

УДК 532.536

## СМЕШАННОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА-В ПО НАКЛОННОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

М. Билал Ашраф, Т. Хайат\*, А. Алсаеди\*\*

Институт информационных технологий COMSATS, 47040 Вах Кант, Пакистан

\* Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

\*\* Университет короля Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия

E-mails: bilalashraf\_qau@yahoo.com, pensy.t@yahoo.com, aalsaedi@hotmail.com

С использованием уравнений пограничного слоя жидкости Олдройда-В с учетом теплообмена исследовано смешанное конвективное течение жидкости Олдройда-В при наличии теплового излучения, вызванное растяжением наклонной поверхности. Дифференциальные уравнения в частных производных преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения. Выполнен численный анализ решений в виде сходящихся рядов. Получены значения локального числа Нуссельта. Исследовано влияние различных параметров на скорость и температуру.

Ключевые слова: наклонная растягивающаяся поверхность, течение при наличии теплового излучения, жидкость Олдройда-В.

DOI: 10.15372/PMTF20160215

**Введение.** В ряде физических процессов материал приводит в движение находящуюся в состоянии покоя жидкость. В этом случае тепловое излучение и движение твердого материала обуславливают возникновение течения жидкости. Смешанные конвективные течения используются в различных областях промышленности и техники (пищевая промышленность, охлаждение ядерных реакторов при аварийной остановке, приемники солнечного излучения, теплообменники, помещенные в низкоскоростную окружающую среду, смазка керамических деталей машин). Установлено, что силы плавучести, возникающие при нагревании или охлаждении непрерывно растягивающихся пластин, оказывают влияние на течение, тепловые поля и, следовательно, на характеристики теплообмена [1]. Некоторые металлургические процессы включают охлаждение лент или нитей, непрерывно движущихся в находящейся в состоянии покоя жидкости. При этом скорость охлаждения влияет на качество конечного продукта и его характеристики. В [2–10] представлены результаты исследования течения вязких и неньютоновских жидкостей на растягивающихся поверхностях при наличии теплообмена. Однако воздействие теплового излучения, особенно при смешанном конвективном течении жидкостей включая неньютоновские, изучено недостаточно [11–15].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке деканата научных исследований (DSR) Университета короля Абдул-Азиза (Джедда, Саудовская Аравия).

© Билал Ашраф М., Хайат Т., Алсаеди А., 2016

Целью данной работы является описание воздействия теплового излучения на смешанное конвективное течение неньютоновской жидкости, вызванное растяжением наклонной поверхности. При этом используются материальные уравнения жидкости Олдройда-В и метод гомотопического анализа (МГА) [16–25].

**1. Математический анализ.** Рассмотрим стационарное двумерное смешанное конвективное течение несжимаемой жидкости Олдройда-В по наклонной растягивающейся поверхности. Для учета теплового излучения используется приближение Росселенда. Ось  $x$  направлена вдоль растягивающейся поверхности, ось  $y$  — по нормали к оси  $x$ . Законы сохранения массы, импульса и энергии при отсутствии вязкой диссипации имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda_1 \left( u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ \nu \lambda_2 \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta_T(T - T_\infty) \cos \alpha, \\ \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} + k \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

где  $u, v$  — компоненты скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $\lambda_1, \lambda_2$  — времена релаксации и запаздывания соответственно;  $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость;  $\sigma^*$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $T$  — температура жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta_T$  — коэффициент теплового расширения;  $c_p$  — удельная теплоемкость;  $k^*$  — средний коэффициент поглощения;  $k$  — теплопроводность.

Соответствующие граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u &= cx, \quad v = 0, \quad T = T_w, \\ y \rightarrow \infty: \quad u &\rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \end{aligned}$$

где  $T_w$  — температура поверхности:

$$T_w(x, t) = T_\infty + bx,$$

$b, c$  — положительные константы. После введения функции тока  $\psi$  и новых переменных

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{c}{\nu}} y, \quad \psi = \sqrt{c\nu} x f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

условие несжимаемости удовлетворяется явно, а функции  $f$  и  $\theta$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} f''' + f f'' - f'^2 + \beta_1(2f f' f'' - f^2 f''') - \beta_2(f''^2 - f f'''' ) + \lambda \theta \cos \alpha &= 0, \\ (1 + 4R/3)\theta'' + \text{Pr}(f\theta' - f'\theta) &= 0, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(\infty) \rightarrow 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $\beta_1 = \lambda_1 c, \beta_2 = \lambda_2 c$  — числа Деборы;  $\lambda = \text{Gr}_x / \text{Re}_x^2$  — параметр смешанной конвекции;  $\text{Gr}_x = g\beta(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2$  — локальное число Грасгофа;  $\text{Re}_x = u_w^2 x^2/\nu^2$  — число Рейнольдса;  $\text{Pr} = \mu c_p/k$  — число Прандтля;  $R = 4\sigma^* T_\infty^3/(k^* k)$  — параметр теплового излучения; штрихи обозначают дифференцирование по  $\eta$ .

Локальное число Нуссельта  $Nu_x$  выражается через тепловой поток  $q_w$ :

$$Nu_x = \frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad q_w = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}.$$

Это выражение в безразмерных переменных записывается в виде

$$\frac{Nu}{Re_x^{1/2}} = - \left( 1 + \frac{4}{3} R \right) \theta'(0).$$

Вводя множество базовых функций  $\{\eta^k e^{-n\eta}: k \geq 0, n \geq 0\}$ , можно представить функции  $f_m(\eta)$ ,  $\theta_m(\eta)$  в виде рядов

$$f_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{m,n}^k \eta^k e^{-n\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,n}^k \eta^k e^{-n\eta},$$

где  $a_{m,n}$ ,  $b_{m,n}$  — коэффициенты.

Начальные значения  $f_0$ ,  $\theta_0$  и вспомогательные линейные операторы  $L_f$ ,  $L_\theta$  выбраны следующим образом:

$$f_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta},$$

$$L_f = \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \frac{df}{d\eta}, \quad L_\theta = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} - \theta.$$

Здесь

$$L_f[C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}] = 0, \quad L_\theta[C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}] = 0,$$

$C_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) — произвольные постоянные. Вводя параметр вложения  $p \in [0, 1]$  и ненулевые дополнительные параметры  $h_f$ ,  $h_\theta$ , запишем задачу деформации в нулевом порядке приближения:

$$(1-p)L_f[\hat{f}(\eta, p) - f_0(\eta)] = ph_f N_f[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p)],$$

$$(1-p)L_\theta[\hat{\theta}(\eta, p) - \theta_0(\eta)] = ph_\theta N_\theta[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p)],$$

$$\hat{f}(\eta; p) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 1, \quad \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 0,$$

$$\hat{\theta}(\eta; p) \Big|_{\eta=0} = 1, \quad \hat{\theta}(\eta; p) \Big|_{\eta=\infty} = 0,$$

$$N_f[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p)] = \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} - \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} \right)^2 +$$

$$+ \beta_1 \left( 2\hat{f}(\eta, p) \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} - (\hat{f}(\eta, p))^2 \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} \right) +$$

$$+ \beta_2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} \right)^2 - \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial^4 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^4} \right] + \lambda \hat{\theta}(\eta, p) \cos \alpha,$$

$$N_\theta[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p)] = \left( 1 + \frac{4}{3} R \right) \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \left( \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta} - \hat{\theta}(\eta, p) \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} \right).$$

При  $p = 0$  и  $p = 1$  имеем

$$\hat{f}(\eta; 0) = f_0(\eta), \quad \hat{f}(\eta; 1) = f(\eta),$$

$$\hat{\theta}(\eta; 0) = \theta_0(\eta), \quad \hat{\theta}(\eta; 1) = \theta(\eta).$$

При  $0 < p < 1$  значения функций  $\hat{f}(\eta; p)$  и  $\hat{\theta}(\eta; p)$  изменяются от  $f_0(\eta)$  и  $\theta_0(\eta)$  до  $f(\eta)$  и  $\theta(\eta)$  соответственно. Используя разложение в ряд Тейлора, получаем

$$\hat{f}(\eta; p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)p^m; \tag{1}$$

$$\hat{\theta}(\eta; p) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)p^m; \tag{2}$$

$$f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{f}(\eta; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}.$$

Вспомогательные параметры  $h_f$  и  $h_\theta$  выбраны таким образом, что при  $p = 1$  ряды (1), (2) сходятся. Следовательно,

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta).$$

Задача в приближении  $m$ -го порядка записывается в виде

$$L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_m^f(\eta), \quad L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_m^\theta(\eta),$$

$$f_m(0) = 0, \quad f'_m(0) = 0, \quad f'_m(\infty) = 0,$$

$$\theta_m(0) = 0, \quad \theta_m(\infty) = 0, \quad \varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(\infty) = 0;$$

$$\begin{aligned} R_f^m(\eta) = & f'''_{m-1}(\eta) + \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k} f''_k - f'_{m-1-k} f'''_k) + \\ & + \beta_1 \sum_{k=0}^{m-1} f_{m-1-k} \sum_{l=0}^k (2f'_{k-l} f''_l - f_{k-l} f'''_l) - \lambda f'_{m-1}(\eta) + \\ & + \beta_2 \left( f'_{m-1-k} \sum_{k=0}^{m-1} f'_k - f_{m-1-k} \sum_{k=0}^{m-1} f'''_k \right) + \lambda \theta \cos \alpha; \tag{3} \end{aligned}$$

$$R_\theta^m(\eta) = \left( 1 + \frac{4}{3} R \right) \theta''_{m-1} + \text{Pr} \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k} \theta'_k - f'_{m-1-k} \theta_k); \tag{4}$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Общие решения уравнений (3)–(5) можно записать следующим образом:

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}.$$

Здесь  $f_m^*(\eta)$ ,  $\theta_m^*(\eta)$  — частные решения,

$$C_1 = -C_3 - f_m^*(0), \quad C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = \left. \frac{\partial f_m^*(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}, \quad C_5 = -\theta_m^*(0).$$

**2. Сходимость рядов решений.** Решения в виде ряда содержат ненулевые вспомогательные параметры  $h_f$  и  $h_\theta$ . Для того чтобы найти допустимые значения  $h_f$  и  $h_\theta$ , были построены  $h_f$ - и  $h_\theta$ -кривые для приближения 20-го порядка. Установлено, что

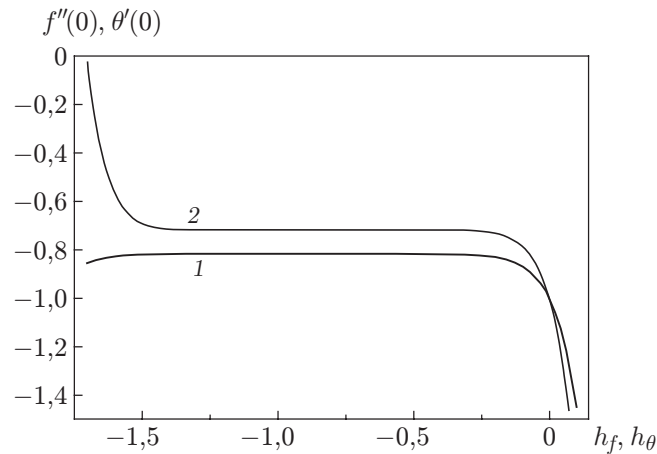


Рис. 1.  $h$ -кривые для функций  $f''(0)$  (1) и  $\theta'(0)$  (2) при  $\lambda = 0,5$ ,  $\lambda_1 = 0,3$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $R = 0,3$ ,  $Pr = 0,7$

Таблица 1

Сходимость решений, полученных с использованием МГА, для приближений различного порядка при  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\beta_2 = 0,3$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $R = 0,3$

Порядок приближения	$-f''(0)$	$-\theta'(0)$
1	0,695 55	0,730 00
5	0,751 63	0,725 03
10	0,752 41	0,724 57
15	0,752 40	0,724 57
20	0,752 39	0,724 56
25	0,752 39	0,724 56
30	0,752 39	0,724 56

$-1,40 \leq h_f \leq -0,25$ ,  $-1,40 \leq h_\theta \leq -0,25$  (рис. 1). Ряды (4) сходятся в области  $\eta$  при  $h_f = h_\theta = -1$ . Из табл. 1 следует, что решения как для скорости, так и для температуры, представленные в виде рядов для приближения 20-го порядка, сходятся.

**3. Обсуждение результатов.** Проведено исследование влияния различных физических параметров на скорость  $f'(\eta)$  и температуру  $\theta(\eta)$ . На рис. 2–7 представлены зависимости скорости и температуры от угла наклона  $\alpha$ , чисел Деборы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , параметра теплового излучения  $R$ , параметра смешанной конвекции  $\lambda$  и числа Прандтля  $Pr$ . На рис. 2 видно, что с увеличением угла наклона  $\alpha$  скорость жидкости уменьшается, а ее температура увеличивается. Кроме того, толщина пограничного слоя — убывающая функция  $\alpha$ , а толщина теплового пограничного слоя — возрастающая функция  $\alpha$ . На рис. 3 показано влияние параметра временной релаксации  $\beta_1$  на скорость и температуру. При увеличении времени релаксации скорость уменьшается, а температура увеличивается. При увеличении параметра теплового излучения  $R$  температура жидкости увеличивается быстрее, чем скорость  $f'(\eta)$  (см. рис. 4). На рис. 5 показано влияние параметра смешанной конвекции  $\lambda$  на скорость и температуру. Видно, что с увеличением  $\lambda$  скорость жидкости и толщина вытеснения пограничного слоя увеличиваются, а температура уменьшается. Кроме того, при увеличении значения  $\lambda$  скорость жидкости увеличивается быстрее, чем температура. Рост числа Прандтля  $Pr$  приводит к уменьшению теплопроводности, вследствие чего скорость и температура уменьшаются (см. рис. 6). На рис. 7 показано влияние времени запаздывания  $\beta_2$  на температуру и скорость. Видно, что с увеличением  $\beta_2$  скорость

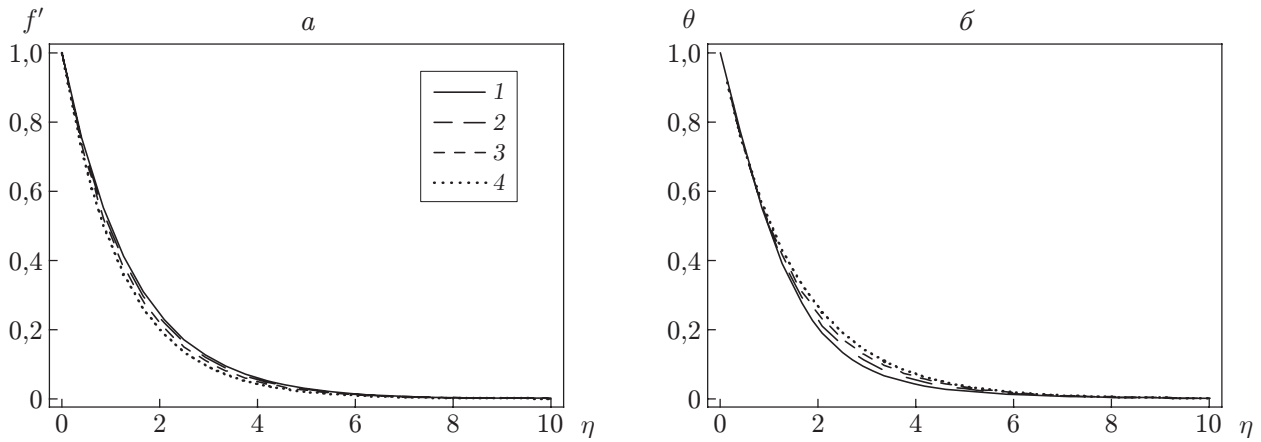


Рис. 2. Зависимости скорости  $f'$  (а) и температуры  $\theta$  (б) от параметра  $\eta$  при различных значениях угла наклона пластины  $\alpha$ :

$a - \beta_1 = 0,2, \lambda = 0,5, \beta_2 = 0,3, R = 0,3, Pr = 0,7, b - \beta_1 = 0,2, \lambda = 1,0, \beta_2 = 0,2, R = 0,5, Pr = 0,7;$   
 1 —  $\alpha = 0, 2 - \alpha = \pi/6, 3 - \alpha = \pi/4, 4 - \alpha = \pi/3$

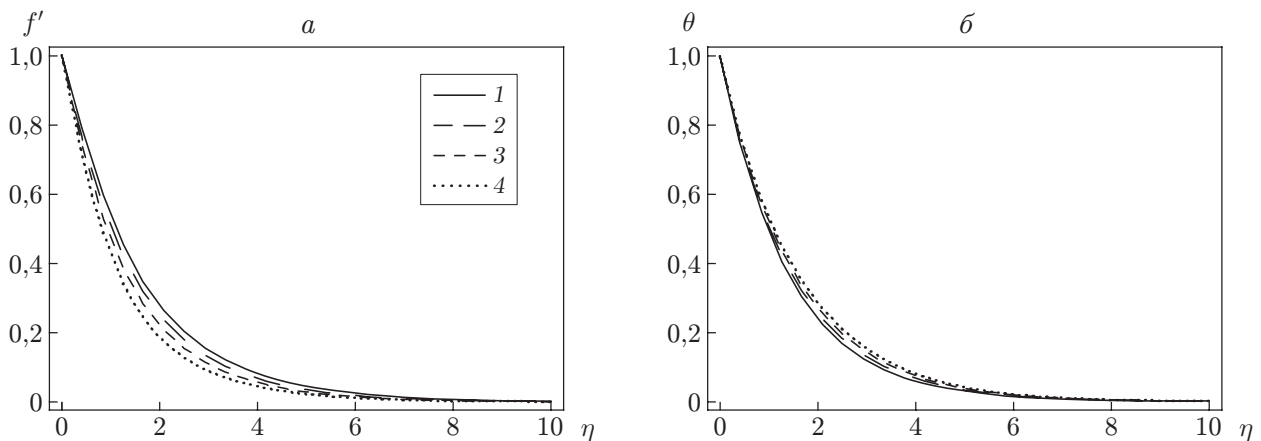


Рис. 3. Зависимости скорости  $f'$  (а) и температуры  $\theta$  (б) от параметра  $\eta$  при  $\alpha = \pi/4, \lambda = 1,0, \beta_2 = 0,2, R = 0,5, Pr = 0,7$  и различных значениях числа Дебори  $\beta_1$ :

1 —  $\beta_1 = 0, 2 - \beta_1 = 0,3, 3 - \beta_1 = 0,6, 4 - \beta_1 = 0,9$

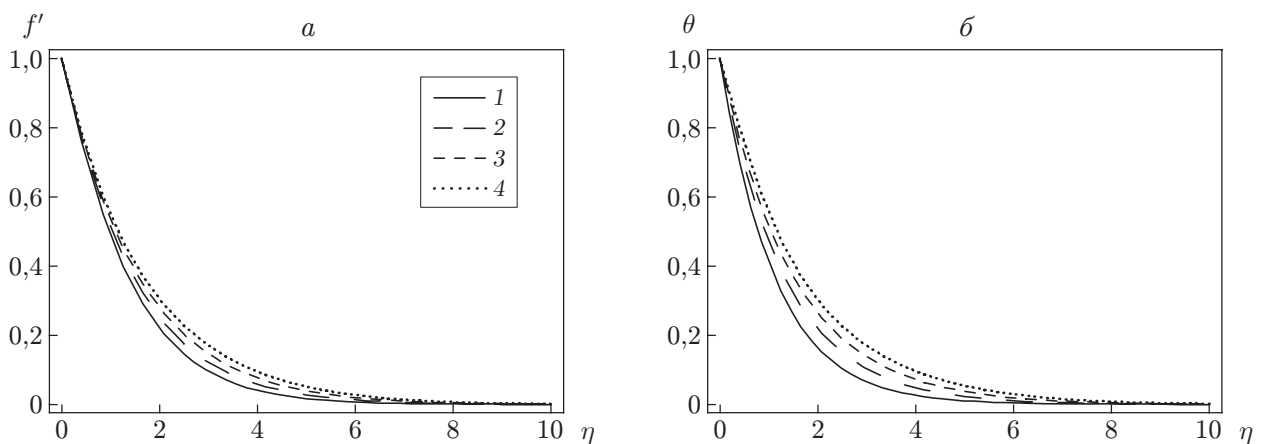


Рис. 4. Зависимости скорости  $f'$  (а) и температуры  $\theta$  (б) от параметра  $\eta$  при  $\alpha = \pi/4, \lambda = 1,0, \beta_1 = \beta_2 = 0,2, Pr = 0,7$  и различных значениях параметра теплового излучения  $R$ :

1 —  $R = 0, 2 - R = 0,3, 3 - R = 0,6, 4 - R = 0,9$

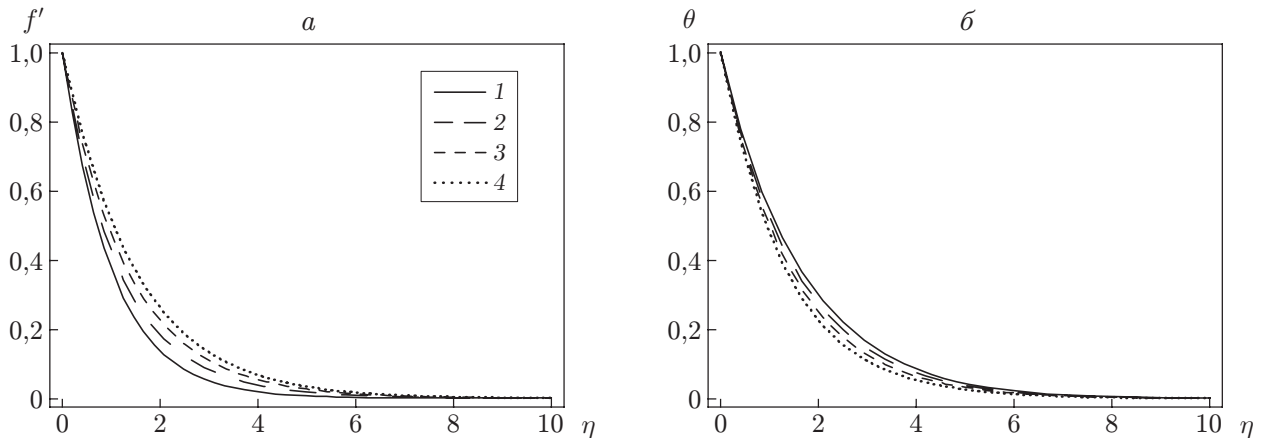


Рис. 5. Зависимости скорости  $f'$  (а) и температуры  $\theta$  (б) от параметра  $\eta$  при  $\alpha = \pi/4$ ,  $R = 0,5$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0,2$ ,  $\text{Pr} = 0,7$  и различных значениях параметра смешанной конвекции  $\lambda$ :  
 а — 1 —  $\lambda = 0$ , 2 —  $\lambda = 0,3$ , 3 —  $\lambda = 0,6$ , 4 —  $\lambda = 0,9$ ; б — 1 —  $\lambda = 0$ , 2 —  $\lambda = 0,5$ , 3 —  $\lambda = 1,0$ , 4 —  $\lambda = 1,5$

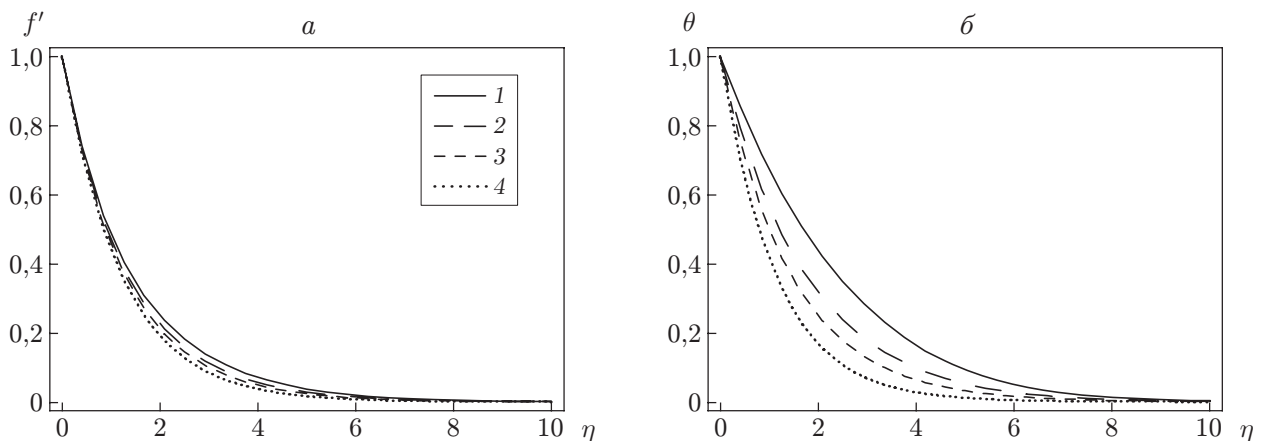


Рис. 6. Зависимости скорости  $f'$  (а) и температуры  $\theta$  (б) от параметра  $\eta$  при  $\alpha = \pi/4$ ,  $R = 0,5$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0,2$  и различных значениях числа Прандтля  $\text{Pr}$ :  
 а —  $\lambda = 0,5$ , б —  $\lambda = 1,0$ ; 1 —  $\text{Pr} = 0,2$ , 2 —  $\text{Pr} = 0,5$ , 3 —  $\text{Pr} = 0,7$ , 4 —  $\text{Pr} = 1,0$

жидкости увеличивается, а температура уменьшается. В табл. 2 приведены значения локального числа Нуссельта при различных значениях  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\lambda$ ,  $\text{Pr}$ ,  $R$ . Следует отметить, что с увеличением  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\text{Pr}$  значения локального числа Нуссельта увеличиваются, а с увеличением  $\lambda$  и  $R$  — уменьшаются.

**Заключение.** В работе изучено влияние теплового излучения на смешанное конвективное течение жидкости Олдройда-В по наклонной растягивающейся пластине. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

С увеличением параметра смешанной конвекции  $\lambda$  скорость жидкости увеличивается, а температура уменьшается.

С увеличением угла наклона  $\alpha$  толщина пограничного слоя уменьшается, а толщина теплового пограничного слоя увеличивается.

При увеличении числа Прандтля  $\text{Pr}$  температура уменьшается быстрее, чем скорость. С увеличением числа Прандтля толщина теплового пограничного слоя уменьшается.

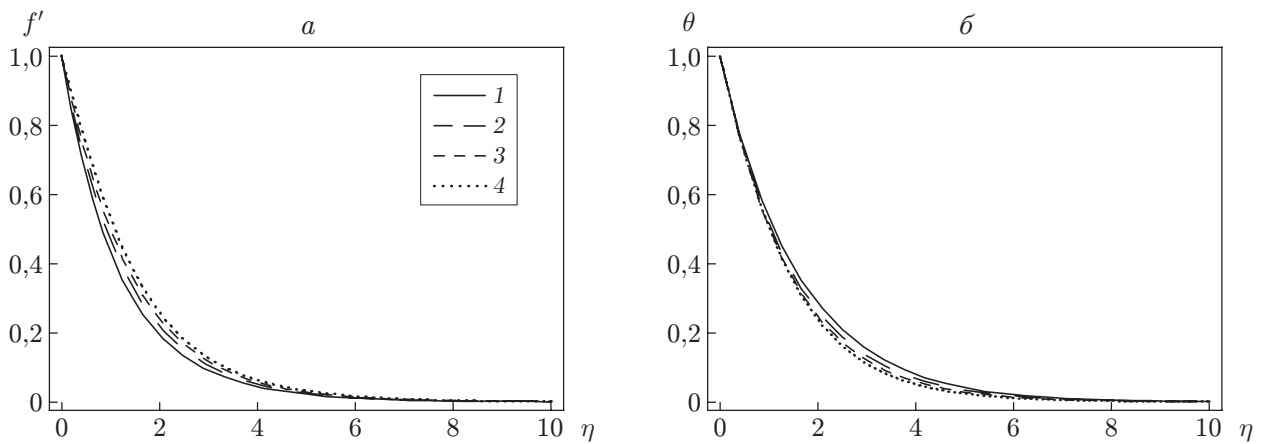


Рис. 7. Зависимости скорости  $f'$  (а) и температуры  $\theta$  (б) от параметра  $\eta$  при  $\alpha = \pi/4$ ,  $R = 0,5$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\lambda = 0,5$  и различных значениях параметра  $\beta_2$ :  
 а — 1 —  $\beta_2 = 0$ , 2 —  $\beta_2 = 0,3$ , 3 —  $\beta_2 = 0,6$ , 4 —  $\beta_2 = 0,9$ ; б — 1 —  $\beta_2 = 0$ , 2 —  $\beta_2 = 0,5$ , 3 —  $\beta_2 = 1,0$ , 4 —  $\beta_2 = 1,5$

Таблица 2

Значения локального числа Нуссельта при  $\alpha = \pi/4$  и различных значениях  $\beta_1, \beta_2, \lambda, Pr, R$

$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$	$Pr$	$R$	$-(1 + 4R/3)\theta'(0)$
0	0,2	0,5	0,7	0,3	0,738 87
0,2	0,2	0,5	0,7	0,3	0,712 84
0,4	0,2	0,5	0,7	0,3	0,724 56
0,5	0,2	0,5	0,7	0,3	0,705 28
0,2	0	0,5	0,7	0,3	0,707 29
0,2	0,2	0,5	0,7	0,3	0,719 25
0,2	0,4	0,5	0,7	0,3	0,729 51
0,2	0,5	0,5	0,7	0,3	0,734 13
0,2	0,2	0	0,7	0,3	0,667 87
0,2	0,2	0,3	0,7	0,3	0,703 24
0,2	0,2	0,5	0,7	0,3	0,719 24
0,2	0,2	0,8	0,7	0,3	0,738 69
0,2	0,2	0,5	0,3	0,3	0,437 57
0,2	0,2	0,5	0,5	0,3	0,589 61
0,2	0,2	0,5	0,7	0,3	0,719 25
0,2	0,2	0,5	0,9	0,3	0,834 72
0,2	0,2	0,5	0,7	0	0,840 20
0,2	0,2	0,5	0,7	0,2	0,754 19
0,2	0,2	0,5	0,7	0,5	0,660 85
0,2	0,2	0,5	0,7	0,7	0,609 59



Числа Деборы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  оказывают противоположное влияние на скорость и температуру. При увеличении  $\beta_1$  скорость уменьшается, а температура увеличивается, при увеличении  $\beta_2$  — наоборот.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mushtaq M., Asghar S., Hossain M. A.** Mixed convection flow of a second grade fluid along a vertical stretching flat surface with variable surface temperature // *Heat Mass Transfer*. 2007. V. 43. P. 1049–1061.
2. **Mukhopadhyay S.** Effects of slip on unsteady mixed convective flow and heat transfer past a stretching surface // *Chin. Phys. Lett.* 2010. V. 27. 124401.
3. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A., Alhothuali M. S.** Mixed convection stagnation point flow of Casson fluid with convective boundary conditions // *Chin. Phys. Lett.* 2012. V. 29. 114704.
4. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M.** Mixed convection flow of a micropolar fluid with radiation and chemical reaction // *Intern. J. Numer. Methods Fluids*. 2011. V. 67. P. 2375–2387.
5. **Das K.** Effects of thermophoresis and thermal radiation on MHD mixed convective heat and mass transfer flow // *Afrika Mat.* 2013. V. 24, iss. 4. P. 511–524. DOI: 10.1007/s13370-012-0077-7.
6. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Slip effects on the boundary layer stagnation point flow and heat transfer towards a shrinking sheet // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2011. V. 54. P. 308–313.
7. **Pal D.** Mixed convection heat transfer in the boundary layers on an exponentially stretching surface with magnetic field // *Appl. Math. Comput.* 2010. V. 217. P. 2356–2369.
8. **Ibrahim W., Shankar B.** MHD boundary layer flow and heat transfer of a nanofluid past a permeable stretching sheet with velocity, thermal and solutal slip boundary conditions // *Comput. Fluids*. 2013. V. 75. P. 1–10.
9. **Mukhopadhyay S.** MHD boundary layer flow and heat transfer over an exponentially stretching sheet embedded in a thermally stratified medium // *Alexandria Engng J.* 2013. V. 52, iss. 3. P. 259–265.
10. **Moradi A., Ahmadikia H., Hayat T., Alsaedi A.** On mixed convection radiation interaction about an inclined plate through a porous medium // *Intern. J. Thermal Sci.* 2013. V. 64. P. 129–136.
11. **Ellahi R., Riaz A., Nadeem S., Ali M.** Peristaltic flow of Carreau fluid in a rectangular duct through a porous medium // *Math. Problems Engng.* 2012. V. 2012. P. 1–24.
12. **Jamil M., Fetecau C., Fetecau C.** Unsteady flow of viscoelastic fluid between two cylinders using fractional Maxwell model // *Acta Mech. Sinica.* 2012. V. 28. P. 274–280.
13. **Qi H. T., Liu J. G.** Some duct flows of a fractional Maxwell fluid // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2011. V. 193. P. 71–79.
14. **Tan W. C., Masuoka T.** Stability analysis of a Maxwell fluid in a porous medium heated from below // *Phys. Lett. A.* 2007. V. 360. P. 454–460.
15. **Qasim M., Hayat T., Obaidat S.** Radiation effect on the mixed convection flow of a viscoelastic fluid along an inclined stretching sheet // *Z. Naturforsch.* 2012. Bd 67a. S. 195–202.
16. **Liao S. J.** Homotopy analysis method in nonlinear differential equations. Beijing; Berlin; Heidelberg: Higher Edu. Press: Springer-Verlag, 2012.
17. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., et al.** Second grade fluid flow with power law heat flux and heat source // *Heat Transfer. Res.* 2013. V. 44. P. 687–702.
18. **Zheng L., Niu J., Zhang X., Gao Y.** MHD flow and heat transfer over a porous shrinking surface with velocity slip and temperature jump // *Math. Comput. Modelling.* 2012. V. 56. P. 133–144.

19. **Abbasbandy S., Hashemi M. S., Hashim I.** On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations // Quaestiones Math. 2013. V. 36. P. 93–105.
20. **Beg O. A., Rashidi M. M., Beg T. A., Asadi M.** Homotopy analysis of transient magneto-bio-fluid dynamics of micropolar squeeze film in a porous medium: A model for magnet-bio-rheological lubrication // J. Mech. Med. Biol. 2012. V. 12. 1250051.
21. **Rashidi M. M., Mohimanian Pour S. A., Abbasbandy S.** Analytic approximate solutions for heat transfer of a micropolar fluid through a porous medium with radiation // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1874–1889.
22. **Turkyilmazoglu M.** Solution of Thomas — Fermi equation with a convergent approach // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 4097–4103.
23. **Turkyilmazoglu M.** The Airy equation and its alternative analytic solution // Phys. Scripta. 2012. V. 86. 055004.
24. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Radiative flow of Jeffery fluid in a porous medium with power law heat flux and heat source // Nuclear Engng Design. 2012. V. 243. P. 15–19.
25. **Hayat T., Bilal Ashraf M., Alsaedi A.** Small-time solutions for the thin film flow of a Casson fluid due to a suddenly moved plate // J. Aerospace Engng. 2013. V. 27, N 6. 04014034.

*Поступила в редакцию 2/XII 2013 г.*

---