УДК 621.391.26 : 519.2

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХ

В. М. Артюшенко[1], В. И. Воловач[2]

[1] *Технологический университет,*
141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42
[2] *Поволжский государственный университет сервиса,*
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4
E-mail: artuschenko@mail.ru
volovach.vi@mail.ru

Рассмотрены вопросы, связанные с идентификацией параметров и формы плотности распределения вероятности воздействующих на полезный сигнал аддитивных и мультипликативных в общем случае негауссовских помех. Представлены результаты численного моделирования методов оценки информационных параметров случайных процессов с негауссовской плотностью распределения вероятности по конечной выборке.

Ключевые слова: параметры распределения, негауссовский характер плотности вероятности распределения, аддитивная помеха, мультипликативная помеха.

DOI: 10.15372/AUT20170305

Введение. В большинстве случаев алгоритмы демодуляции (фильтрации) информационных процессов полезного сигнала получены в предположении точно известных видов и параметров плотности распределения вероятности (ПРВ) воздействующих аддитивных n или мультипликативных η помех [1, 2]. На практике часто возникает ситуация, когда априорные сведения о ПРВ помех и их параметрах известны либо частично, либо вообще отсутствуют [3]. Обычно сведения о ПРВ воздействующих помех имеют общий характер, например известен лишь класс $A_i\{W_{\text{п}}(\text{п})\}$ $(\text{п} = n, \eta)$, к которому принадлежит распределение. Кроме этого в процессе работы радиотехнических систем могут изменяться не только характеристики информационных процессов, но и возмущающих воздействий, что приводит к неудовлетворительным результатам при реализации синтезируемых алгоритмов.

Целью данной работы является идентификация параметров распределения воздействующих на обрабатываемый сигнал негауссовских помех в условиях априорной неопределённости.

В настоящее время при осуществлении синтеза демодуляторов (измерителей) в условиях априорной неопределённости наиболее часто используют два подхода: адаптивный (самонастраивающийся) [4] и робастный (стабильный, устойчивый) [5]. При первом подходе для оценки неизвестных стохастических параметров помехи в процессе функционирования демодулятора применяются соответствующие итерационные методы. При втором подходе значения задаются не конкретной плотностью распределения вероятности $W_{\text{п}}(\text{п})$, а множеством возможных ПРВ $\{W_{\text{п}}(\text{п})\}_i$. В данном случае вместо определённой характеристики точности синтезируемого демодулятора (при соответствующей ПРВ) используется гарантированная характеристика, обусловленная некоторой наихудшей ПРВ $W^*_{\text{п}}(\text{п}) \in A_i = \{W_{\text{п}}(\text{п})\}$. При этом одним из критериев оптимальности может служить критерий минимума гарантированной на множестве A_i апостериорной дисперсии σ_ε^2 оцениваемого параметра.

Отметим, что общего способа решения задач при произвольном задании множества A_i не существует. Разработаны лишь частные случаи эффективных численных алгоритмов, базирующихся на огрублённом методе максимального правдоподобия [3].

Идентификация формы распределения негауссовских помех. Важнейшим вопросом при проведении синтеза демодуляторов в условиях априорной неопределённости является идентификация формы распределения воздействующих помех. Известны различные способы идентификации распределения случайных процессов. В частности, в качестве признаков, характеризующих форму ПРВ, были предложены коэффициенты асимметрии ($K_\text{а}$) и эксцесса ($K_\text{э}$) [6]. Однако если плотность распределения вероятности помехи имеет симметричный характер, то $K_\text{а} = 0$ и единственным информационным признаком остаётся $K_\text{э}$. В этом случае конструктивным является использование энтропийного коэффициента ПРВ $K_\text{н} = \sigma^{-1}\Delta_\text{н} = (2\sigma)^{-1}\exp\{H(n)\}$, в котором σ — среднеквадратическое отклонение (СКО); $\Delta_\text{н}$ — энтропийное значение погрешности; $H(n) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_\text{п}(\text{п})\ln W_\text{п}(\text{п})d\text{п}$ — энтропия ПРВ.

Заметим, что для любых законов распределения величина $K_\text{н}$ лежит в пределах 0–2,066, причём максимальное значение $K_\text{н} = 2{,}066$ имеет гауссовское распределение.

В качестве второго признака, характеризующего форму ПРВ, удобнее брать не коэффициент эксцесса $K_\text{э}$, изменяющийся от 1 до ∞, а контрэксцесс $K_\text{к} = K_\text{э}^{-0{,}5}$, значение которого может меняться в пределах от 0 до 1.

При использовании введённых признаков любая симметричная плотность распределения вероятности может быть изображена в системе координат $(K_\text{н}, K_\text{к})$ точкой. Предлагаемое представление аналитических моделей симметричных ПРВ в виде точек на плоскости признаков $(K_\text{н}, K_\text{к})$ позволяет достаточно точно и надёжно охарактеризовать близость точек, соответствующих экстремальным ПРВ, к той или иной модели.

Следует отметить, что параметры $K_\text{н}$ и $K_\text{к}$ заданного аналитического распределения находятся однозначно. Обратный переход уже неоднозначен, так как через топографическую точку с заданными координатами $(K_\text{н}, K_\text{к})$ может проходить целый пучок кривых, соответствующих ПРВ различных классов, что является основным недостатком предлагаемой систематизации и классификации ПРВ по их форме.

В случае односторонних плотностей распределения вероятностей, характерных, например, для распределений огибающих узкополосных случайных процессов (мультипликативных помех η), к указанным величинам необходимо добавить коэффициент асимметрии. В этом случае оцениваемому распределению $W(\eta)$ ставится в соответствие точка (или область в случае многопараметрических ПРВ) не на плоскости $(K_\text{н}, K_\text{к})$, а в пространстве $(K_\text{а}, K_\text{н}, K_\text{к})$.

Для получения текущих оценок числовых характеристик случайных процессов широкое применение нашли рекуррентные процедуры, требующие существенно меньшего объёма памяти компьютера, чем для нерекуррентных (апостериорных) алгоритмов.

Рекуррентные оценки начальных моментов i-го порядка m_i при наблюдении отсчётов y_h, $h = \overline{1, H}$, имеют вид

$$\hat{m}_h^{(i)} = \hat{m}_{h-1}^{(i)} + h^{-1}(y_h - \hat{m}_{h-1}^{(i)}), \quad m_0 = 0, \;\; h = \overline{1, H}. \tag{1}$$

Если известно математическое ожидание случайного процесса m_y, то оценка дисперсии (второго центрального момента M_2) будет определяться формулой

$$\hat{M}_{2h} = \hat{M}_{2h-1} + h^{-1}((y_h - m_y)^2 - \hat{M}_{2h-1}). \tag{2}$$

В этом случае третий и четвёртый центральные моменты находятся из выражений

$$\begin{aligned}\hat{M}_{3h} &= \hat{M}_{3h-1} + h^{-1}((y_h - m_y)^3 - \hat{M}_{3h-1});\\ \hat{M}_{4h} &= \hat{M}_{4h-1} + h^{-1}((y_h - m_y)^4 - \hat{M}_{4h-1}).\end{aligned} \tag{3}$$

Воспользовавшись (1)–(3), получим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов асимметрии и эксцесса соответственно:

$$K_{\text{а}h} = \hat{M}_{3h}\hat{M}_{2h}^{-1,5}; \quad K_{\text{э}h} = \hat{M}_{4h}\hat{M}_{2h}^{-2}. \tag{4}$$

При реализации данных алгоритмов, когда максимальное число измерений H заранее не определено и не оговорено внешними условиями, необходимо сформулировать критерий остановки процедуры оценивания и окончания процедуры вычисления этих параметров.

В частности, для окончания процедуры вычисления в соответствии с алгоритмами (1)–(4) можно на каждом шаге оценивать число измерений H, требуемое для обеспечения точности, и сравнивать с числом проведённых измерений. Как правило, в качестве критерия используется неравенство $|\hat{\lambda}_h - \hat{\lambda}_{h-1}| \leq \delta$, в котором $\hat{\lambda}_h$ — оценка измеряемого параметра λ на шаге h, δ — допустимая погрешность измерения.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования статистических характеристик случайного процесса y_h с бимодальной ПРВ мгновенных значений в зависимости от шага итерации h, где $m_H = h^{-1}\Big(\sum\limits_{h=1}^{H} y_h\Big)$. Сплошные кривые на рисунке вычислены по формулам (4), а пунктирные получены в соответствии с нерекуррентными формулами по конечной выборке.

Как видно из графиков на рис. 1, *c*, *d*, с увеличением числа выборок сплошные и пунктирные кривые сближаются. Это указывает на идентичность процедур оценивания по рекуррентным и нерекуррентным алгоритмам.

Заметим, что по гистограмме ПРВ мгновенных значений может быть вычислен энтропийный коэффициент $K_{\text{н}} = (2\sigma)^{-1}(bN)10^{-\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{m} n_i \ln n_i}$. Здесь b — ширина столбца гистограммы, N — объём выборки, m — число столбцов гистограммы, n_i — число наблюдений в i-м столбце.

Приведём формулы, позволяющие оценить рассеяние оценок СКО, контрэксцесса и энтропийного коэффициента в зависимости от объёма выборки и эксцесса распределения.

Выборочная дисперсия и СКО при $N > 20$ с погрешностью 10 % могут быть определены как $D(D^*) = N^{-1}(M_4 - \sigma^4)$, $\sigma(\sigma^*) = (2\sigma N)^{-1}(M_4 - \sigma^4)^{0,5}$, здесь σ^2 и M_4 — второй и четвёртый центральные моменты генеральной совокупности.

Относительная среднеквадратическая погрешность оценки СКО зависит от объёма выборки и эксцесса ПРВ $\delta(\sigma^*) = \sigma^{-1}(\sigma(\sigma^*)) = (2N^{0,5})^{-1}(\varepsilon - 1)^{0,5}$, в котором $\varepsilon = \lambda_h - \hat{\lambda}_h$. Рассеяние оценки контрэксцесса для любых ПРВ с погрешностью не более 8–10 % определяется как $\delta(K_{\text{к}}) = K_{\text{к}}^{-1}(\sigma(K_{\text{к}}))^{-1} = ((29N)^{0,5})^{-1}(\varepsilon^2 - 1)^{3/4}$.

Рассеяние оценок энтропийного коэффициента $K_{\text{н}}$ и энтропийного значения погрешности $\Delta_{\text{н}}$ может быть найдено из соотношений

$$\sigma(K_{\text{н}}) = 0{,}9(K_{\text{н}}K_{\text{н}}(K_{\text{н}}N)^{0,5})^{-1},$$

$$\delta(K_{\text{н}}) = \frac{\sigma(K_{\text{н}})}{K_{\text{н}}} = \frac{0{,}9}{K_{\text{н}}K_{\text{н}}^2(K_{\text{н}}N)^{0,5}}, \quad \delta(\Delta_{\text{н}}) = \frac{\sigma(\Delta_{\text{н}})}{\Delta_{\text{н}}} \approx \Big[\frac{9{,}15\cdot 10^{-4}}{(1-K_{\text{н}})^3} + 5{,}1(1-K_{\text{н}})^3\Big]^{0,5}.$$

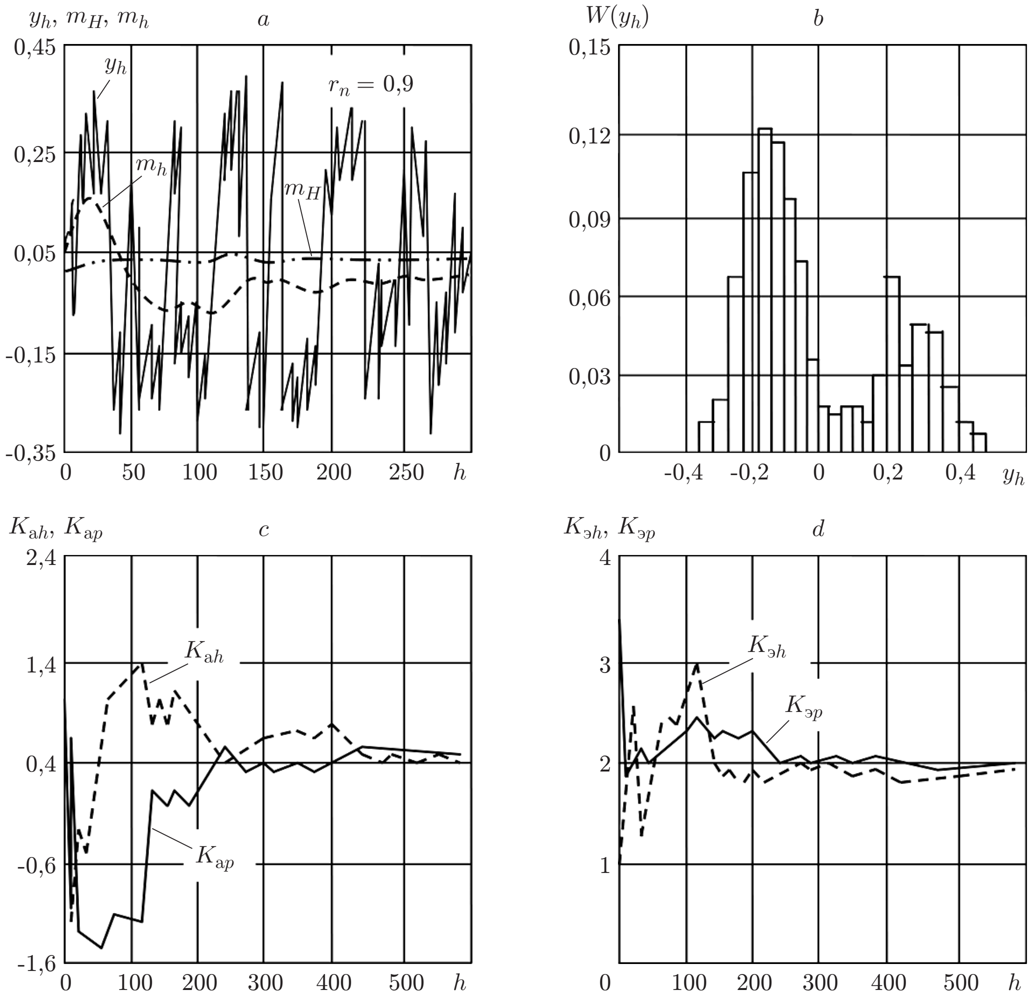

Рис. 1. Результаты численного моделирования статистических характеристик случайного процесса с бимодальной ПРВ: a — математическое ожидание и дисперсия фрагмента обрабатываемого процесса; b — гистограмма ПРВ мгновенных значений обрабатываемого процесса; c — зависимость коэффициента асимметрии от шага итерации; d — зависимость коэффициента эксцесса от шага итерации

Учитывая выражение для $H(n)$, представим значение энтропии $I_{\text{Ш}}$ (информация по Шеннону, шенноновская энтропия) истинной ПРВ в виде

$$I_{\text{Ш}} = I_{\text{р}} - \Delta I, \tag{5}$$

где $I_{\text{р}}$ — энтропия равномерного распределения; ΔI — отклонение истинной энтропии случайного процесса с ПРВ $W(n)$ от энтропии равномерного распределения.

В [6] показано, что энтропия равномерного распределения $I_{\text{р}}$ зависит лишь от диапазона измерения (шкалы) случайного процесса, причём интервал неопределённости в этом случае лежит в пределах от $n_{\min}$ до $n_{\max}$, а количество информации по Шеннону есть логарифмическая мера длины этого интервала:

$$I_{\text{Ш}} = -\int\limits_{n_{\min}}^{n_{\max}} n_{\text{Ш}}^{-1} \log(n_{\text{Ш}})^{-1} dn = \log n_{\text{Ш}}, \quad n_{\text{Ш}} = n_{\max} - n_{\min}.$$

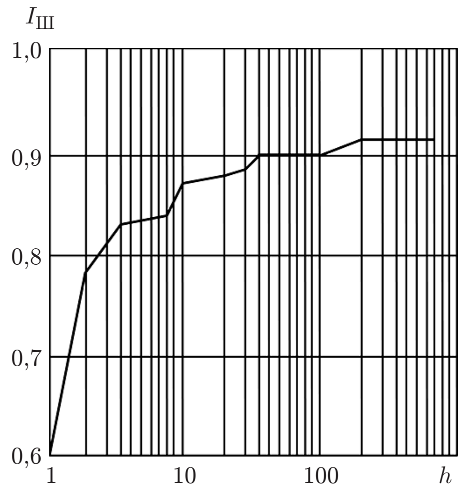

Рис. 2. Функциональная зависимость $I_{\text{Ш}}$ от h

Заметим, что энтропия для любой ПРВ не зависит от математического ожидания, т. е. не меняется при переносе начала отсчёта координаты случайной величины.

В реальном масштабе времени оценка энтропии случайных процессов с равномерным распределением может быть вычислена либо через выборочное среднее $\hat{m}_h$ и выборочную дисперсию $\hat{M}_2$, либо с помощью порядковых статистик $\{y_h\}$.

В первом случае

$$\hat{n}_{\min} = \hat{m}_h - \sqrt{3}\hat{M}_{2h}; \qquad \hat{n}_{\max} = \hat{m}_h + \sqrt{3}\hat{M}_{2h}. \tag{6}$$

Во втором случае

$$\hat{n}_{\min} = y'_1 - (h-1)^{-1}(y'_h - y'_1); \qquad \hat{n}_{\max} = y'_1 + (h-1)^{-1}(y'_h - y'_1). \tag{7}$$

Здесь $\{y'_h\}$, $h = \overline{1, H}$, — вариационный ряд, элементы которого $y_h - y'_{h-1}$ используются для получения порядковых статистик или для группировки (систематизации) экспериментальных данных.

Если в (5) положить, что $I_{\text{р}} \gg \Delta I$, то алгоритмы (6) или (7) могут применяться для оценки энтропии негауссовских процессов.

На рис. 2 представлены численные результаты энтропии в зависимости от выборки для случайного процесса с бимодальной ПРВ. Из рисунка видно, что для оценки энтропии требуется достаточно большой объём выборки ($H > 100$).

Идентификация параметров распределения на примере мультипликативной негауссовской помехи. В качестве примера найдём основные характеристики для ПРВ огибающей узкополосного сигнала (мультипликативной помехи), описываемой распределением Накагами:

$$W(\eta) = (2/\Gamma(m))(m/\Omega)^m \eta^{2m-1} \exp\{m\eta^2/\Omega\}, \quad \eta \geq 0, \;\; m = \Omega^2/\langle(\eta^2 - \Omega^2)^2\rangle \geq 0{,}5,$$

где $\Omega = \langle \eta^2 \rangle$ — параметры распределения, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. С учётом выражения для начальных υ моментов ПРВ Накагами $m_\eta^\upsilon = \Gamma(m + \upsilon/2)/(\Gamma(m)(\Omega/m)^{-\upsilon/2})$ запишем соотношения для определения центральных моментов:

$$M_2 = \Omega^2\Big[1 - \frac{\Gamma^2(m+0{,}5)}{m\Gamma^2(m)}\Big], \qquad M_3 = \frac{\Omega^3}{m^{1,5}}\Big[\frac{(0{,}5-2m)\Gamma(m+0{,}5)}{\Gamma(m)} + \frac{2\Gamma^3(m+0{,}5)}{\Gamma^3(m)}\Big],$$

$$M_4 = \frac{\Omega^4}{m}\left[m+1+\frac{(2m-2)\Gamma^2(m+0{,}5)}{m\Gamma^2(m)} - \frac{3\Gamma^4(m+0{,}5)}{m\Gamma^4(m)}\right].$$

В этом случае коэффициенты асимметрии и эксцесса находятся в виде

$$K_{\text{а}} = \frac{M_3}{M_2^{1,5}} = \frac{(0{,}5-2m)\Gamma^2(m)\Gamma(m+0{,}5)+2\Gamma^3(m+0{,}5)}{[m\Gamma^2(m)-\Gamma^2(m+0{,}5)]^{1,5}},$$

$$K_{\text{э}} = \frac{M_4}{M_2^2} = \frac{m(m+1)\Gamma^4(m)+2(m-1)\Gamma^2(m+0{,}5)\Gamma^2(m)-3\Gamma^4(m+0{,}5)}{[m\Gamma^2(m)-\Gamma^2(m+0{,}5)]^2}.$$

Энтропия и энтропийный коэффициент мультипликативной помехи будут определяться исходя из соотношений

$$H\{\eta\} = \ln\left\{\frac{\Gamma(m)\Omega\exp(m)}{2m^{0,5}}\right\} - \frac{2m-1}{2}\,\Psi(m), \quad K_{\text{н}} = \frac{\Gamma^2(m)\mathrm{e}^m\cdot\exp\{-(m-0{,}5)\Psi(m)\}}{4\{m\Gamma^2(m)-\Gamma^2(m+0{,}5)\}^{0,5}},$$

где

$$\Psi(m) = \frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)}, \qquad \Gamma'(m) = \int\limits_0^\infty t^{m-1}\exp\{-t\}\ln t dt.$$

Зависимости коэффициентов асимметрии, эксцесса, контрэксцесса, энтропии и энтропийного коэффициента от параметра m приведены на рис. 3. Из представленных зависимостей видно, что с ростом параметра m значения величин $K_{\text{а}}$, $H\{\eta\}$ уменьшаются, а величины коэффициентов $K_{\text{э}}$, $K_{\text{н}}$ и $K_{\text{к}}$ остаются практически неизменными.

Рассмотрим методы оценки информационных параметров ПРВ мультипликативной помехи, описываемой распределением Накагами.

При аппроксимации законов распределения огибающих узкополосных полезных сигналов с помощью ПРВ Накагами необходимо определить параметры распределения m и Ω по статистическим данным. Оценка параметра Ω, характеризующего среднюю мощность воздействующей мультипликативной помехи, при известном m не представляет сложности. Гораздо труднее подобрать параметр m, задающий вид закона распределения [7].

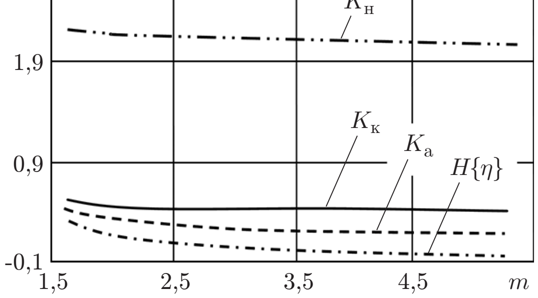

Рис. 3. Зависимости коэффициентов $K_{\text{а}}$, $K_{\text{э}}$, $K_{\text{н}}$, $K_{\text{к}}$, $H\{\eta\}$ от величины параметра ПРВ m

Воспользовавшись результатами, полученными в [8], можно показать, что оценка параметра Ω является эффективной и находится из формулы

$$\hat{\Omega} = H^{-1} \sum_{h=1}^{H} \eta_h^2.$$

Математическое ожидание и дисперсия оценки параметра Ω могут быть определены из выражений

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = H^{-1} \sum_{h=1}^{H} \langle \eta_i^2 \rangle = \Omega, \qquad \sigma_{\hat{\Omega}}^2 = \frac{\Omega^2}{mH}.$$

Заметим, что оценки Ω по методу моментов и методу максимального правдоподобия совпадают. По методу моментов оценка

$$\hat{m} = \hat{\Omega}^2 \Big[H^{-1} \sum_{h=1}^{H} \eta_h^4 - \hat{\Omega}^2 \Big].$$

Аналитически исследовать дисперсию оценки $\hat{m}$ достаточно сложно, поэтому, как правило, используется метод статистического моделирования. Для практических расчётов целесообразно взять следующие выражения:

$$\hat{m} = 0{,}504 \Big[\ln H^{-1} \sum_{h=1}^{H} \eta_h^2 + 2H^{-1} \sum_{h=1}^{H} \eta_h \Big]^{-1} + 0{,}126, \quad \sigma_{\hat{m}}^2 = H^{-0{,}5}(1{,}6m - 0{,}36).$$

Линейная погрешность аппроксимации при этом не превышает одного процента.

Зависимости среднеквадратического отклонения $\hat{m}$ и относительного смещения $\Delta m/m$ от размеров выборки представлены на рис. 4. Из графиков видно, что оценка $\hat{m}$ обусловлена не только объёмом выборки, но и параметром Ω. С ростом величины Ω смещение уменьшается. Оценка параметра $\hat{m}$ эффективна лишь при больших объёмах выборки ($H \geq 100$).

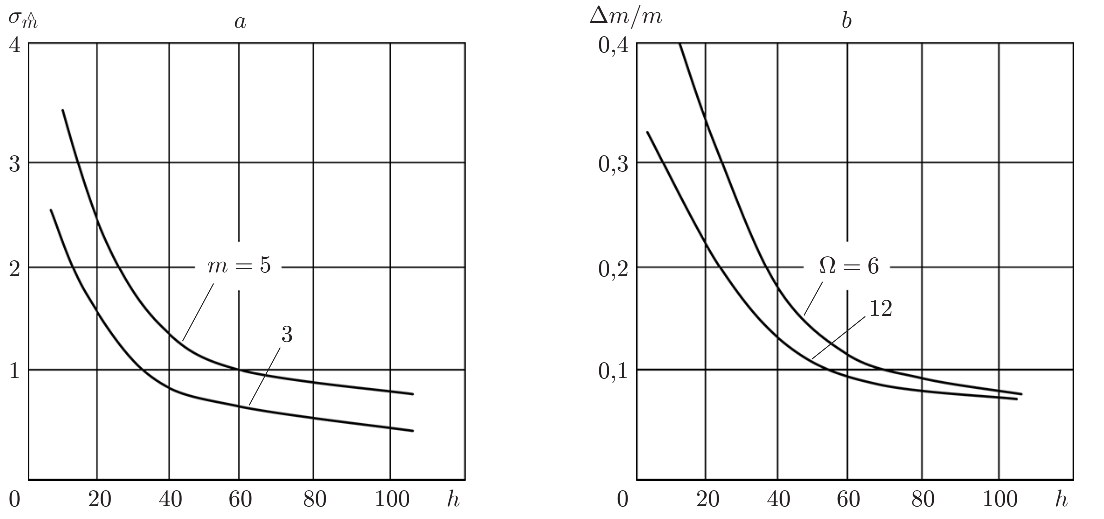

Рис. 4. Зависимости от параметра выборки h: a — среднеквадратического отклонения $\sigma_{\hat{m}}$, b — относительного смещения $\Delta m/m$

Заключение. В данной работе рассмотрены вопросы идентификации параметров негауссовских помех в условиях априорной неопределённости. Показано, что для текущей идентификации параметров формы ПРВ аддитивных негауссовских помех, имеющих симметричное распределение, могут использоваться величины контрэксцесса $K_{\text{к}}$ и энтропийного коэффициента $K_{\text{н}}$. Для текущей идентификации негауссовских помех с односторонней ПРВ (мультипликативных помех) к указанным величинам необходимо добавить величину коэффициента асимметрии K_{a}. Результаты численного моделирования методов оценки информационных параметров случайных процессов с негауссовской ПРВ по конечной выборке показывают, что с увеличением числа выборок оценки, полученные рекуррентными методами, сближаются с асимптотическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов В. И., Харисов В. Н.** Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
2. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Измерение информационных параметров сигнала в условиях воздействия аддитивных негауссовских коррелированных помех // Автометрия. 2016. **52**, № 6. С. 22–28.
3. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Квазиоптимальная обработка сигналов на фоне аддитивной и мультипликативной негауссовских помех // Радиотехника. 2016. № 1. С. 124–130.
4. **Васильев К. К.** Прием сигналов при мультипликативных помехах. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1983. 128 с.
5. **Цыпкин Я. З.** Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984. 320 с.
6. **Новицкий П. В., Зограф И. А.** Оценка погрешностей результатов измерений. М.: Энергоатомиздат, 1991. 304 с.
7. **Артюшенко В. М., Воловач В. И., Иванов В. В.** Статистические характеристики сигналов и помех в радиотехнических устройствах ближнего действия // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. **57**, № 7. С. 46–50.
8. **Гусинский Г. В.** Оценка параметров m-распределения // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1977. **22**, № 1. С. 129–133.

Поступила в редакцию 28 декабря 2016 г.