

УДК 533.06

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПОЛОСЕ

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построено точное решение, описывающее течение газа в полосе между прямолинейными источником и стоком. С увеличением времени полоса поворачивается и расширяется. В случае согласованных граничных условий течение в полосе непрерывно. При невыполнении условий согласования внутри полосы образуется ударная волна.

Ключевые слова: политропный газ, инвариантное решение, ударная волна, проективное преобразование.

Введение. Групповая классификация уравнений движения вязкого нетеплопроводного газа впервые была выполнена Л. В. Овсянниковым [1]. Им установлен следующий замечательный факт: в случае политропного газа со специальным показателем адиабаты $\gamma = (n+2)/n$ (n — количество пространственных переменных) уравнения газовой динамики (УГД) помимо “угадываемой” группы Галилея и растяжений допускают проективное преобразование (ПП). Позднее это преобразование было найдено независимо А. А. Никольским [2, 3]. Необычность ПП состоит в том, что оно не следует из “физических” свойств однородности пространства, принципа относительности Галилея и проч. В то же время, как показано в [4], ПП порождает новые законы сохранения в УГД.

Одно из возможных применений ПП для получения точных решений УГД основано на том, что под действием допускаемого преобразования решение переходит снова в решение. Этим способом производства новых решений из известных А. А. Никольским получены нестационарные решения УГД, порождаемые постоянным решением, а также течением типа сферического источника или стока. На основе решения, получающегося под действием ПП из простой волны Римана, им дано решение задачи о распаде разрыва, когда в начальный момент однородно расширяющийся или сжимающийся газ граничит с областью вакуума. При помощи известного решения Л. И. Седова [5] исследована задача о точечном взрыве в однородно расширяющейся или сжимающейся среде. К этому же направлению исследований можно отнести работу [6], где показано, как на основе ПП, а также преобразования Мунка и Прима [7], имеющегося в стационарном случае, получать из известных стационарных решений УГД новые нестационарные решения, обладающие функциональным произволом.

Есть отдельные примеры использования ПП для построения точных инвариантных решений. В работе [8] на основе ПП получено точное решение уравнений двумерной газовой динамики. В рамках модели мелкой воды оно трактуется как растекание с вращением жидкого кольца произвольного начального сечения. Другое инвариантное решение, построенное с использованием ПП, рассмотрено в [9]. Здесь конструируется инвариантная подмодель на одномерной подалгебре, содержащей проективный оператор. Для нее рассмотрено решение, инвариантное относительно полной группы вращений. Дано описание

сильных разрывов на таких решениях в одно-, двух- и трехмерном случаях. Классы инвариантных решений, порождаемых ПП, были выделены в [10]. В работе [11] дано полное перечисление и проведено предварительное исследование инвариантных и регулярных частично инвариантных подмоделей УГД ($\dim = 2 + 1$, $\gamma = 2$), порождаемых ПП. В [12] описана еще одна подмодель, построенная с использованием ПП. Линиями уровня в ней являются лучи, выходящие из начала координат. Особенность решения состоит в инвариантности относительно дискретной симметрии — поворота вокруг начала координат на некоторый фиксированный угол.

В настоящей работе подробно описывается одно из инвариантных решений, полученных в [11]. Линиями уровня в изучаемом решении являются прямые, образующие в каждый момент времени ортогональную сетку на плоскости. Оказалось, что описываемое точное решение УГД определено лишь в некоторой полосе, поворачивающейся и расширяющейся с увеличением времени. Границы полосы являются источником и стоком газа определенной интенсивности. В том случае, когда интенсивности источника и стока согласованы, течение в полосе непрерывно. В случае несогласованных данных на границах полосы внутри нее возникает ударная волна. Все решение (в том числе с ударной волной) описывается конечными формулами.

1. Предварительные сведения. Уравнения газовой динамики для политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$ записаны в стандартных обозначениях скорости $\mathbf{u} = (u, v)$, плотности ρ , давления p и энтропии S :

$$\begin{aligned} \rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + 2p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ p = S\rho^2, \quad D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функции \mathbf{u} , p , ρ , S зависят от пространственных координат $\mathbf{x} = (x, y)$ и времени t .

В случае $S = \text{const}$ уравнения (1.1) совпадают с моделью движения тонкого слоя потенциальной жидкости в поле силы тяжести над ровным дном (модель мелкой воды). При этом гидродинамическим аналогом плотности является высота слоя жидкости. В дальнейшем будем использовать эту аналогию для более наглядной трактовки получаемых решений.

Уравнения (1.1) допускают 10-мерную группу Ли G_{10} преобразований. Она состоит из переносов по осям координат и времени, галилеевых переносов, вращения, трех растяжений и проективного преобразования. Оптимальная система подгрупп ΘG_{10} , а также список инвариантных и регулярных частично инвариантных подмоделей для системы (1.1) имеются в работах [10, 11]. Ниже выделяется и подробно исследуется одна из инвариантных подмоделей уравнений (1.1), порождаемая подгруппой, содержащей проективное преобразование.

2. Инвариантная подмодель ранга 2. Выбирается одномерная подалгебра, порождаемая оператором:

$$\begin{aligned} H_1 = (t^2 + 1)\partial_t + (-y + tx)\partial_x + (x + ty)\partial_y + (x - tu - v)\partial_u + \\ + (y + u - tv)\partial_v + (\alpha - 2t)\rho\partial_\rho + (\alpha - 4t)p\partial_p. \end{aligned}$$

Параметр α может принимать произвольные действительные значения. Конечное преобразование, отвечающее оператору H_1 , состоит в одновременном вращении в плоскости Oxy , переносе по времени, растяжении p и ρ и проективном преобразовании. Представление решения ранга 2 записывается в виде

$$\begin{aligned} u = \frac{tU(\lambda, \mu) + V(\lambda, \mu) + tx - y}{t^2 + 1}, \quad v = \frac{-U(\lambda, \mu) + tV(\lambda, \mu) + ty + x}{t^2 + 1}, \\ p = \frac{P(\lambda, \mu)}{(t^2 + 1)^2} e^{\alpha \arctg t}, \quad \rho = \frac{R(\lambda, \mu)}{t^2 + 1} e^{\alpha \arctg t}, \quad c^2 = \frac{2p}{\rho} = \frac{Z(\lambda, \mu)}{t^2 + 1}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$S = S(\lambda, \mu) e^{-\alpha \operatorname{arctg} t}, \quad \lambda = \frac{tx - y}{t^2 + 1}, \quad \mu = \frac{ty + x}{t^2 + 1}.$$

Здесь инвариантные функции U, V, P, R, S , зависящие от инвариантных переменных λ и μ , определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} UU_\lambda + VU_\mu + \frac{1}{R} P_\lambda = 2V, & \quad UV_\lambda + VV_\mu + \frac{1}{R} P_\mu = -2U, \\ UR_\lambda + VR_\mu + R(U_\lambda + V_\mu) = -\alpha R, & \quad US_\lambda + VS_\mu = \alpha S, \quad P = SR^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система (2.2) отличается от уравнений, задающих двумерные установившиеся движения газа наличием ненулевой правой части. Выясним роль координат λ и μ по отношению к физическим координатам t, x, y . Заметим, что линии $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ в каждый фиксированный момент времени образуют ортогональную сетку на плоскости Oxy . В начальный момент $t = 0$ эта сетка совпадает с координатными линиями $x = \text{const}, y = \text{const}$. С увеличением времени сетка $O\lambda\mu$ поворачивается против часовой стрелки относительно центра O так, что при $t \rightarrow \infty$ угол поворота достигает $\pi/2$. Одновременно происходит равномерное растяжение сетки $O\lambda\mu$. При $t \rightarrow \infty$ каждая точка $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0$ уходит на бесконечность на физической плоскости Oxy . Таким образом, “стационарной” картине течения в терминах инвариантных переменных соответствует разлет с одновременным вращением против часовой стрелки на физической плоскости.

Уравнения для траектории частицы, стартующей при $t = 0$ из точки (x_0, y_0) , в инвариантных переменных записываются в виде

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{U}{t^2 + 1}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{V}{t^2 + 1}, \quad \lambda(0) = -y_0, \quad \mu(0) = x_0. \quad (2.3)$$

Система (2.2) допускает алгебру L_4 , состоящую из переносов по λ, μ , вращения и растяжения. При $\alpha = 0$ возможно введение функции тока $\psi(\lambda, \mu)$ равенствами

$$UR = \psi_\mu, \quad VR = -\psi_\lambda. \quad (2.4)$$

Справедливы следующие первые интегралы системы (2.2):

$$U^2 + V^2 + 2Z = F(\psi), \quad S = S(\psi). \quad (2.5)$$

Здесь F и S — произвольные функции.

Для течений с разрывами типа ударной волны (УВ), определяемых системой (2.2), необходимо записать условия Гюгонио в терминах инвариантных переменных. Предположим, что фронт сильного разрыва задается формулой $h(\lambda, \mu) = \text{const}$. Обозначим через u_n нормальную к фронту компоненту скорости \mathbf{u} и через D_n — скорость перемещения фронта в направлении нормали. Тогда относительная скорость движения газа есть

$$u_n - D_n = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \frac{Uh_\lambda + Vh_\mu}{\sqrt{h_\lambda^2 + h_\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} U_n. \quad (2.6)$$

Условия Гюгонио в терминах инвариантов (предполагается, что константа α не меняется при переходе через УВ) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} [RU_n] = 0, \quad [RU_n^2 + P] = 0, \quad [U_n^2 + 4P/R] = 0, \\ [S] > 0, \quad [Uh_\mu - Vh_\lambda] = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ниже подробно изучается инвариантная относительно переноса по μ подмодель уравнений (2.2).

3. Инвариантная подмодель ранга 1. Рассматривается инвариантное решение уравнений газовой динамики (1.1) относительно двумерной подалгебры $L_2 = \{H_1, H_2\}$ со следующим оператором H_2 :

$$H_2 = \partial_x + t\partial_y + \partial_v.$$

В исходных переменных оператор H_2 задает преобразование одновременного переноса по оси Ox и галилеева переноса по оси Oy . В инвариантных переменных подмодели (2.2) оператор H_2 соответствует сдвигу по μ . Таким образом, представление решения подмодели совпадает с (2.1), где инвариантные функции U, V, P, R, S, Z зависят только от одной инвариантной переменной λ . Уравнения подмодели находятся из (2.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} UU' + P'/R = 2V, \quad UV' = -2U, \\ RU' + UR' = -\alpha R, \quad US' = \alpha S, \quad P = SR^2, \quad Z = 2P/R \end{aligned} \quad (3.1)$$

(штрих означает производную по λ). При исследовании подмодели возникает несколько случаев.

а) $\alpha = 0, U \equiv 0$. Решение задается формулами

$$U = 0, \quad V = S'R/2 + SR', \quad R = R(\lambda), \quad S = S(\lambda) \quad (3.2)$$

с произвольными функциями $R(\lambda)$ и $S(\lambda)$. В инвариантных переменных это решение является аналогом сдвигового. При $S = 1/2$ получаем решение для уравнений мелкой воды. При этом функция $R(\lambda)$ задает профиль сечения $x = \text{const}$ свободной поверхности жидкости при $t = 0$. В начальный момент свободная поверхность имеет вид цилиндра с образующей, параллельной оси Ox , и направляющей $R(-y)$. С увеличением времени жидкость, ограниченная этой поверхностью, поворачивается против часовой стрелки и растекается.

В случае, когда функция $R(\lambda)$ имеет непрерывную производную, все решение непрерывно на плоскости. Если же производная $R'(\lambda)$ терпит разрыв первого рода при некотором $\lambda = \lambda_*$, получается движение с контактными разрывом. Действительно, на линии разрыва непрерывны нормальная компонента скорости U и глубина жидкости R . Касательная к прямой $\lambda = \lambda_*$ компонента скорости V терпит разрыв первого рода. Решение (3.2) не может примыкать к инвариантной ударной волне с уравнением фронта $\lambda = \text{const}$ в силу того, что относительная скорость газа U равна нулю (через фронт волны газ не течет).

б) $\alpha = 0, U \neq 0$. С точностью до несущественных констант решение уравнений (3.1) задается набором первых интегралов

$$\begin{aligned} U^2 + 2Z + 4\lambda^2 = D^2, \quad UZ = m, \quad V = -2\lambda, \quad S = S_0, \\ D, m, S_0 = \text{const}, \quad D^2 > 3m^{2/3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что система (2.2) допускает следующее преобразование (инволюцию):

$$\lambda \rightarrow -\lambda, \quad \mu \rightarrow -\mu, \quad U \rightarrow -U, \quad V \rightarrow -V, \quad (3.4)$$

в силу которого можно считать, что $U > 0, m > 0$ (по определению $Z \geq 0$). Введем обозначения

$$F(U) = U^2 + 2m/U, \quad G(\lambda) = D^2 - \lambda^2.$$

Зависимость $U(\lambda)$ двузначна (рис. 1). График функции $U(\lambda)$ приведен на рис. 2. Решение определено на конечном интервале $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$ с $\lambda_1 = \sqrt{D^2 - 3m^{2/3}}$. Прямые $\lambda = \lambda_1$ являются двоянными C_{\pm} характеристиками уравнений газовой динамики (1.1). На них обращается в бесконечность производная $U'(\lambda)$. Функция U принимает значения из интервала, отделенного от нуля. Верхняя (нижняя) ветка решения соответствует движениям

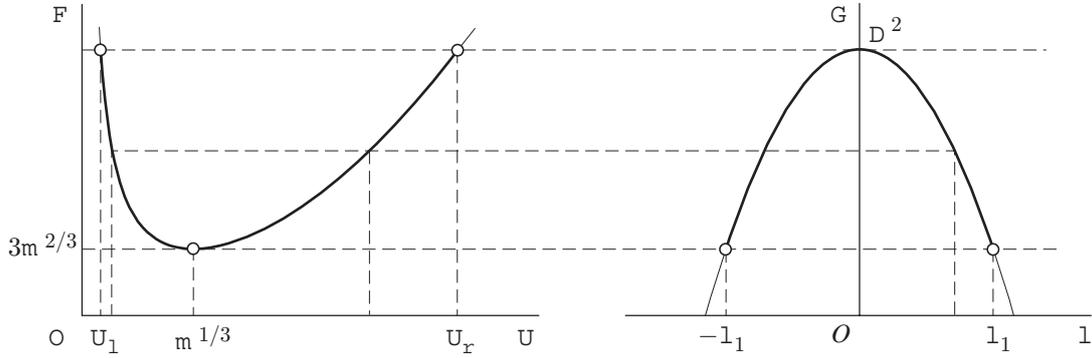


Рис. 1. Восстановление зависимости $U(\lambda)$ путем сопоставления графиков функций $F(U)$ и $G(\lambda)$: $F(U) = G(\lambda)$

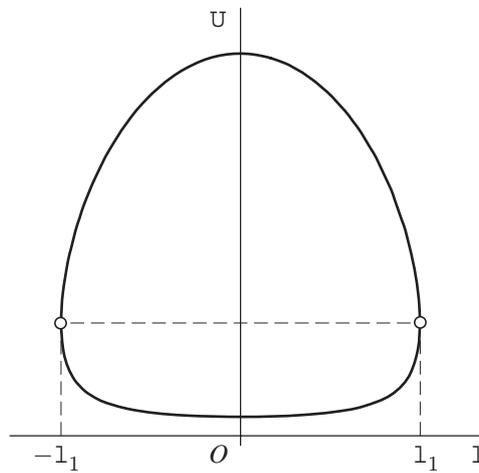


Рис. 2. Двухзначная зависимость $U(\lambda)$. Верхней (нижней) ветви функции соответствуют движения газа с $U^2 > Z$ ($U^2 < Z$)

газа, в которых относительная скорость (2.6) больше (меньше) местной скорости звука. В граничных точках $\lambda = \lambda_1$ эти скорости совпадают.

в) $\alpha \neq 0$. Интегрирование сводит систему (3.1) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) первого порядка и набору первых интегралов:

$$UZ = m, \quad V = -2\lambda, \quad S = S_0 \exp \left(\alpha \int U^{-1}(\lambda) d\lambda \right); \tag{3.5}$$

$$U' = - \frac{8\lambda U^2 - \alpha m}{2(U^3 - m)}. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) при конечных λ, U имеет одну особую точку $\lambda = \alpha m^{1/3}/8, U = m^{1/3}$, которая является фокусом при $|\alpha| < 4\sqrt{3}$, узлом при $|\alpha| > 4\sqrt{3}$ и вырожденным узлом при $|\alpha| = 4\sqrt{3}$. В силу инволюции (3.4), дополненной преобразованием $\alpha \rightarrow -\alpha$, картина интегральных кривых на плоскости (λ, U) при $\alpha < 0$ получается из картины при таком же по модулю $\alpha > 0$ отражением относительно оси $\lambda = 0$. Характерные картины интегральных кривых приведены на рис. 3, где штриховая линия — это прямая $U = m^{1/3}$, на которой $U'(\lambda) \rightarrow \infty$. Однозначное решение $U(\lambda)$ уравнения (3.6) также определено только на конечном интервале изменения λ .

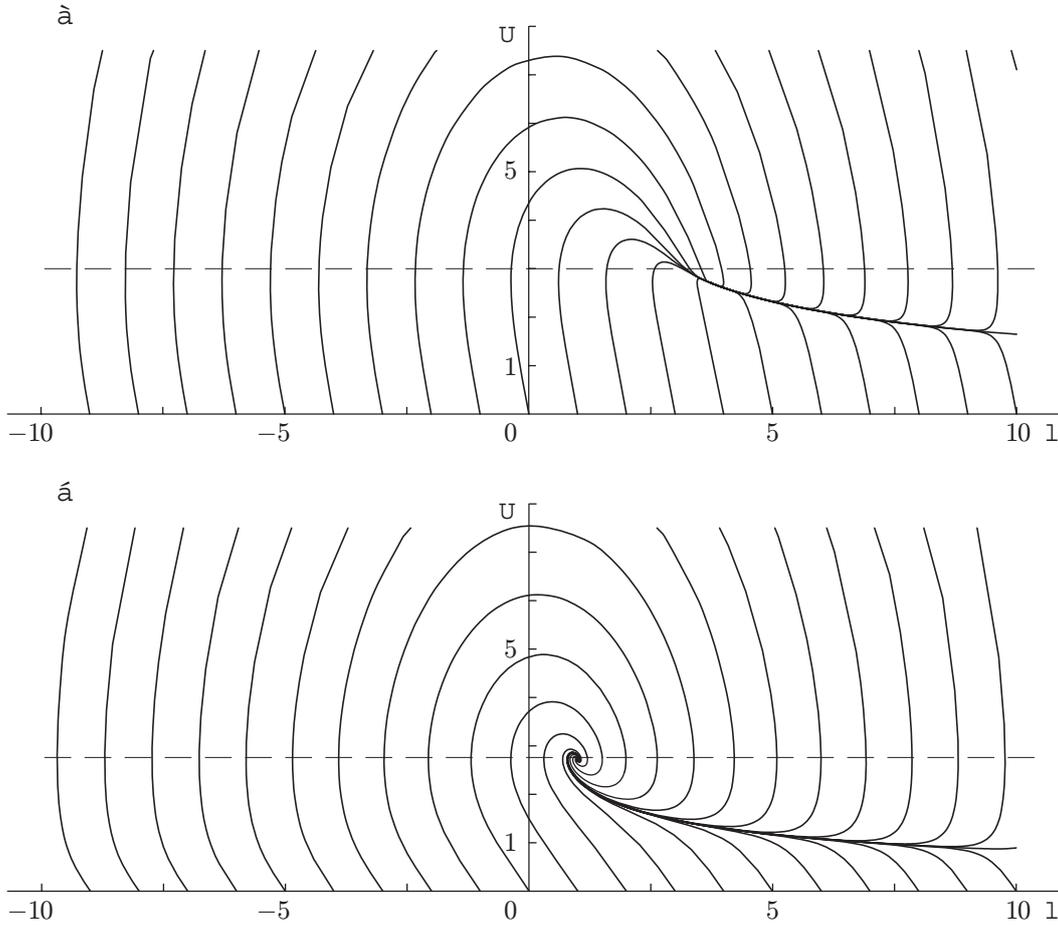


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (3.6):
 а — особая точка является узлом, $m = 10$, $\alpha = 4\sqrt{3} + 4$; б — особая точка является фокусом, $m = 10$, $\alpha = 4\sqrt{3} - 4$

Отметим, что в обоих случаях ($\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$) физический смысл константы m определяется как расход газа, проходящего через сечение $\lambda = \text{const}$.

4. Ударная волна. Докажем возможность сопряжения решений подмодели (3.1) через ударный переход. Пусть инвариантная ударная волна задается уравнением $\lambda = \lambda_*$. Скорость газа относительно фронта волны согласно (2.6) есть $U/\sqrt{t^2 + 1}$, т. е. в соотношениях (2.7) нужно взять $U_n = U$. С использованием инвариантной скорости звука Z соотношения Гюгонио (2.7) записываются в виде

$$[RU] = 0, \quad [U^2 + 2Z] = 0, \quad [U + Z/(2U)] = 0, \quad [V] = 0, \quad [S] > 0. \quad (4.1)$$

Первое соотношение (4.1) эквивалентно следующему: $[ZU/S] = 0$. Отсюда с использованием первого интеграла $ZU = m$ получаем

$$S_2 = S_1 \frac{Z_2 U_2}{Z_1 U_1} = S_1 \frac{m_2}{m_1}. \quad (4.2)$$

Из закона возрастания энтропии на ударном переходе следует $m_2 > m_1$. Для решений (3.3) и (3.5), (3.6) уравнение (4.2) выполняется при соответствующем выборе констант S_0 в решениях до и после скачка. Соотношение $[V] = 0$ удовлетворено автоматически в силу специальной зависимости $V(\lambda)$, определяемой формулами (3.3) и (3.5). Анализ оставшихся соотношений (4.1) удобно провести отдельно для решений с $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$.

В случае $\alpha = 0$ в качестве переменных, характеризующих состояние до и после скачка, удобно выбрать константу m и значение относительной скорости U . Из формул (3.3), а также второго условия Гюгонио (4.1) следует $[D] = 0$. Для удобства выполним преобразование растяжения так, что $D = \sqrt{3}$. Тогда параметры течения до скачка m_1 и U_1 выбираются произвольно из области

$$\Omega = \{U_1^2 + 2m_1/U_1 < 3, \quad m_1 < 1, \quad m_1 < U_1^3\}. \quad (4.3)$$

Оставшееся, третье соотношение (4.1) определяет значение константы m_2 за скачком в виде

$$m_2 = m_1 + 4(U_1^3 - m_1)^3 / (27U_1^6). \quad (4.4)$$

Остается показать, что для константы m_2 , вычисленной в соответствии с (4.4), выполняются условия существования решения вида (3.3), т. е. $m_2 < 1$. Оказывается, что это условие всегда выполнено, оно проверяется нахождением условного экстремума функции (4.4) в области (4.3). Отметим, что в силу теоремы Цемплена относительная скорость U должна быть больше скорости звука перед волной $U_1^2 > Z_1$ и меньше скорости звука за волной $U_2^2 < Z_2$. Отсюда следует, что при переходе через УВ происходит скачок с верхней ветви функции $U(\lambda)$ на нижнюю (с другой константой m).

В случае $\alpha \neq 0$ решение определяется формулами (3.5), (3.6). Для описания ударного перехода удобно использовать значения относительной скорости U перед и после УВ. Из второго и третьего соотношений (4.1) с использованием интеграла $ZU = m$ после некоторых преобразований получаем выражения для констант m_1 и m_2 :

$$m_1 = U_1^2(3U_2 - U_1)/2, \quad m_2 = U_2^2(3U_1 - U_2)/2. \quad (4.5)$$

В силу теоремы Цемплена $m_1 = U_1 Z_1 < U_1^3$. Подстановка сюда выражения для константы m_1 из (4.5) дает следующее ограничение: $U_2 < U_1$. Никаких других ограничений на выбор предельного значения функции U на сторонах УВ нет. Решение вида (3.5), (3.6), содержащее УВ, строится следующим образом:

выбираются произвольно константы U_1 и U_2 : $U_2 < U_1$;

вычисляются m_1 и m_2 по формулам (4.5);

произвольно выбирается положение скачка $\lambda = \lambda_*$;

решение до скачка $\lambda < \lambda_*$ находится из решения уравнения (3.6) с начальными данными $U(\lambda_*) = U_1$;

решение после скачка $\lambda > \lambda_*$ — из задачи Коши для уравнения (3.6) с начальными данными $U(\lambda_*) = U_2$;

значения остальных функций восстанавливаются по известной $U(\lambda)$ в соответствии с формулами (3.5).

Отметим, что в силу теоремы Цемплена скачок на УВ происходит из области $U^2 > Z$ (интегральные кривые выше штриховой прямой на рис. 3) в область $U^2 < Z$ (интегральные кривые ниже штриховой прямой на рис. 3).

5. Описание движения. Траектории частиц вычисляются в соответствии с формулами (2.3). На плоскости инвариантов (λ, μ) инвариантные линии тока находятся из уравнения

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{2\lambda}{U(\lambda)}. \quad (5.1)$$

Из него следует, что функция $\mu(\lambda)$ является возрастающей при $\lambda < 0$ и убывающей при $\lambda > 0$. Предельные линии $\lambda = \pm\lambda_1$ нужно считать источником и стоком газа. Нормальная скорость движения газа на них равна скорости звука $U^2 = Z$, а касательная компонента

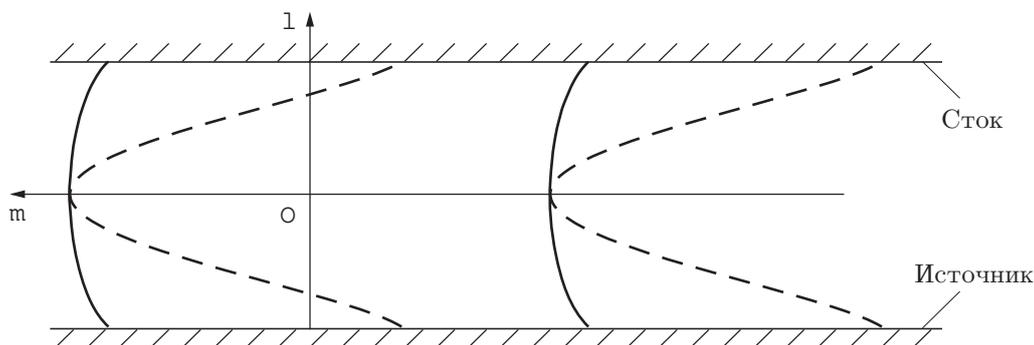


Рис. 4. Непрерывное движение газа

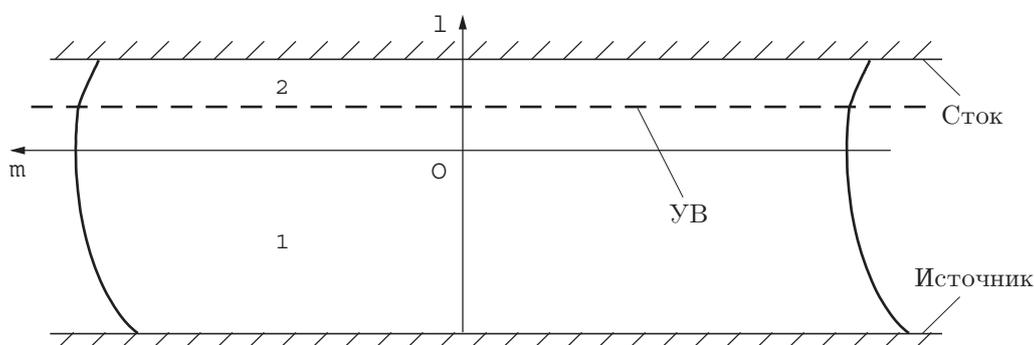


Рис. 5. Движение газа с ударной волной

скорости есть $V = \mp 2\lambda_1$. Расход источника и стока определяется константой m . Если источник и сток имеют одинаковый расход, течение между предельными линиями непрерывно. Если же константы m для источника и стока не согласованы ($m_2 > m_1$), в решении появляется ударная волна, описываемая приведенными выше формулами. Качественная картина течения (на примере решения (3.3)) иллюстрируется на рис. 4, 5, где сплошной линией показаны инвариантные линии тока для течения с $U^2 > Z$. На рис. 4 штриховой линией отмечены инвариантные линии тока, вычисленные при $U^2 < Z$. На рис. 5 штриховая линия показывает положение фронта ударной волны, цифрами 1 и 2 отмечены состояния до и после фронта ударной волны. На физической плоскости вся картина поворачивается против часовой стрелки и равномерно растекается от центра O .

Заключение. В работе построена инвариантная подмодель с прямолинейными линиями уровня, описывающая нестационарные двумерные движения политропного газа. Эта же подмодель в случае постоянной энтропии задает движения тонкого слоя идеальной жидкости над ровным горизонтальным дном. Имеется три типа решений. Решение первого типа задает сдвиговое вращательное движение. В рамках модели мелкой воды оно трактуется как растекание жидкого “хребта”, имеющего форму цилиндра с произвольным начальным сечением. Решения второго и третьего типа задают движения газа в полосе между параллельными линейными источником и стоком, которые поворачиваются и расходятся с увеличением времени. В случае, когда расходы источника и стока согласованы, течение между ними непрерывно. В случае несогласованных расходов в промежутке между источником и стоком образуется ударная волна. В решении второго типа энтропия постоянна, оно описывается конечными формулами. Решение третьего типа задает движение с переменной энтропией — его определение сводится к решению одного ОДУ первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 3. С. 439–442.
2. **Никольский А. А.** Инвариантное преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа и новые классы их точных решений // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 496–508.
3. **Никольский А. А.** Инвариантные преобразования уравнений движения идеального газа для специальных случаев // Инж. журн. 1963. Т. 3, № 1. С. 140–142.
4. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
5. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
6. **Speciale M. P., Oliveri F.** Exact solutions to gas dynamics equations and substitution principles // Proc. of the Intern. conf. MOGRAN VII, Nordfjordeid, Norway, 30 June — 5 July, 1997. Trondheim: MARS Publ., SYMMETRY Found., 1999. P. 293–300.
7. **Munk M., Prim R.** On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947. V. 33. P. 137–141.
8. **Хабиров С. В.** Одно инвариантное решение уравнений мелкой воды // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 3. С. 82–90.
9. **Хабиров С. В.** Нестационарное инвариантное решение уравнений газовой динамики, описывающее растекание газа до вакуума // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 6. С. 967–975.
10. **Ибрагимов Н. Х.** Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа // ПМТФ. 1966. № 4. С. 19–22.
11. **Golovin S. V.** Two-dimensional gas motions with special symmetry properties // Proc. of the Intern. conf. MOGRAN VIII, Ufa, Russia, 27 Sept. — 3 Oct., 2000. Ufa: USATU Publ., 2001. P. 71–76.
12. **Головин С. В.** О двумерных движениях газа со специальным показателем адиабаты // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 569–579.

Поступила в редакцию 27/X 2003 г.
