

УДК 534.015, 621.314.21

СВЯЗАННЫЕ МАЯТНИКИ КАК МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМАТОРА ТЕСЛА

Е. И. Пальчиков^{*,**}, Е. Е. Тарасова^{***}, И. Е. Тарасова^{****}

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

*** Специализированный учебно-научный центр Новосибирского национального
исследовательского государственного университета, 630090 Новосибирск, Россия

**** Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия
E-mails: palchikov@hydro.nsc.ru, katerina.e.tarasova@gmail.com, tarasova.ie@phystech.edu

Проводится сравнение импульсного резонансного трансформатора с ударным возбуждением и системы связанных маятников различной массы, настроенных в резонанс. Для трансформатора Тесла и связанных маятников получены условия полной передачи энергии в течение половины цикла биений. Впервые теоретически определены и экспериментально проверены требования к параметрам системы и начальным условиям, необходимые для полной передачи энергии в случае двух маятников различной массы, имеющих одинаковую длину и связанных пружиной. Получена зависимость наименьшего времени полной передачи энергии от одного осциллятора к другому от параметров системы.

Ключевые слова: трансформатор Тесла, связанные осцилляторы, механические системы, резонанс, передача энергии.

DOI: 10.15372/PMTF20220402

Введение. Исследования передачи и преобразования энергии являются наиболее актуальными задачами физики. Приоритетной задачей в технике является передача энергии при ее преобразовании с минимальными потерями — достижение максимального коэффициента полезного действия (КПД). Достаточно часто требуется передать энергию не только с минимальными потерями, но и за минимальное время.

Предложенный Н. Теслой [1, 2] импульсный резонансный трансформатор с ударным возбуждением представляет собой два связанных через магнитное поле колебательных контура, настроенных в резонанс, с начальным накоплением энергии в емкости первичного контура (рис. 1). В работе [3] впервые приведено математическое описание колебаний в двух связанных и резонансно настроенных контурах. Более подробный анализ резонансно настроенных контуров проведен в работе [4]. Однако в работах [3, 4] не исследовалась возможность оптимальной передачи энергии и повышения КПД системы. По-видимому, впервые анализ процесса передачи энергии в трансформаторе Тесла был проведен в работе [5]. Позднее в Институте ядерной физики СО РАН (Новосибирск) были подробно исследованы условия оптимальной передачи энергии в сильноточных ускорителях-трансформаторах типа РИУС и ЭЛИТ [6, 7].

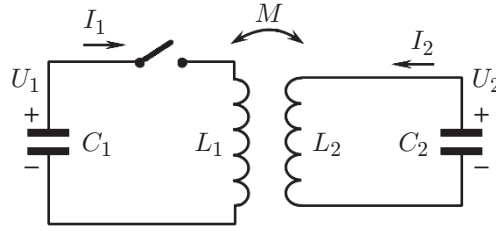


Рис. 1. Схема трансформатора Тесла

Два маятника одинаковой длины, соединенные пружиной, описываются уравнениями [8], подобными уравнениям для двух связанных электрических колебательных контуров, настроенных в резонанс. В работах [9, 10] исследуется передача энергии в случае, когда связанные маятники имеют одинаковую массу. Такая система осцилляторов не соответствует модели трансформатора Тесла, в которой все индуктивности и емкости разные, а резонансные частоты одинаковые. В случае системы механических осцилляторов с маятниками различной массы происходит существенное изменение параметров системы, при которых энергия передается с минимальными потерями (максимальным КПД) и за минимальное время.

Целью данной работы является исследование условий достижения максимального значения коэффициента передачи энергии в системе связанных и настроенных в резонанс маятников, имеющих одинаковую длину, но разную массу, аналогичной по начальным и граничным условиям трансформатору Тесла. Рассчитываются и экспериментально проверяются оптимальные условия, при которых энергия может полностью передаваться от массивного маятника к легкому за минимальное время в одном цикле биений (в отсутствие трения). Данные условия для системы маятников ранее не определялись даже в случае приближения линейных осцилляций.

Анализ трансформатора Тесла. Трансформатор Тесла состоит из двух связанных магнитным полем и настроенных в резонанс контуров (см. рис. 1). Первоначально энергия накапливается в заряженном до напряжения U_{10} конденсаторе C_1 . При замыкании ключа в связанных контурах начинаются колебания с биениями.

Зависимости напряжений U_1 и U_2 на емкостях C_1 и C_2 от времени описываются дифференциальными уравнениями

$$L_1 C_1 \ddot{U}_1 + U_1 + M C_2 \ddot{U}_2 = 0; \quad (1)$$

$$L_2 C_2 \ddot{U}_2 + U_2 + M C_1 \ddot{U}_1 = 0, \quad (2)$$

где L_1, L_2 — индуктивности контуров; M — коэффициент взаимной индукции между L_1 и L_2 .

Коэффициент индуктивной связи k определяется по формуле

$$k = M / \sqrt{L_1 L_2}.$$

В трансформаторе Тесла контуры настроены в резонанс:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Решение системы уравнений (1), (2) имеет вид

$$U_1 = U_{10} \cos(\Omega_b t) \cos(\Omega_r t); \quad (3)$$

$$U_2 = U_{10} \sqrt{C_1 / C_2} \sin(\Omega_b t) \sin(\Omega_r t), \quad (4)$$

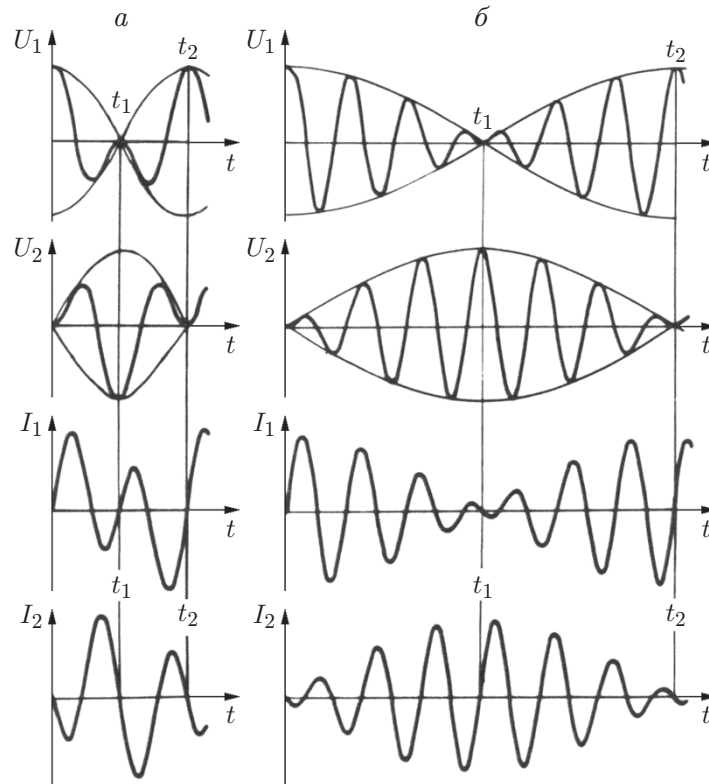


Рис. 2. Формы колебаний с биениями в контурах при $n = 3$, $k = 0,6$ (а) и $n = 13$, $k = 0,153$ (б)

где частоты биений и свободных колебаний определяются по формулам

$$\Omega_b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad \Omega_{fr} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (5)$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Из (3), (4) следует, что амплитуда U_2 может быть больше U_{10} в $\sqrt{C_1/C_2} = \sqrt{L_2/L_1}$ раз. Собственно, это соотношение и задает основные характеристики трансформатора Тесла — устройства для получения больших значений высокочастотных напряжений на выходе.

Согласно (5) в связанных контурах в режиме свободных колебаний происходят колебания напряжений с частотой Ω_{fr} , амплитуда которых меняется по гармоническому закону с частотой Ω_b , при этом возникают биения (рис. 2). Один цикл биений длительностью t_2 составляет половину периода огибающей. Количество колебаний n в течение одного периода биений зависит от отношения Ω_{fr}/Ω_b и определяется величиной коэффициента связи k :

$$n = \frac{\Omega_{fr}}{\Omega_b} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k}}. \quad (6)$$

При уменьшении k количество колебаний и время, за которое достигается максимальное напряжение при заданном значении ω_0 , увеличиваются. Ряд значений k_{opt} , при которых возможна полная передача энергии, находится из условия равенства отношения частот колебаний и биений целому нечетному числу:

$$k_{opt} = \frac{2n}{n^2 + 1}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (7)$$

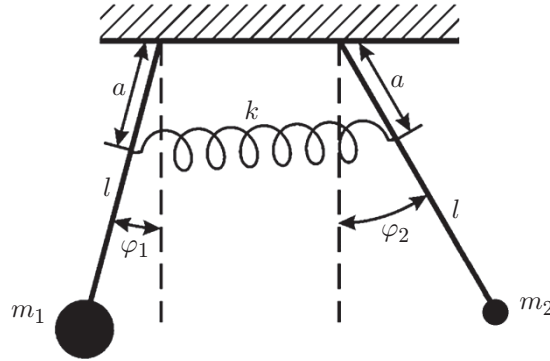


Рис. 3. Схема колебаний связанных маятников одинаковой длины и различной массы

Коэффициенты связи $k = 1,000; 0,600; 0,385; 0,280; 0,220; \dots$ считаются оптимальными [6, 7]. При соблюдении условий (6), (7) за половину цикла биений вся энергия из первичной емкости C_1 передается в емкость C_2 . В середине цикла биений в момент времени t_1 силы тока I_1, I_2 через все обмотки равны нулю (т. е. равна нулю энергия в магнитном поле). Также равно нулю напряжение U_1 на первичной емкости, т. е. вся энергия находится во вторичной емкости C_2 и напряжение U_2 является максимальным. Это одно из важнейших свойств трансформатора Тесла, используемых, например, при создании промышленных ускорителей элементарных частиц и систем зажигания двигателей внутреннего сгорания. Значение коэффициента связи $k = 1$ практически недостижимо, например, в случае высоковольтной изоляции обмоток. Поэтому полностью передать энергию можно только при $n = 3, 5, 7, \dots$ (в зависимости от величины коэффициента связи), что соответствует второй, третьей, четвертой и т. д. полуволнам колебаний. Эти условия задают набор наименьших интервалов времени, за которые в трансформаторе Тесла можно полностью передать энергию из первичного контура во вторичный.

Два связанных маятника различной массы, настроенные в резонанс. Механическая система двух маятников одинаковой длины l и различной массы m_1 и m_2 показана на рис. 3 (k — коэффициент жесткости пружины, a — расстояние от точки подвеса до точки присоединения пружины).

Зависимость величины углов отклонения φ_1 и φ_2 маятников от времени описывается уравнениями

$$\ddot{\varphi}_1 + n_1^2 \varphi_1 - \lambda_1 \varphi_2 = 0; \quad (8)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + n_2^2 \varphi_2 - \lambda_2 \varphi_1 = 0, \quad (9)$$

где

$$n_1^2 = \frac{m_1 g l + k a^2}{m_1 l^2} = \frac{g}{l} + \frac{k a^2}{m_1 l^2}, \quad n_2^2 = \frac{m_2 g l + k a^2}{m_2 l^2} = \frac{g}{l} + \frac{k a^2}{m_2 l^2},$$

$$\lambda_1 = \frac{k a^2}{m_1 l}, \quad \lambda_2 = \frac{k a^2}{m_2 l},$$

n_1, n_2 — парциальные частоты. Парциальной называется частота, с которой колеблется один из маятников при закреплении другого. При анализе колебаний величина

$$\rho = \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{n_1^2 n_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{[m_1 g l / (k a^2) + 1][m_2 g l / (k a^2) + 1]}}$$

часто называется параметром связи. При малых k , a его значение стремится к нулю, при больших — к единице.

Система уравнений (8), (9) приводится к виду (1), (2) простым преобразованием. Подставляя значение φ_2 из уравнения (9) в (8), находим

$$\ddot{\varphi}_1 + \left(n_1^2 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{n_2^2}\right) \varphi_1 + \frac{\lambda_1}{n_2^2} \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Полученные уравнения для углов φ и напряжений U (1), (2) одинаковы с точностью до констант.

Общее решение системы уравнений движения (8), (9) можно записать в виде [9]

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \\ \varphi_2 &= k_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + k_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2),\end{aligned}$$

где

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2}), \quad (10)$$

амплитуды A_1 , A_2 и фазы ψ_1 , ψ_2 колебаний — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Зададим начальные условия, аналогичные условиям для напряжений и сил тока в трансформаторе Тесла. Первый маятник отклонен, второй не отклонен, в начальный момент времени начальные скорости обоих маятников равны нулю. В начальный момент $t = 0$ первый маятник начинает двигаться:

$$t = 0, \quad \varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Решение системы уравнений (8), (9) можно представить в виде гармонических колебаний с медленно меняющимися амплитудами:

$$\varphi_1 = C_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \quad \varphi_2 = C_2 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right).$$

Происходит передача энергии колебаний от одного маятника к другому за время

$$\tau = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2).$$

Однако в случае четного числа полувольт передача происходит не полностью, в случае нечетного один из пиков колебаний возникает в середине цикла биений и происходит полная передача энергии (см. рис. 2). Условие, когда в один цикл биений укладывается нечетное число полувольт, можно записать следующим образом:

$$\frac{\Omega_{fr}}{\Omega_b} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = n, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (11)$$

После подстановки (10) в (11) получаем условие, при котором осуществляется полная передача энергии от одного маятника к другому в цикле биений, в виде

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\sqrt{1+K} + \sqrt{1-K}}{\sqrt{1+K} - \sqrt{1-K}} = n, \quad (12)$$

где

$$K = \sqrt{\frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{(n_1^2 + n_2^2)^2} + \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{(n_1^2 + n_2^2)^2}}.$$

Уравнение (12) аналогично уравнению (6), решение (7) которого найдено в [6, 7].

В случае маятников, соединенных пружиной, эквивалентом коэффициента связи k в трансформаторе Тесла является величина K :

$$K = \sqrt{\frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{(n_1^2 + n_2^2)^2} + \frac{4\lambda_1\lambda_2}{(n_1^2 + n_2^2)^2}}.$$

Подставляя в это выражение значения n_1 , n_2 , λ_1 , λ_2 , преобразуем его к виду

$$K = \frac{1}{2gm_*/(l_0ka_*^2) + 1}, \quad (13)$$

где m_* , a_* — приведенные масса и расстояние:

$$m_* = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_* = \frac{a}{l}.$$

В предельных случаях при коэффициенте жесткости пружины $k = 0$ (бесконечно мягкая пружина) коэффициент связи $K = 0$, при $k \rightarrow \infty$ $K = 1$. Такое поведение коэффициента K подобно поведению коэффициента связи k в трансформаторе Тесла.

Из (13) получаем

$$a_*^2 = \frac{K}{1 - K} \frac{m_*}{k} \frac{2g}{l}. \quad (14)$$

Согласно (7) целые нечетные значения $\Omega_{fr}/\Omega_b = (\omega_2 + \omega_1)/(\omega_2 - \omega_1)$ получаются при

$$K = \frac{2n}{n^2 + 1}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), находим окончательное решение для оптимальных расстояний a_* , при которых происходит полная передача энергии в середине цикла биений:

$$a_* = \sqrt{2 \frac{K}{1 - K} \frac{m_*}{k} \frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{4n}{(n - 1)^2} \frac{m_*}{k} \frac{g}{l}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, 2n_0 + 1. \quad (16)$$

С использованием (16) можно вычислить жесткость пружины k при фиксированном значении a_* :

$$k = \frac{4n}{(n - 1)^2} \frac{m_*}{a_*^2} \frac{g}{l}.$$

Заметим, что в решении (16) в явном виде содержатся частоты колебаний приведенной массы на пружине и маятника:

$$a_* = \sqrt{\frac{4n}{(n - 1)^2} \frac{m_*}{k} \frac{g}{l}} = \frac{2\sqrt{n}}{n - 1} \frac{\omega_p}{\omega_s}. \quad (17)$$

Здесь $\omega_s = \sqrt{k/m_*}$ — частота колебаний приведенной массы m_* , присоединенной через пружину с жесткостью k к массивной стенке; $\omega_p = \sqrt{g/l}$ — частота колебаний маятника.

Согласно (17) при значении $n = 1$, соответствующем недостижимому в реальности коэффициенту связи $k = 1$ в трансформаторе Тесла, значение a_* стремится к бесконечности, т. е. может быть достигнуто только при виртуальном увеличении длины зоны прикрепления пружины, бесконечно большем, чем длина маятников, что соответствует передаваемому от одного маятника к другому бесконечному моменту сил при любом значении жесткости пружины k . В этом случае энергия передается в первом полупериоде колебаний без биений. При $n \rightarrow \infty$ (слабая связь, бесконечное число периодов в цикле биений) $a_* \rightarrow 0$. Таким образом, решение, полученное в предельных случаях, соответствует очевидному

поведению системы маятников, соединенных пружиной. В случае более жесткой пружины (при большем значении k) или меньшей массы грузов пружину нужно переместить ближе к точке подвеса маятников.

Согласно выражению (17) для приведенной высоты a_* полная передача энергии для числа полупериодов в цикле биений $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ происходит при $2\sqrt{n}/(n-1) = 1,732; 1,118; 0,882; 0,750; \dots$, причем величина

$$\sqrt{\frac{m_*}{k} \frac{g}{l}} = \frac{\omega_{pdl}}{\omega_{spr}}$$

зависит только от параметров осцилляторов — отношения частот маятника длиной l и приведенной массы маятников m_* на пружине с жесткостью k .

Так же как и в случае трансформатора Тесла, наиболее быстрая полная передача энергии от массивного маятника к легкому происходит при значениях a_* , соответствующих значениям $n = 3, 5, \dots, 2n_0 + 1$, за две, три, четыре и т. д. полуволны колебаний в середине цикла биений.

Эксперимент. Установка, собранная на вертикальном листе из оргстекла, показана на рис. 4,а. В качестве опоры использована подставка, позволяющая задавать строго вертикальное положение листа. В экспериментальной установке использовались подвесы маятников на подшипниках высокого качества, взятых из привода головок магнитных дисководов. С помощью созданной установки можно моделировать процесс полной передачи энергии из первичного осциллятора во вторичный при нечетном числе полувольт в цикле биений, аналогичный процессу передачи энергии в трансформаторе Тесла.

Стержни маятников изготовлены из тонкостенных алюминиевых трубок длиной 50 см и массой 27 г, грузы маятников являются наборными и выполнены из медных пластин массой 105 г. К каждому маятнику в наборе можно подвесить 1–6 пластин. Пружина присоединяется к трубкам на любой высоте с помощью зажимов (рис. 4,б).

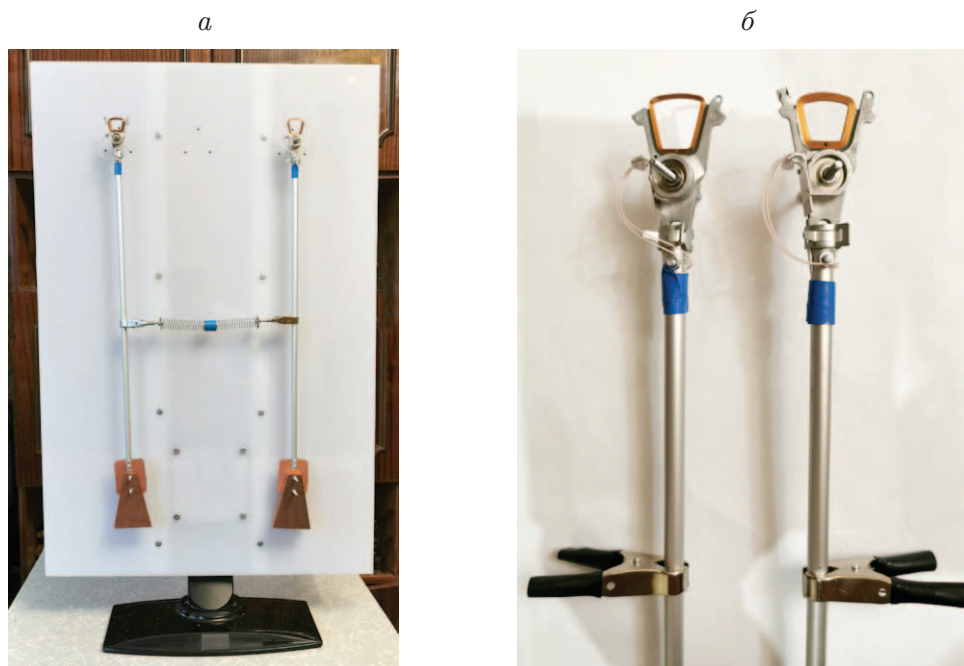


Рис. 4. Экспериментальная установка:

а — общий вид, б — подвеска стержней на подшипниках

Расчетные и экспериментальные значения расстояния a

n	a , м		Δa , м	$\Delta a/a$, %
	Эксперимент	Расчет		
3	0,303	0,313	0,010	3,3
5	0,195	0,202	0,007	3,6
7	0,154	0,159	0,005	3,2

Узлы подвеса магнитных головок дисководов содержат не только подшипники. К ним присоединены обмотки двигателей привода, которые можно использовать для индикации отклонения маятников, поместив вблизи обмоток магниты и подав сигналы с обмоток на осциллограф. Поскольку входное сопротивление осциллографа велико (10^6 Ом), напряжение составляет десятки милливольт, сила тока через катушки очень мала — порядка 10^{-8} А, и его протекание в катушках не влияет на движение маятников. Напряжения на катушках пропорциональны угловым скоростям маятников. Для получения угловых координат измеряемый сигнал напряжений необходимо интегрировать.

В таблице приведены расчетные и экспериментальные значения расстояния от точки подвеса до точки присоединения пружины в случае, когда масса грузов равна 210 и 630 г, коэффициент жесткости пружины $k = 24,5$ Н/м, длина маятника $l = 0,52$ м (Δa — абсолютная погрешность, $\Delta a/a$ — относительная погрешность).

Погрешность экспериментальных измерений в основном обусловлена нелинейностью пружины. При сжатии она не только сжимается, но и теряет устойчивость. Тем не менее полученные экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с результатами расчетов.

Заключение. При теоретическом и экспериментальном исследовании условий достижения максимального значения коэффициента передачи энергии в системе связанных и настроенных в резонанс маятников одинаковой длины, но различной массы, аналогичной трансформатору Тесла, получены следующие результаты.

Теоретически определены и экспериментально проверены оптимальные условия, при которых энергия может полностью передаваться от массивного маятника к легкому в одном цикле биений (в отсутствие трения).

Найдены оптимальные высоты крепления пружины, при которых энергия полностью передается от массивного маятника к легкому в середине первого цикла биений за кратчайшее время.

Показано, что полная передача энергии возможна только для нечетного числа полупериодов в цикле биений при значениях коэффициента $2\sqrt{n}/(n-1) = 1,732; 1,118; 0,882; 0,750; \dots$ в выражении для приведенной высоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pat. 454622 US.** System of electric lighting / N. Tesla. Publ. 23.06.1891.
2. **Pat. 568176 US.** Apparatus for producing electrical current of high frequency and potential / N. Tesla. Publ. 22.09.1896.
3. **Oberbeck A.** Ueber den Verlauf der electrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen // Ann. Phys. Chem. 1895. Bd 55. S. 623–632.
4. **Drude P.** Uber induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden und Dämpfungsmessung, Tesla transformatoren und drahtlose Telegraphie // Ann. Phys. 1904. Bd 13. S. 512–561.
5. **Heise W.** Tesla-Transformatoren // Elektrotech. Z. 1964. Bd A-1, N 7. S. 1–8.

6. **Абрамян Е. А.** Сильноточные ускорители-трансформаторы. Новосибирск, 1970. (Препр. / Ин-т ядерной физики СО АН СССР; № 17-70).
7. **Вассерман С. Б.** Трансформатор Тесла в высоковольтных ускорителях заряженных частиц. Новосибирск, 1979. (Препр. / Ин-т ядерной физики СО АН СССР; № 77-110).
8. **Мандельштам Л. И.** Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
9. **Короченцев В. В.** Изучение колебаний связанных маятников / В. В. Короченцев, В. С. Печников, В. В. Зауткин. Владивосток: Дальневост. федер. ун-т, 2013.
10. **Балякин А. А.** Колебания в системах с несколькими степенями свободы. Колебания распределенных систем / А. А. Балякин, Н. М. Рыскин. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 2008.

*Поступила в редакцию 26/X 2021 г.,
после доработки — 26/X 2021 г.
Принята к публикации 29/XI 2021 г.*
