

УДК 532.528

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ НАНОЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА

М. Фердоуз, М. А. А. Хамад*

Университет г. Дакка, Дакка, Бангладеш

* Университет г. Асьют, 71516 Асьют, Египет

E-mail: ferdows@du.ac.bd

С использованием пакета Wolfram Mathematica численно исследовано стационарное течение в пограничном слое со смешанной конвекцией электропроводящей наножидкости ($\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$), удовлетворяющей степенному закону, на растягивающейся вертикальной нагретой пластине при наличии переменного магнитного поля. Предполагается, что скорость растяжения поверхности и ее температура линейно зависят от расстояния до начала координат. Получено автомодельное решение, зависящее от объемной доли наночастиц, показателя в степенном законе, параметра магнитного поля, конвективного параметра плавучести и модифицированного числа Прандтля.

Ключевые слова: наножидкость, перенос тепла, магнитогидродинамика, растягивающаяся пластина, жидкость, удовлетворяющая степенному закону, автомодельное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20160404

Введение. Наножидкость представляет собой коллоидный раствор, содержащий наноразмерные твердые частицы, и имеет аномально большую теплопроводность по сравнению с базовыми жидкостями. Теплопроводность наножидкостей зависит от физико-химических свойств базовой жидкости и наночастиц, концентрации частиц, температуры жидкости и размера частиц. Вязкость и удельная теплоемкость наножидкостей и базовых жидкостей существенно различаются, поэтому неоднократно предпринимались попытки увеличить теплопроводность жидкостей путем создания суспензий с частицами, имеющими микро- и наноразмеры. В работе [1] исследован процесс теплообмена, возникающий при естественной конвекции в ламинарном пограничном слое ньютоновской наножидкости. В [2] разработана модель наножидкостей с эффективной теплопроводностью. Согласно этой модели зависимость теплопроводности от концентрации наночастиц является нелинейной. В работе [3] изучена вязкость наножидкостей. В [4] с использованием модели броуновской динамики, объединенной с моделью Грина — Кубо, исследована теплопроводность наножидкостей. В последнее время появились работы, посвященные численному моделированию теплообмена, возникающего при естественной конвекции в наножидкостях (см., например, [5–9]). В этих работах использовались метод конечных разностей и метод

конечных объемов, для реализации которых требуются значительные вычислительные ресурсы. Обзор работ, посвященных исследованию наножидкостей, приведен в [10–14].

Ряд жидкостей, используемых в промышленности (жидкие пластмассы, полимеры, целлюлозные массы и т. д.), являются неньютоновскими. Известно, что многие неупругие неньютоновские жидкости, применяемые в химических технологических процессах, описываются эмпирической моделью Освальда — де Ваале, или так называемой степенной моделью, в которой напряжение сдвига представляет собой степенную функцию скорости деформации. В работе [15] интегральный метод, предложенный в [16] для исследования течения на изотермической плоской пластине, обобщен на случай псевдопластической жидкости, обтекающей осесимметричное тело. В [17] предложен интегральный метод решения задачи теплопроводности в удовлетворяющих степенному закону неньютоновских жидкостях, обтекающих тела произвольной формы. Задача о течении несжимаемой неньютоновской степенной жидкости на плоской пластине при наличии магнитного поля и градиента давления, а также в случае наличия или отсутствия вдува и отсоса исследована в работе [18]. В [19] определены характеристики теплообмена в неньютоновской жидкости, находящейся на поверхности, растягивающейся по степенному закону, с учетом изменяющейся температуры поверхности при наличии вдува и отсоса. В [20] обобщены результаты работы [21] для неньютоновской, удовлетворяющей степенному закону жидкости, находящейся на линейно растягивающейся пластине. В работе [22] проведены аналогичные исследования с учетом теплообмена. Течение и теплообмен в удовлетворяющей степенному закону жидкости, находящейся на непрерывно движущейся пластине, изучены в [23]. Уравнения пограничного слоя типа слоя Фолкнера — Скана для жидкостей, удовлетворяющих степенному закону, получены в работе [24]. В [25] изучено стационарное магнитогидродинамическое течение электропроводящей жидкости, удовлетворяющей степенному закону, на вертикальной растягивающейся пластине. Задача рассматривалась в предположении, что скорость поверхности и ее температура изменяются по линейному закону в зависимости от расстояния от начала координат.

В последнее время проведен ряд исследований влияния магнитного поля на течение наножидкости и теплообмен в ней. В работе [26] получено автомодельное решение задачи о течении в ламинарном свободно-конвективном пограничном слое жидкости при наличии поперечного магнитного поля над перевернутым конусом, на поверхности которого задавались смешанные граничные условия для потока тепла. В [26] также определена скорость пограничного слоя и построены профили температуры при различных значениях параметра магнитного поля и числа Прандтля. В [27] исследованы течение и теплообмен в пограничном слое несжимаемой электропроводящей вязкоупругой жидкости на линейно растягивающейся пластине с учетом наличия поперечных магнитных и электрических полей. В [28] описана модель стационарного неавтомодельного ламинарного течения в пограничном слое жидкого металла на движущейся непроводящей пластине при наличии магнитного поля, направленного вдоль нее. В работе [29] с использованием метода гомотопического анализа изучены нестационарное магнитогидродинамическое течение и теплообмен в ньютоновской жидкости на растянутой импульсами в двух поперечных направлениях плоской поверхности. В [30] исследовано влияние мгновенно возникающего и снимаемого магнитного поля на течение вязкой жидкости на растягивающейся пластине. Течение и теплообмен в пограничном слое несжимаемой электропроводящей вязкоупругой жидкости на растягивающейся пластине изучено в работе [31]. Течение наножидкости через пористую поверхность при наличии теплообмена и магнитного поля исследовано в [32, 33]. Жидкость, удовлетворяющая степенному закону, изучалась также в [34].

В данной работе исследуется влияние различных параметров (объемной доли наночастиц и параметра магнитного поля) на стационарное двумерное течение и теплообмен

в несжимаемой вязкой неньютоновской, удовлетворяющей степенному закону наножидкости, обтекающей вертикальную поверхность, при наличии магнитного поля.

1. Формулировка задачи. Рассматривается стационарное двумерное течение вязкой несжимаемой электропроводящей наножидкости, удовлетворяющей степенному закону, на растягивающейся пластине при наличии магнитного поля. Две равные и противоположно направленные силы действуют на пластину таким образом, что она растягивается по линейному закону, при этом положение начала координат не меняется. Ось x направлена вдоль растягивающейся пластины, ось y — перпендикулярно ей. Поперечное магнитное поле B_0 является однородным. Предполагается, что скорость $u_w(x)$ и температура $T_w(x)$ на непрерывно растягивающейся поверхности — линейные функции x (x — расстояние от начала координат) [25]. Температура жидкости на бесконечности имеет постоянное значение T_∞ . Считается, что базовая жидкость и взвешенные наночастицы находятся в состоянии теплового равновесия и между ними отсутствует проскальзывание. Теплофизические характеристики наножидкости указаны в работе [30]. С учетом введенных предположений уравнения пограничного слоя, определяющие течение и температуру при наличии притока (оттока) тепла (с использованием приближения пограничного слоя и в пренебрежении вязкой диссипацией), записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_{nf}} \left[-\mu_{nf} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n - \sigma B_0^2 u \pm g(\rho\beta)_{nf}(T - T_\infty) \right], \\ u \frac{T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях x и y соответственно; T — локальная температура жидкости; n — показатель степени; β — параметр притока (оттока) тепла; σ — электропроводность; g — ускорение свободного падения; ρ_{nf} — эффективная плотность; μ_{nf} — эффективная динамическая вязкость; $(\rho\beta)_{nf}$ — коэффициент теплового расширения; α_{nf} — эффективный коэффициент тепловой диффузии. Эффективные плотность и динамическая вязкость, коэффициент теплового расширения, теплоемкость $(\rho C_p)_{nf}$, эффективный коэффициент тепловой диффузии и эффективная теплопроводность наножидкости k_{nf} определяются следующим образом (см. [9]):

$$\begin{aligned} \rho_{nf} &= (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_s, \quad \mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2,5}}, \quad (\rho\beta)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_s, \\ (\rho C_p)_{nf} &= (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_s, \quad \alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}, \quad k_{nf} = k_f \frac{k_s + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + 2\varphi(k_f - k_s)} \end{aligned}$$

(φ — объемная доля наночастиц; индексы s, f соответствуют твердой и жидкой фазам).

Граничные условия для уравнений (1) задаются в виде

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u &= u_w(x) = bx, \quad v = 0, \quad T = T_w(x) = T_\infty + A(x/l), \\ y \rightarrow \infty: \quad u &\rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где b — коэффициент линейного растяжения; l — характерная длина; A — константа, значение которой зависит от свойств жидкости.

Введем следующие безразмерные переменные (см. [25]):

$$\eta = \frac{y}{x} \operatorname{Re}_x^{1/(n+1)}, \quad \psi = xu_w \operatorname{Re}_x^{-1/(n+1)} F(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}. \quad (3)$$

Здесь $\psi(x, y)$ — функция тока; η — переменная подобия; F, θ — безразмерные функции подобия; $\text{Re}_x = x^n(u_w)^{2-n}/\nu_f$ — локальное число Рейнольдса. Компоненты вектора скорости равны $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$.

С использованием (3) из уравнений (1) получаем безразмерные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{n}{(1-\varphi)^{2,5}}(-F'')^{n-1}F''' + \left[1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f}\right] \left(\frac{2n}{n+1} FF'' - F'^2\right) - MF' + \lambda \left[1 - \varphi + \varphi \frac{(\rho\beta)_s}{(\rho\beta)_f}\right] \theta = 0; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}_m} \frac{k_{nf}}{k_f} \theta'' + \left[1 - \varphi + \varphi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}\right] \left(\frac{2n}{n+1} F\theta' - F'\theta\right) = 0, \quad (5)$$

где $\text{Pr}_m = (bx^2/\alpha_f) \text{Re}_x^{-2/(n+1)}$ — модифицированное число Прандтля (для жидкостей, удовлетворяющих степенному закону); $M = \sigma B_0^2/(b\rho_f)$ — параметр магнитного поля; $\lambda = \pm \text{Gr}_x/\text{Re}_x$ — конвективный параметр плавучести; $\text{Gr}_x = g\beta(T_w - T_\infty)xb^{-n}/\nu_f$ — число Грасгофа. Следует отметить, что значения $\lambda > 0$ соответствуют случаю, когда поток направлен вертикально вверх (“способствующий” поток), $\lambda < 0$ — случаю, когда поток направлен вертикально вниз (“препятствующий” поток), значение $\lambda = 0$ ($T_w = T_\infty$) соответствует случаю, когда выталкивающая сила отсутствует.

Граничные условия (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad & F = 0, \quad F' = 1, \\ \eta \rightarrow \infty: \quad & F' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что при отсутствии наночастиц уравнения (5), (6) сводятся к уравнениям, приведенным в работе [25].

Коэффициент поверхностного трения C_f и локальное число Нуссельта Nu_x определяются следующим образом:

$$\text{Re}_x^{1/(n+1)} C_f = \frac{2}{(1-\varphi)^{2,5}} (-F''(0))^n, \quad \text{Re}_x^{-1/(n+1)} \text{Nu}_x = -\frac{k_{nf}}{k_f} \theta'(0).$$

2. Результаты исследования и их обсуждение. Система уравнений (4), (5) с граничными условиями (6) решалась численно с использованием метода пристрелки, реализованного в пакете Wolfram Mathematica при различных значениях определяющих параметров $\varphi, \text{Pr}_m, \lambda, M, n$. Для проверки точности полученных результатов проведено их сравнение с данными работы [25] при $\varphi = 0$. Установлено, что эти результаты хорошо согласуются (табл. 1). В табл. 2 приведены значения $-F''(0)$ и $-\theta'(0)$ при $\text{Pr}_m = 6,8$ и различных значениях параметра магнитного поля ($M = 0, 1, 2$).

На рис. 1 представлены профили скорости $F'(\eta)$ и температуры $\theta(\eta)$ при наличии (отсутствии) магнитного поля при $n = 0,4, \lambda = 1, \text{Pr}_m = 6,8$ (вода) и различных значениях объемной доли наночастиц меди. Из рис. 1,а следует, что при увеличении φ толщина пограничного слоя уменьшается и в случае наличия магнитного поля ($M = 1$), и в случае его отсутствия ($M = 0$). Также на рис. 1,а видно, что при наличии магнитного поля толщина пограничного слоя уменьшается более существенно, поскольку сила Лоренца, возникающая в этом случае, приводит к уменьшению скорости течения в пограничном слое. В то же время на рис. 1,б видно, что с увеличением доли наночастиц φ толщина теплового пограничного слоя увеличивается, так как увеличивается теплопроводность наножидкости. Следует отметить, что в случае $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ толщина теплового пограничного слоя больше, чем в случае чистой воды ($\varphi = 0$), как при наличии магнитного поля, так и при его отсутствии.

Таблица 1

Значения $-F''(0)$ и $-\theta'(0)$ при $M = 0$, $\varphi = 0$, $Pr_m = 1$

λ	$-F''(0)$				$-\theta'(0)$			
	Данные настоящей работы		Данные [25]		Данные настоящей работы		Данные [25]	
	$n = 0,4$	$n = 1$	$n = 0,4$	$n = 1$	$n = 0,4$	$n = 1$	$n = 0,4$	$n = 1$
-1	3,610 92	1,833 45	3,610 924 2	1,833 475 7	0,787 28	0,950 15	0,787 281 30	0,950 119 9
0	2,284 42	1,414 22	2,284 420 3	1,414 214 6	0,743 31	0,895 44	0,743 309 74	0,895 446 2
1	1,252 57	1,000 30	1,252 582 0	1,000 291 1	0,899 85	1,000 30	0,899 858 24	1,000 291 1
2	0,567 58	0,633 91	0,567 583 3	0,633 903 8	0,982 24	1,063 44	0,982 220 83	1,063 424 2

Таблица 2

Значения $-F''(0)$ и $-\theta'(0)$ при $\lambda = 1$, $n = 0,4$, $Pr_m = 6,8$

M	$-F''(0)$			$-\theta'(0)$		
	$\varphi = 0$	$\varphi = 0,05$	$\varphi = 0,15$	$\varphi = 0$	$\varphi = 0,05$	$\varphi = 0,15$
0	0,881 692	1,084 900	1,342 620	2,744 130	2,484 890	2,069 700
1	1,653 740	1,770 260	1,874 530	2,589 780	2,355 730	1,979 320
2	2,398 440	2,431 650	2,389 860	2,455 830	2,242 440	1,898 660

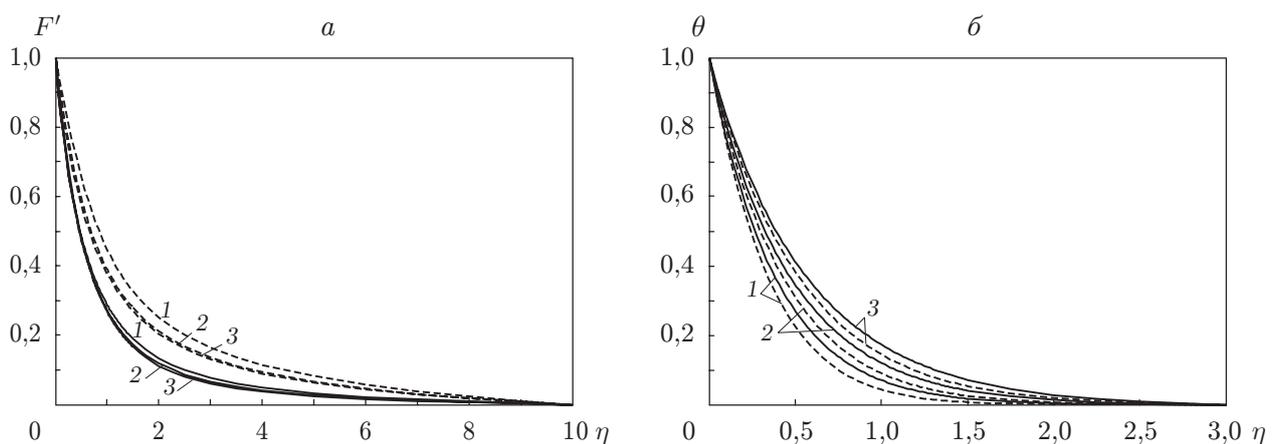


Рис. 1. Профили скорости (а) и температуры (б) наножидкости $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ при $\lambda = 1$, $n = 0,4$ и различных значениях φ : штриховые линии — $M = 0$ (магнитное поле отсутствует), сплошные — $M = 1$; 1 — $\varphi = 0$, 2 — $\varphi = 0,1$, 3 — $\varphi = 0,2$

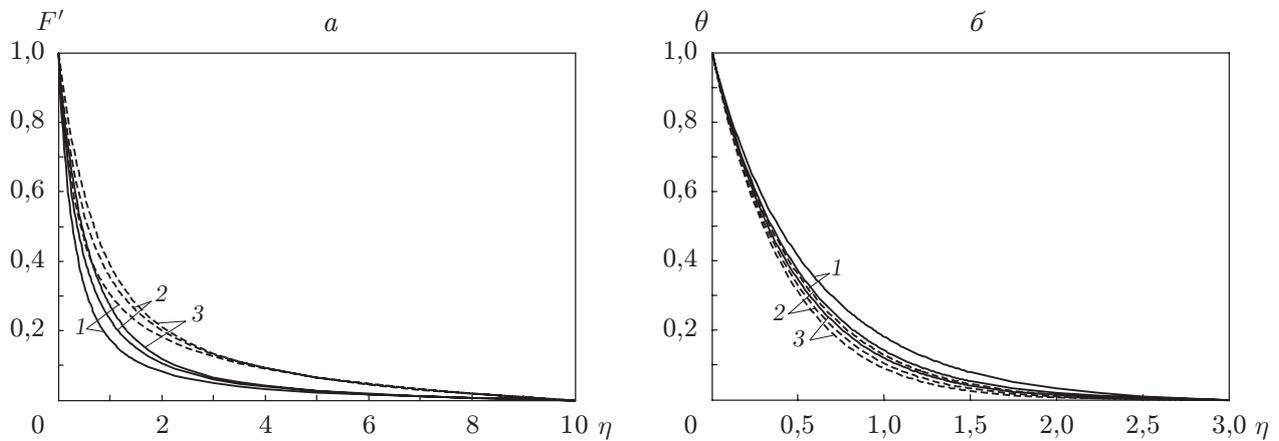


Рис. 2. Профили скорости (а) и температуры (б) наножидкости Cu — H₂O при $\varphi = 0,1$, $n = 0,4$ и различных значениях λ :
штриховые линии — $M = 0$ (магнитное поле отсутствует), сплошные — $M = 1$; 1 — $\lambda = -1$, 2 — $\lambda = 0$, 3 — $\lambda = 1$

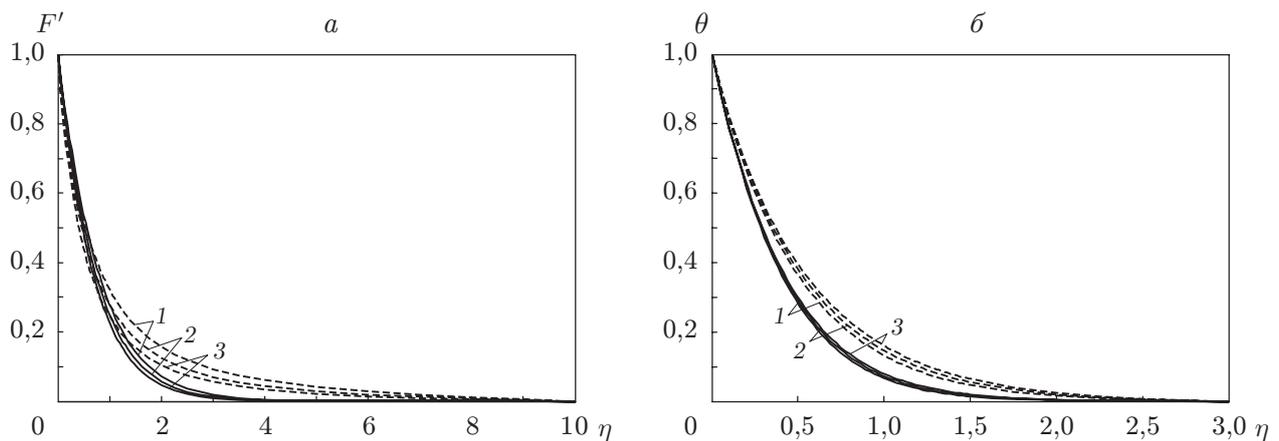


Рис. 3. Профили скорости (а) и температуры (б) наножидкости Cu — H₂O при $\lambda = 1$, $\varphi = 0,15$ и различных значениях M :
штриховые линии — $n = 0,4$, сплошные — $n = 1$ (ньютоновская жидкость); 1 — $M = 0,5$, 2 — $M = 1,0$, 3 — $M = 1,5$

На рис. 2 показано влияние параметра смешанной конвекции λ для наножидкости на скорость и температуру при $n = 0,4$. Видно, что с увеличением λ толщина пограничного слоя увеличивается, в то время как толщина теплового пограничного слоя уменьшается. При этом для всех рассмотренных значений λ толщина пограничного слоя при наличии магнитного поля меньше, чем при его отсутствии, тогда как толщина теплового пограничного слоя при наличии магнитного поля больше, чем при его отсутствии. Также на рис. 2 видно, что в случае “способствующего” потока толщина пограничного слоя больше, чем в случае “препятствующего” потока, в то время как толщина теплового пограничного слоя — меньше. Это обусловлено тем, что при $\lambda > 0$ жидкость нагревается, а поверхность охлаждается, тогда как при $\lambda < 0$ жидкость охлаждается, а поверхность нагревается.

На рис. 3 показано влияние параметра магнитного поля M на скорость и температуру при $\lambda = 1$, $\varphi = 0,15$, $n = 0,4$; $1,0$ ($n < 1$ — псевдопластическая жидкость, $n = 1$ —

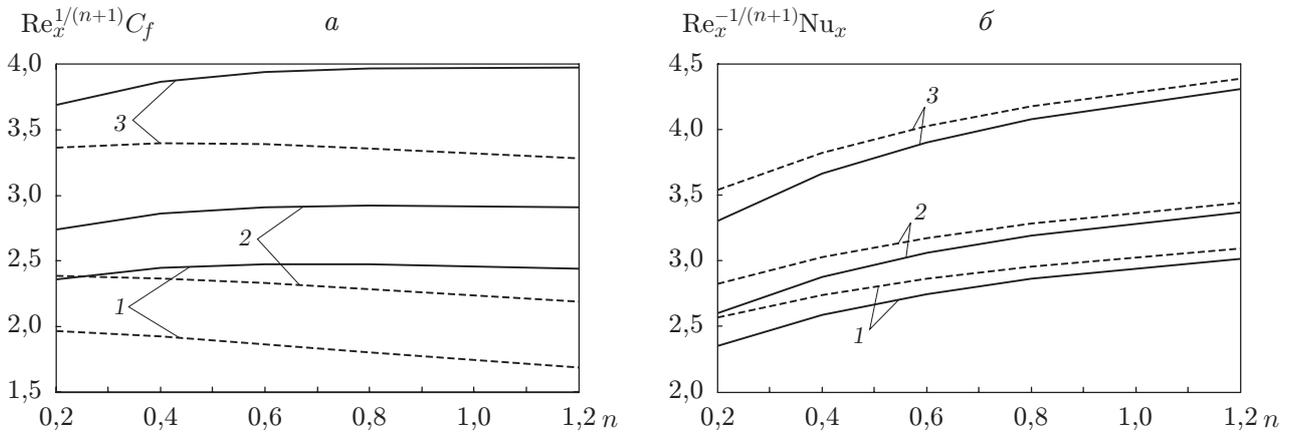


Рис. 4. Зависимости коэффициента поверхностного трения (а) и числа Нуссельта (б) от показателя степени n для наножидкости $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ при $\lambda = 1$ и различных значениях φ :
штриховые линии — $M = 0$, сплошные — $M = 1$; 1 — $\varphi = 0$, 2 — $\varphi = 0,05$, 3 — $\varphi = 0,15$

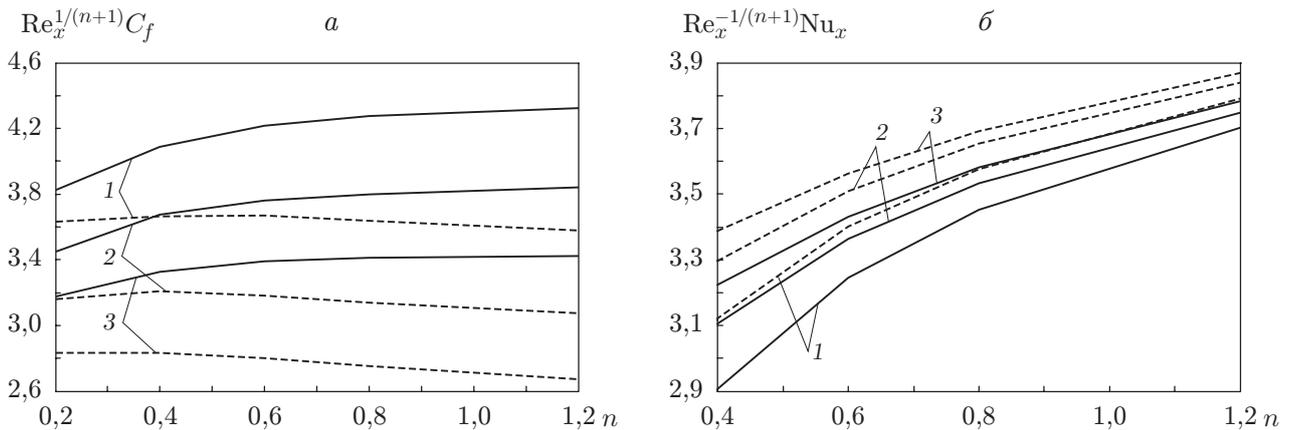


Рис. 5. Зависимости коэффициента поверхностного трения (а) и числа Нуссельта (б) от показателя степени n для наножидкости $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ при $\varphi = 0,1$ и различных значениях λ :
штриховые линии — $M = 0$, сплошные — $M = 1$; 1 — $\lambda = -1$, 2 — $\lambda = 0$, 3 — $\lambda = 1$

ньютоновская жидкость) в случае наножидкости. Заметим, что с увеличением параметра M толщина пограничного слоя уменьшается, а толщина теплового пограничного слоя увеличивается. Кроме того, в случае псевдопластической жидкости толщина теплового пограничного слоя больше, чем в случае ньютоновской жидкости.

На рис. 4, 5 приведены зависимости напряжения сдвига и скорости теплопереноса от показателя степени n для наножидкости при $M = 0, 1$. На рис. 4 показано влияние объемной доли наночастиц φ на напряжение сдвига и скорость теплопереноса при $\lambda = 1$, на рис. 5 — влияние параметра смешанной конвекции λ на напряжение сдвига и скорость теплопереноса при $\varphi = 0,1$. На рис. 4 видно, что при увеличении φ напряжение сдвига и скорость теплопереноса возрастают и при $M = 0$, и при $M = 1$. Также на рис. 5 видно, что при уменьшении λ напряжение сдвига и скорость теплопереноса увеличиваются как

при $M = 0$, так и при $M = 1$. Кроме того, в случае наличия магнитного поля напряжение сдвига больше, чем при его отсутствии, а скорость теплопереноса — меньше.

Заключение. Исследована задача о магнитогидродинамическом двумерном ламинарном смешанно-конвективном течении неньютоновской наножидкости, удовлетворяющей степенному закону, на вертикально растягивающейся поверхности. Получены аналитическое и численные решения, зависящие от объемной доли наночастиц φ , параметра магнитного поля M , показателя степени n , параметра смешанной конвекции λ и модифицированного числа Прандтля Pr_m . Рассмотрен случай, когда скорость, температура, поверхностное трение и тепловой поток на поверхности зависят от этих параметров. Следует отметить, что наличие магнитного поля и наночастиц меди приводит к уменьшению толщины пограничного слоя и увеличению толщины теплового пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Polidori G., Fohanno S., Nguyen C. T.** A note on heat transfer modelling of Newtonian nanofluids in laminar free convection // Intern. J. Thermal Sci. 2007. V. 46. P. 739–744.
2. **Moghadassi A. R., Hosseini S. M., Henneke D., Elkamel A.** A model of nanofluids effective thermal conductivity based on dimensionless group // J. Thermal Anal. Calorimetry. 2009. V. 96. P. 81–84.
3. **Hosseini S. M., Moghadassi A. R., Henneke D. E.** A new dimensionless group model for determining the viscosity of nanofluids // J. Thermal Anal. Calorimetry. 2010. V. 100. P. 873–877.
4. **Jain S., Patel H. E., Das S. K.** Brownian dynamic simulation for the prediction of effective thermal conductivity of nanofluid // J. Nanopart Res. 2009. V. 11. P. 767–773.
5. **Congedo P. M., Collura S., Congedo P. M.** Modeling and analysis of natural convection heat transfer in nanofluids // Proc. of ASME Summer heat transfer conf., Jacksonvill (USA), 10–14 Aug. 2008. S. 1., 2009. V. 3. P. 569–579.
6. **Ghasemi B., Aminossadati S. M.** Natural convection heat transfer in an inclined enclosure filled with a water — CuO nanofluid // Numer. Heat Transfer. A. Applications. 2009. V. 55. P. 807–823.
7. **Ho C. J., Chen M. W., Li Z. W.** Effect of natural convection heat transfer of nanofluid in an enclosure due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity // Proc. of ASME/JSME Thermal engineering summer heat transfer conf. S. 1., 2007. V. 1. P. 833–841.
8. **Ho C. J., Chen M. W., Li Z. W.** Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure: Effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 4506–4516.
9. **Oztop H. F., Abu-Nada E.** Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids // Intern. J. Heat Fluid. 2008. V. 29. P. 1326–1336.
10. **Das S. K.** Nanofluids: Science and technology / S. K. Das, S. U. S. Choi, W. Yu, T. Pradeep. New Jersey: Wiley, 2007.
11. **Wang X.-Q., Mujumdar A. S.** Heat transfer characteristics of nanofluids: a review // Intern. J. Thermal Sci. 2007. V. 46. P. 1–19.
12. **Wang X.-Q., Mujumdar A. S.** A review on nanofluids. 1. Theoretical and numerical investigations // Brazil. J. Chem. Engng. 2008. V. 25. P. 613–630.
13. **Wang X.-Q., Mujumdar A. S.** A review on nanofluids. 2. Experiments and applications // Brazil. J. Chem. Engng. 2008. V. 25. P. 631–648.
14. **Kakaç S., Pramuanjaroenkij A.** Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 3187–3196.
15. **Brizzell G. D., Slattery J. C.** Non-Newtonian boundary layer flow // Chem. Engng Sci. 1962. V. 17. P. 777–782.

16. **Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E.** Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces // *AICHE J.* 1960. V. 6. P. 312–317.
17. **Nakayama A., Koyama H.** An analysis for friction and heat transfer characteristics of power-law non-Newtonian fluid flows past bodies of arbitrary geometrical configuration // *Wärme- und Stoffübertragung.* 1988. Bd 22. S. 29–36.
18. **Cobble M. H.** Magnetohydrodynamic flow for a non-Newtonian power-law fluid having a pressure gradient and fluid injection // *J. Engng Math.* 1980. V. 14. P. 47–55.
19. **Tashtoush B., Kodah Z., Al-Ghasem A.** On thermal boundary layer of a non-Newtonian fluid on a power-law stretching surface of variable temperature with suction or injection // *Heat Mass Transfer.* 2001. V. 37. P. 459–465.
20. **Andersson H. I., Dandapat B. S.** Flow of a power law fluid over a stretching sheet // *Stability Appl. Anal. Continuous Media.* 1991. V. 1. P. 339–347.
21. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
22. **Hassanien I. A., Abdullah A. A., Gorla R. S. R.** Flow and heat transfer in a power law fluid over a non-isothermal stretching sheet // *Math. Comput. Model.* 1998. V. 28. P. 105–116.
23. **Sahu A. K., Mathur M. N., Chaturani P., Saxena S. B.** Momentum and heat transfer from a continuous moving surface to a power law fluid // *Acta Mech.* 2000. V. 142. P. 119–131.
24. **Denier J. P., Dabrowski P. P.** On the boundary layer equations for power law fluids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 2004. V. 460. P. 3143–3158.
25. **Prasad K. V., Datti P. S., Vajravelu K.** Hydromagnetic flow and heat transfer of a non-Newtonian power law fluid over a vertical stretching sheet // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2010. V. 53. P. 879–888.
26. **Ece M. C.** Free convection flow about a cone under mixed thermal boundary conditions and a magnetic field // *Appl. Math. Modelling.* 2005. V. 29. P. 1121–1134.
27. **Abel M. S., Sanjayanand E., Nandeppanavar M. M.** Viscoelastic MHD flow and heat transfer over a stretching sheet with viscous and ohmic dissipations // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2008. V. 13. P. 1808–1821.
28. **Bég O. A., Bakier A. Y., Prasad V. R., et al.** Nonsimilar, laminar, steady, electrically-conducting forced convection liquid metal boundary layer flow with induced magnetic field effects // *Intern. J. Thermal Sci.* 2009. V. 48. P. 1596–1606.
29. **Kumari M., Nath G.** Analytical solution of unsteady three-dimensional MHD boundary layer flow and heat transfer due to impulsively stretched plane surface // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. V. 14. P. 3339–3350.
30. **Kumaran V., Kumar A. V., Pop I.** Transition of MHD boundary layer flow past a stretching sheet // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010. V. 15. P. 300–311.
31. **Prasad K. V., Pal D., Umesh V., Rao N. S. P.** The effect of variable viscosity on MHD viscoelastic fluid flow and heat transfer over a stretching sheet // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010. V. 15. P. 331–344.
32. **Tabaei H., Moghimi M. A., Kimiaefar A., Moghimi M. A.** Homotopy analysis and differential quadrature solution of the problem of free-convective magnetohydrodynamic flow over a stretching sheet with the Hall effect and mass transfer taken into account // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011. V. 52, N 4. P. 624–636.
33. **Kandasamy R., Muhaimin I., Kamachi G.** Scaling group transformation for the effect of temperature-dependent nanofluid viscosity on an MHD boundary layer past a porous stretching surface // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011. V. 52, N 6. P. 931–940.
34. **Nagler J.** Laminar boundary layer model for power-law fluids with non-linear viscosity // *WSEAS Transactions Fluid Mech.* 2014. V. 9. P. 19–25.

*Поступила в редакцию 9/1 2014 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2014 г.*