n — скорость перемещения границы $\Gamma(t)$ в направлении нормали n к этой границе.

Предельные значения температуры на $\Gamma(t)$ совпадают:

$$(5) \quad [\theta] = 0, \quad x \in \Gamma(t),$$

а предельные значения концентрации определяются из диаграммы фазового равновесия:

$$(6) \quad \varphi^+(c^+) = \varphi^-(c^-) = \theta^+ = \theta^-, \quad x \in \Gamma(t).$$

Математическая модель замыкается двумя условиями на границе Ω для температуры и концентрации и начальными условиями для температуры, концентрации и границы раздела фаз. В описанной модели поверхность $\Gamma(t)$ есть поверхность сильного разрыва концентрации c и энтальпии U , поэтому естественно эту модель назвать движением с сильным разрывом (ДСР), а ее решения по аналогии с задачей Стефана [1] — классическими.

Как начально-краевая задача модель ДСР (1)–(6) сложная, и к настоящему времени доказано существование классического решения только для одной пространственной переменной на достаточно малом интервале времени [2]. Кроме того, в [3, 4] обнаружены странные решения, в которых за и перед фронтом кристаллизации температура меньше значения, определяемого линией солидуса L^- на диаграмме фазового равновесия, и сказано, что полученные решения описывают процесс переохлаждения, хотя очевидно, что они, удовлетворяя условиям (1)–(6), не являются решением модели ДСР, так как не выполнено основное требование, при котором имеет смысл граница $\Gamma(t)$: в $\Omega^-(t)$ θ меньше $\varphi^-(c)$, а в $\Omega^+(t)$ θ больше $\varphi^+(c)$.

Таким образом, не удастся показать существование классического решения в целом по времени, а в некоторых случаях его просто нет (на наш взгляд, в этом и состоит результат [3, 4]). По аналогии с задачей Стефана [1] следует предположить, что и для бинарного сплава кристаллизация описывается более широким классом обобщенных решений, содержащим в себе как подкласс классические решения. Такие попытки делались рядом авторов [5—8], и достаточно завершённый вид модели ОД для малых концентраций приведен в [6].

Цель настоящей работы — аксиоматическое построение модели ОД исходя из минимального числа общепринятых постулатов термодинамики. Как и в задаче Стефана [1], основная аксиома модели допускает возможность существования переходной фазы, когда температура среды совпадает с температурой плавления, а энтальпия может принимать значения из целого интервала, определяемого предельными значениями энтальпии из жидкой и твердой фаз.

При кристаллизации бинарного сплава термодинамическое состояние среды определяют семь параметров: энтальпия U , температура θ , энтропия S , концентрации c_A , c_B и химические потенциалы μ_A , μ_B соответственно веществ A и B . Пусть указанные параметры в каждой фазе удовлетворяют тождеству Гиббса $dU = \theta dS + \mu_A dc_A + \mu_B dc_B$ ($c_A + c_B = 1$) и энтальпия зависит только от температуры:

$$(7) \quad U = \alpha\theta + \beta \quad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

Принятые предположения и теорема Гиббса — Дюгема [9, с. 67], утверждающая, что

$$(8) \quad \mu_A \equiv \Psi = U - \theta S - c\mu$$

($c = c_B$, $\mu = \mu_B - \mu_A$), позволяют ввести два независимых параметра, например температуру θ и потенциал μ , определяющие все остальные параметры и, следовательно, термодинамическое состояние среды.

Тождество Гиббса для независимых переменных θ и μ примет вид

$$(9) \quad d\Psi = -Sd\theta - cd\mu,$$

откуда вытекает, что $S = -\partial\Psi/\partial\theta$, $c = -\partial\Psi/\partial\mu$. В частности, рассматривая (8) как уравнение первого порядка относительно Ψ с заданной правым членом (7) функцией U , получим, что в каждой фазе

$$(10) \quad \Psi(\theta, \mu) = \Psi_0(\mu/\theta)\theta - \alpha\theta \ln \theta + \beta$$

($\Psi_0(\tau)$ — произвольная функция).

Первая аксиома A_1 модели ОД утверждает, что в жидкой и твердой фазах справедливы тождество (9) и представление (7), а фазовый переход из жидкого состояния в твердое (или наоборот) происходит при локальном термодинамическом равновесии фаз, т. е. температура θ и химические потенциалы μ_A и μ_B жидкой фазы равны аналогичным параметрам твердой фазы.

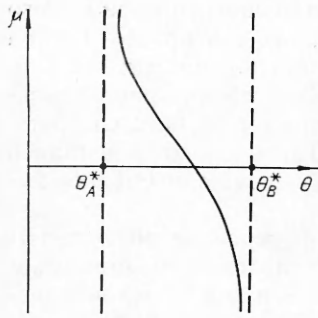
Последнее утверждение отвечает существованию в плоскости переменных θ и μ кривой $\mu = \Phi(\theta)$, разбивающей плоскость на две подобласти Π^+ и Π^- так, что значения θ и μ из Π^+ определяют жидкую фазу, а значения θ и μ из Π^- — твердую, вдоль указанной кривой $\Psi^+(\theta, \mu) = \Psi^-(\theta, \mu)$.

Обращаясь к конкретному виду Ψ в каждой фазе, имеем

$$(11) \quad \mu = \Phi(\theta) = \theta\varphi(\theta).$$

Обратная к (11) зависимость температуры от потенциала μ определяет температуру плавления среды $\theta = \theta^*(\mu)$. Будем считать, что в каждой фазе энтальпия есть возрастающая функция температуры и при переходе из твердого состояния в жидкое она увеличивается, т. е. либо $\alpha^+ \geq \alpha^- > 0$, $\theta \geq \theta_0 = -[\beta]/[\alpha]$, либо $\alpha^- \geq \alpha^+ > 0$, $\theta \leq \theta_0$.

Согласно принципам построения модели ОД, считаем, что вдоль кривой фазового равновесия (11) расположена складка, в которой спрятано



Р и с. 2

переходное состояние. Один из вариантов разглаживания складки — переход к переменным θ и c . Для этого из уравнений $c = -\partial\Psi^\pm/\partial\mu$ находится значение $\mu = \theta g^\pm(c)$ и подставляется в (11): $\theta = (\varphi^{-1} \circ g^\pm)(c) \equiv \varphi^\pm(c)$. На диаграмме фазового равновесия (см. рис. 1) области Π^+ переменных θ и μ соответствует область $\{\theta > \varphi^+(c), 0 < c < 1\}$ (обозначим ее также Π^+), а берегу складки (11) со стороны жидкой фазы — кривая ликвидуса L^+ . Аналогично области Π^- переменных θ и μ отвечает область $\{\theta < \varphi^-(c), 0 < c < 1\}$, а берегу складки (11) со стороны твердой фазы — кривая солидуса L^- .

Имея перед собой диаграмму фазового равновесия в плоскости переменных θ и c , нетрудно восстановить линию фазового равновесия (11). Для этого, дифференцируя тождество

$$\theta\Psi_0^+(\varphi(\theta)) - \alpha^+\theta \ln \theta + \beta^+ = \theta\Psi_0^-(\varphi(\theta)) - \alpha^-\theta \ln \theta + \beta^-$$

по температуре и привлекая (7), находим

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\theta^2} \frac{U^+ - U^-}{c^+ - c^-} = \frac{1}{\theta^2} \frac{[U]}{[c]}.$$

Будем считать, что линии ликвидуса и солидуса на диаграмме фазового равновесия подходят к линиям $c = 0$ и $c = 1$ под различными углами, не кратными $\pi/2$. Тогда функция φ в (11) имеет логарифмическую особенность в точках θ_A^* и θ_B^* и потенциал μ вдоль (11) неограниченно растет при приближении температуры к этим значениям. Примерный вид кривой фазового равновесия в плоскости θ и μ приведен на рис. 2.

Область Π^* в плоскости переменных θ и c , ограниченная кривыми ликвидуса и солидуса, соответствует переходной фазе, в которой еще ничего не определено. Как продолжит термодинамические параметры Ψ , U , S , μ в переходную фазу? Прежде всего естественным является предположение о справедливости тождества (9) и представления (8) для потенциала Ψ . Кроме того, также естественно и предположение о существовании процесса, при котором бинарная смесь переходит из жидкого состояния в твердое (или наоборот) через переходное состояние (в области Π^* переменных θ и c этому процессу отвечает непрерывная кривая, соединяющая линии ликвидуса и солидуса) так, что химические потенциалы μ_A и μ_B (или потенциалы μ и Ψ) меняются непрерывно. Другими словами, в области Π изменения параметров θ и c потенциалы μ и Ψ определены и непрерывны.

Требование непрерывности основное, и потенциалы μ и Ψ восстанавливаются в области Π^* единственным образом. Для этого достаточно рассмотреть отрезки $I_\theta = \{(\theta, c) | \theta = \text{const}\}$ из Π^* , соединяющие линии ликвидуса и солидуса. В плоскости переменных θ и μ отрезку I_θ соответствует точка на кривой фазового равновесия (11), т. е. вдоль I_θ в Π^* значение потенциала μ постоянно. Из тождества (9) и уравнения (11) следует, что Ψ также постоянна вдоль I_θ .

Поскольку $F = \Psi + c\mu$, то наряду с потенциалами Ψ и μ в области Π свободная энергия F непрерывна. Переписывая тождество (9) в виде $dF = -Sd\theta + \mu dc$, убеждаемся, что и энтропия S непрерывна при переходе через линии ликвидуса и солидуса. В самом деле, последнее тождество эквивалентно равенствам $\mu = \partial F/\partial c$ и $S = -\partial F/\partial \theta$. Пусть $F = F^*$, $\mu = \mu^*$ в Π^* и $F = F^+$, $\mu = \mu^+$ в Π^+ . По условию $F^+(\theta) = F^*(\theta, f^+(\theta))$ и $\mu^*(\theta, f^+(\theta)) = \frac{\partial F}{\partial c}(\theta, f^+(\theta)) = \frac{\partial F^+}{\partial c}(\theta, f^+(\theta)) = \mu^+(\theta, f^+(\theta))$.

Дифференцируя соотношение $F^+ = F^*$ вдоль линии ликвидуса, получим $\partial F^+/\partial \theta + \mu^+ \partial f^+/\partial \theta = \partial F^*/\partial \theta + \mu^* \partial f^+/\partial \theta$, откуда вытекает непрерывность

энтропии при переходе через линию ликвидуса. Аналогично рассматривается линия солидуса.

Непрерывность энтропии и формула $U = F + \theta S$ влекут за собой непрерывность энтальпии всюду в Π . Обращаясь к легко выводимому следствию тождества Гиббса $\partial(\mu/\theta)/\partial\theta + (1/\theta^2)\partial U/\partial c = 0$ и определению μ в переходной фазе, заключаем, что в переходной фазе энтальпия зависит от концентрации линейно:

$$(12) \quad U = \alpha^- \theta + \beta^- + \frac{[\alpha] \theta + [\beta]}{f^+(\theta) - f^-(\theta)} (c - f^-(\theta))$$

при $f^+(\theta) < c < f^-(\theta)$, $\theta_A^* < \theta < \theta_B^*$.

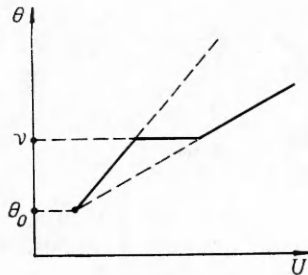
Вторая аксиома A_2 модели ОД утверждает, что все состояния, отвечающие значениям параметров θ и c из области Π^* , физически реализуемы, в Π^* справедливы тождество (9) и представление (7) и химические потенциалы μ_A и μ_B определены и непрерывны в Π .

Потенциал μ неограниченно растет в крайних точках диаграммы фазового равновесия, поэтому удобнее в качестве искомой функции рассматривать v , определяемую из равенства $\theta\varphi(v) = \mu$. Возвращаясь к конкретному виду потенциала Ψ и концентрации c в жидкой и твердой фазах, видим, что там потенциал v зависит только от концентрации. По построению в переходной фазе $v = \theta$. Это равенство справедливо и на границе Π^* на линиях ликвидуса L^+ и солидуса L^- : $v = \theta = f^+(c)$ на L^+ и $v = \theta = f^-(c)$ на L^- . Следовательно, всюду в Π^+ $v = f^+(c)$, а в Π^- $v = f^-(c)$.

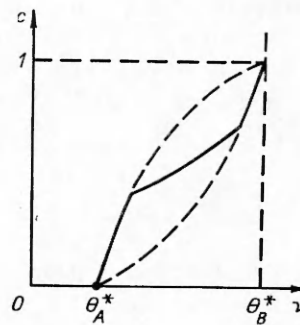
Более детальный анализ показывает, что складка, идущая вдоль кривой (11) в плоскости θ и μ , в плоскости переменных θ и c разгладилась не полностью: в точках $(\theta_A^*, 0)$ и $(\theta_B^*, 1)$ остались спрятанными переходные состояния, соответствующие фазовым переходам чистых веществ A и B . В новых переменных U и v складка разворачивается полностью. В плоскости U и v жидкой фазе отвечает область $\Pi^+ = \{U \geq \alpha^+ v + \beta^+, \theta_A^* \leq v \leq \theta_B^*\}$, твердой — область $\Pi^- = \{U \leq \alpha^- v + \beta^-, \theta_A^* \leq v \leq \theta_B^*\}$, переходной фазе — область $\Pi^* = \{\beta^- + \alpha^- v \leq U \leq \beta^+ + \alpha^+ v, \theta_A^* \leq v \leq \theta_B^*\}$. Переходному состоянию чистых веществ A и B отвечают отрезки $\{\theta_A^* = v\}$ и $\{\theta_B^* = v\}$ из Π^* .

Зависимости температуры и концентрации от энтальпии U ($v = \text{const}$) и потенциала v ($U = \text{const}$) показаны на рис. 3, 4. По построению функции θ и c непрерывны, а их первые производные терпят разрыв первого рода. Точки разрыва производных функции c на рис. 4 перемещаются вдоль линий ликвидуса и солидуса так, что функция $c(U, v)$ все время монотонно растет с увеличением v .

Термодинамическое состояние бинарной смеси определяется двумя независимыми параметрами (θ и c , если $0 < c < 1$, или U и v). Поэтому для полного описания поведения среды необходимы два дополнительных уравнения, которыми являются законы сохранения энергии и массы. Указанные уравнения должны быть определены для всех значений независимых термодинамических параметров всюду в области Ω при всех



Р и с. 3



Р и с. 4

значениях времени. Поскольку модель ОД строится как расширение модели ДСР, то в областях, занятых жидкой и твердой фазами, закон сохранения энергии должен совпадать с уравнением теплопроводности (1), а закон сохранения массы — с уравнением диффузии (2).

В задаче Стефана [1], которая служит для нас моделью-лоцманом, намеченная программа реализуется в виде уравнения

$$(13) \quad \partial U / \partial t = \operatorname{div} (\kappa \nabla \theta),$$

в котором зависимость температуры θ от энтальпии U с заданным значением ν приведена на рис. 3. Если $\nu = \text{const}$ (температура плавления чистого вещества постоянна), то в (13) коэффициент κ определен в жидкой и твердой фазах, а в переходной фазе достаточно считать его ограниченным: там $\kappa \nabla \theta \equiv 0$. Если же $\nu = \nu(x, t)$, то в переходной фазе необходимо доопределить коэффициент теплопроводности. Никаких дополнительных соображений, как это делать, к настоящему моменту не имеется, поэтому обычно используется наиболее простой способ экстраполяции: в переходной фазе κ есть линейная функция энтальпии, непрерывно соединяющая значения κ^+ и κ^- .

Итак, в уравнении (13) все величины описаны. По своему физическому смыслу функция U , стоящая под знаком производной в (13), может терпеть разрыв первого рода. Как тогда понимать уравнение? Следуя [10], его надо понимать в обобщенном смысле как интегральное тождество

$$(14) \quad \int_{\Omega_T} \left\{ -U \frac{\partial \xi}{\partial t} + \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \xi \right\} dx dt = 0,$$

справедливое для всех гладких финитных в $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ функций ξ . Легко показывается, что если в Ω существует гладкая поверхность $\Gamma(t)$, разбивающая Ω на подобласти $\Omega^\pm(t)$, занятые соответственно жидкой ($U \geq \alpha^+ \nu + \beta^+$) и твердой ($U \leq \alpha^- \nu + \beta^-$) фазами, то в $\Omega^\pm(t)$ температура θ удовлетворяет уравнению (1), а на границе $\Gamma(t)$ — условию Стефана (3).

Аналогично задаче Стефана будем считать, что в модели ОД выполняется уравнение (13), в котором коэффициент κ в Π^+ и Π^- совпадает со значениями κ^+ и κ^- соответственно, линейно зависит от U (если независимыми переменными являются U и ν) или c (если независимыми переменными будут θ и c) в Π^* и непрерывен всюду в Π . Если независимыми переменными будут θ и c , то зависимость энтальпии от температуры в Π^+ и Π^- дается формулой (7), а в Π^* — формулой (12). Если независимыми переменными являются U и ν , то $\theta = \theta(U, \nu)$ изображается диаграммой на рис. 3.

Рассмотрим теперь закон сохранения массы. Если считать, что он описывается всюду уравнением (2), то, доопределяя коэффициент D в переходной фазе, как это было сделано в [11], сразу исключим классические решения модели ДСР. Как известно, все решения уравнения (2) с $D \geq D_0 = \text{const} > 0$ непрерывны [10, с. 238], а в классическом решении концентрация c терпит разрыв первого рода на поверхности $\Gamma(t)$ фазового перехода.

На самом деле уравнение диффузии примеси имеет другой, нежели (2), вид. Если считать, что существует вектор потока массы \mathbf{j} такой, что $\partial c / \partial t = \operatorname{div} \mathbf{j}$, то, используя формулу Гиббса $\theta dS = dU + \mu dc$, принцип неубывания энтропии для произвольного теплоизолированного объема ω

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} S dx \geq 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \omega} = 0, \quad \nabla \theta \cdot \mathbf{n}|_{\partial \omega} = 0$$

и принцип симметрии Онзагера [9], нетрудно вывести представление $\mathbf{j} = \Lambda \nabla (\mu / \theta) = \lambda \nabla \nu$, которое и положим в основу уравнения диффузии примеси

$$(15) \quad \partial c / \partial t = \operatorname{div} (\lambda \nabla \nu).$$

Последнее совпадает с (2) в жидкой и твердой фазах, если

$$\lambda^{\pm} \frac{d\varphi^{\pm}}{dc}(c) = D^{\pm}.$$

В переходной фазе коэффициент λ можно доопределить как линейную функцию энтальпии, непрерывную при всех значениях независимых параметров. Уравнение (15), как и (13), понимается в обобщенном смысле как выполнение соответствующего тождества. Если решения (13), (15) таковы, что θ и v непрерывны в Ω_T и в области Ω существует гладкая поверхность $\Gamma(t)$, разделяющая области $\Omega^{\pm}(t)$, занятые жидкой и твердой фазами, то из (15) вытекают уравнение диффузии (2) для концентраций в каждой из областей $\Omega^{\pm}(t)$ и условие баланса массы (4) на границе $\Gamma(t)$.

Условия (5), (6) — следствие непрерывности θ и v . Таким образом, модель ОД содержит в себе как частный случай модель ДСР. Аксиома A_3 , завершающая построение модели ОД, постулирует справедливость уравнений (13) и (15) всюду в области Ω_T и описывает коэффициенты κ и λ .

Математическая модель ОД кристаллизации бинарного сплава по существу шире модели ДСР. Это уже можно обнаружить в самом простом случае стационарной одномерной задачи, когда область Ω есть отрезок (0,1). Точные результаты сформулированы в [1], и один из них заключается в следующем: если на одной границе Ω задано жидкое состояние, а на другой — твердое, то при достаточно малых отклонениях от положения равновесия в области Ω присутствует переходная фаза, заполняющая область $\Omega^* \subset \Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейрманов А. М. Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986.
2. Петрова А. Г. Локальная разрешимость термодиффузионной задачи Стефана // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982. — Вып. 58.
3. Авдонин Н. А. Математическое описание процессов кристаллизации. — Рига: Зинатне, 1980.
4. Иванцов Г. П. «Диффузионное» переохлаждение при кристаллизации бинарного сплава // ДАН СССР. — 1951. — Т. 81, № 2.
5. Crowley A. B., Ockendon J. R. On the numerical solution of an alloy solidification problem // Intern. J. Heat Mass Transfer. — 1979. — V. 22, N 6.
6. Bermudes A., Saquez C. Mathematical formulation and numerical solution of an alloy solidification problem // Free boundary problems: theory and applications. — Boston: Pitman, 1983. — (Res. Not. in Math. — V. 78).
7. Crowley A. B. Numerical solution of alloy solidification problem revisited // Free boundary problems: applications and theory. — Boston: Pitman, 1985. — (Res. Not. in Math. — V. 120).
8. Alexiades V., Wilson D., Solomon A. Modeling binary alloy solidification processes. — Oak Ridge, 1983. — (Prepr. ORNL/CSD — 117).
9. Булатов Н. Г., Лундин А. Б. Термодинамика необратимых физико-химических процессов. — М.: Химия, 1984.
10. Ладьяженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
11. Данилюк И. И. Математическое моделирование фазовых превращений в двухкомпонентных средах // ДАН УССР. Сер. А. — 1984. — № 12.