УДК 539.30

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ МОМЕНТНЫХ СРЕД

Л. И. Шкутин

(*Новосибирск*)

В исходящей от Коши классической модели деформируемой сплошной среды (деформируемого континуума) деформация вполне определяется векторным полем перемещений, а напряженное состояние — тензорным полем напряжений. Хотя реальные среды имеют дискретную структуру, классическая модель весьма успешно описывает распределение напряжений и деформаций в достаточно гладких областях при достаточно плавных нагрузках. Однако эта модель теряет точность при нарушении условий гладкости областей и при увеличении градиентов нагрузок. В таких условиях проявляется дискретность структуры реальных сред. Соответствие опыту может быть восстановлено ценой отказа от классической модели сплошной среды и замены ее другими, более отвечающими опыту моделями. По-видимому, наиболее универсальной моделью является модель среды как дискретной системы частиц, связанных определенными силами взаимодействия. Однако анализ таких сил в реальных средах сам по себе представляет сложную проблему. Более простой выход состоит в такой модификации классической модели, которая при сохранении гипотезы сплошности среды наделила бы ее главными специфическими свойствами среды дискретной структуры. Наиболее интенсивно развивающейся в настоящее время моделью деформируемой среды является исходящая от братьев Коссера модель моментного континуума. Под таким континуумом понимается среда, деформация которой определяется кинематически независимыми векторными полями перемещений и поворотов, а напряженное состояние — тензорными полями внутренних сил и моментов. Наиболее полная формулировка отвечающих этой модели уравнений содержится, по-видимому, в работе [1].

В данной работе предложена модифицированная по сравнению с [1] формулировка нелинейных уравнений термомеханического моментного континуума. Модификация достигнута за счет введения векторного поля конечных поворотов, что существенно упростило нелинейную формулировку кинематических уравнений, максимально приблизив ее к линейной формулировке. Для сформулированной системы нелинейных уравнений указаны кинематические и динамические связи, приводящие к более простым нелинейным моделям деформируемых сред.

Область трехмерного эвклидова пространства, занимаемая сплошной средой в начальный момент времени, параметризуется лагранжевыми координатами t_N (прописные латинские индексы принимают значения 1, 2, 3).

Пусть $(t) \equiv (t_1,\ t_2,\ t_3)$ — произвольная материальная точка континуума; $\mathbf{a}(t)$ — ее начальный радиус-вектор относительно фиксированной (отсчетной) точки пространства; ∇_N — оператор частного дифференцирования по переменной t_N: $\mathbf{A}_{(N)}(t) \equiv \nabla_N \mathbf{a}$—определенный в точке (t) начальный координатный базис; $A_{(MN)}(t) \equiv \mathbf{A}_{(M)} \cdot \mathbf{A}_{(N)}$ — метрический тензор начального базиса; $D_{(LMN)}(t) \equiv \mathbf{A}_{(L)} \cdot (\mathbf{A}_{(M)} \times \mathbf{A}_{(N)})$— дискриминантный тензор начального базиса; $\nabla_{(N)}$ — оператор ковариантного дифференцирования по переменной t_N в начальном базисе.

В начальный момент времени континуум подвергается механическим и (или) термическим воздействиям, которые вызывают сопровождающееся деформацией движение его материальных точек. Замкнутая система уравнений, описывающих это движение континуума, складывается из кинематических, динамических и определяющих уравнений.

1. При лагранжевом способе описания сопровождающегося деформацией движения континуума оно сводится к непрерывному и достаточно гладкому преобразованию координатного базиса.

Пусть t_0 — текущий момент времени; $\mathbf{a}_0(t_0,\ t)$ — мгновенный радиус-вектор материальной точки (t) относительно отсчетной точки пространства;

$\mathbf{A}_{(N)}(t_0, t) \equiv \nabla_N \mathbf{a}_0$ — мгновенный координатный базис; ∇_0 — оператор дифференцирования по параметру t_0.

В соответствии с концепцией моментного континуума при преобразовании начального базиса в мгновенный допускается независимый от перемещения локальный поворот базиса. Поэтому для математического описания такого преобразования уместно воспользоваться идеей Био о выделении жесткого поворота из общего преобразования базиса [2]. Эта идея была реализована при построении квадратичной теории классического (безмоментного) упругого континуума.

Обобщение идеи Био на моментный континуум позволяет представить преобразование начального базиса в мгновенный как суперпозицию двух независимых последовательных преобразований: 1) локального жесткого поворота, переводящего начальный базис в некоторый (повернутый) базис $\mathbf{A}_{[N]}(t_0, t)$; 2) преобразования повернутого базиса в мгновенный.

Локальный жесткий поворот базиса определяется углом поворота $\vartheta(t_0, t)$ относительно мгновенной локальной оси. Удобнее, однако, определить его направленным вдоль этой оси локальным вектором поворота $\mathbf{V}(t_0, t)$ длины

$$|\mathbf{V}| = 2\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\right|.$$

Преобразование жесткого поворота базиса выражается через вектор поворота взаимно обратными формулами Родрига [3]

$$(1.1)\qquad \mathbf{A}_{[N]} = \mathbf{A}_{(N)} + \frac{1}{f}\left(\mathbf{A}_{(N)} + \frac{1}{2}\mathbf{V}\times\mathbf{A}_{(N)}\right),$$

$$\mathbf{A}_{(N)} = \mathbf{A}_{[N]} - \frac{1}{f}\left(\mathbf{A}_{[N]} - \frac{1}{2}\mathbf{V}\times\mathbf{A}_{[N]}\right),\quad f = 1 + \frac{1}{4}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}.$$

При жестком повороте метрический и дискриминантный тензоры не изменяются, так что

$$(1.2)\qquad \mathbf{A}_{[M]}\cdot\mathbf{A}_{[N]} = A_{(MN)},\quad \mathbf{A}_{[M]}\times\mathbf{A}_{[N]} = D_{(LMN)}\mathbf{A}^{[L]}.$$

Вследствие этого операция «жонглирования» индексами в повернутом базисе осуществляется при помощи начального метрического тензора.

Решение любого из уравнений (1.1) относительно вектора поворота дает формулу

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}f\mathbf{A}^{(N)}\times\mathbf{A}_{[N]},$$

определяющую вектор поворота через повернутый базис. Ее следствием являются равенства

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}_{[N]} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{A}_{(N)},$$

констатирующие совпадение компонент вектора поворота в начальном и повернутом базисах.

Поле конечных поворотов, образуемое векторной функцией $\mathbf{V}(t_0, t)$ и сохраняющее метрику пространства, может производить лишь изгибания погруженных в это пространство линий и поверхностей (в частности, координатных линий и поверхностей). Мерой изгибания могут служить векторы $\nabla_{(L)}\mathbf{A}_{[M]}$. Имеется, однако, более простая мера, выражаемая через эти векторы. Действительно, ковариантное дифференцирование скалярного произведения (1.2) приводит к равенству

$$\mathbf{A}_{[N]}\cdot\nabla_{(K)}\mathbf{A}_{[M]} = -\mathbf{A}_{[M]}\cdot\nabla_{(K)}\mathbf{A}_{[N]},$$

следствием которого является представление

$$\nabla_{(K)}\mathbf{A}_{[M]} = \mathbf{V}_{(K)} \times \mathbf{A}_{[M]}. \tag{1.3}$$

Введенные таким образом векторы $\mathbf{V}_{(K)}(t_0, t)$ определяют более простую и естественную меру изгибаний, вследствие чего могут быть названы векторами изгибной деформации континуума.

Обращение равенства (1.3) приводит к формуле

$$\mathbf{V}_{(K)} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{[M]} \times \nabla_{(K)}\mathbf{A}_{[M]}, \tag{1.4}$$

выражающей векторы изгибной деформации через векторы $\nabla_{(K)}\mathbf{A}_{[M]}$. С помощью формул (1.1) из (1.4) получается следующее выражение векторов изгибной деформации через вектор поворота:

$$\mathbf{V}_{(K)} = \frac{1}{f}\left(\nabla_K\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{V} \times \nabla_K\mathbf{V}\right). \tag{1.5}$$

Векторы изгибной деформации имеют тензорные компоненты и образуют тензорное поле нелинейных изгибных деформаций континуума.

Преобразование повернутого базиса в мгновенный порождает векторы $\mathbf{U}_{(K)}(t_0, t)$, определяемые формулой ($\mathbf{U}(t_0, t)$ — вектор перемещения)

$$\mathbf{U}_{(K)} = \mathbf{A}_{(K)} - \mathbf{A}_{[K]} = \nabla_K\mathbf{U} + \mathbf{A}_{(K)} - \mathbf{A}_{[K]} \tag{1.6}$$

и являющиеся мерой обусловленного деформацией изменения метрического тензора пространства. Эти векторы могут быть названы векторами метрической деформации континуума.

Подстановка в (1.6) выражений (1.1) приводит к эквивалентным равенствам

$$\mathbf{U}_{(K)} = \nabla_K\mathbf{U} - \frac{1}{f}\mathbf{V} \times \left(\mathbf{A}_{(K)} + \frac{1}{2}\mathbf{V} \times \mathbf{A}_{(K)}\right) = \tag{1.7}$$

$$= \nabla_K\mathbf{U} - \frac{1}{f}\mathbf{V} \times \left(\mathbf{A}_{[K]} - \frac{1}{2}\mathbf{V} \times \mathbf{A}_{[K]}\right),$$

определяющим векторы метрической деформации через векторы перемещения и поворота.

Векторы метрической деформации имеют тензорные компоненты и образуют тензорное поле нелинейных метрических деформаций континуума.

Обращенные по отношению к (1.5), (1.6) равенства

$$\nabla_K\mathbf{V} = \mathbf{V}_{(K)} + \frac{1}{2}\mathbf{V}_{(K)} \times \mathbf{V} + \frac{1}{4}(\mathbf{V}_{(K)}\cdot\mathbf{V})\,\mathbf{V},$$

$$\nabla_K\mathbf{U} = \mathbf{U}_{(K)} + \mathbf{A}_{[K]} - \mathbf{A}_{(K)}$$

можно трактовать как систему уравнений, определяющих векторы поворота и перемещения через векторы (тензоры) деформации. Условия интегрируемости (совместности) этой системы

$$D^{(KLM)}\nabla_{(K)}\nabla_L\mathbf{V} = 0, \quad D^{(KLM)}\nabla_{(K)}\nabla_L\mathbf{U} = 0$$

сводятся с помощью (1.3) к уравнениям

$$D^{(KLM)}\left(\nabla_{(K)}\mathbf{V}_{(L)} - \frac{1}{2}\mathbf{V}_{(K)} \times \mathbf{V}_{(L)}\right) = 0, \tag{1.8}$$

$$D^{(KLM)}(\nabla_{(K)}\mathbf{U}_{(L)} + \mathbf{V}_{(K)} \times \mathbf{A}_{[L]}) = 0,$$

являющимся по своему смыслу условиями сплошности деформированной среды.

Для завершения формулировки кинематических уравнений остается определить скорости изменения по времени введенных кинематических векторов.

Так как движение повернутого базиса является сферическим, то оно представимо через вектор угловой скорости $\mathbf{V}_0(t_0, t)$ уравнением

$$\nabla_0 \mathbf{A}_{[M]} = \mathbf{V}_0 \times \mathbf{A}_{[M]}. \tag{1.9}$$

Отсюда следует равенство

$$\mathbf{V}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{A}^{[M]} \times \nabla_0 \mathbf{A}_{[M]}, \tag{1.10}$$

позволяющее, как и аналогичное равенство (1.4), выразить угловую скорость базиса через вектор поворота (см. также [3]):

$$\mathbf{V}_0 = \frac{1}{f}\left(\nabla_0 \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{V} \times \nabla_0 \mathbf{V}\right). \tag{1.11}$$

Явная аналогия между формулами (1.3) — (1.5) и (1.9) — (1.11) позволяет установить, во-первых, эквивалентность операций дифференцирования по времени и ковариантного дифференцирования по координатам (следовательно, перестановочность операторов ∇_0 и $\nabla_{(L)}$) и, во-вторых, механический смысл тензора изгибных деформаций как тензора угловых скоростей жесткого вращения базиса, отвечающих бесконечно малым приращениям координат в фиксированный момент времени.

Дифференцирование по времени равенства (1.4) с учетом (1.9) приводит к формуле

$$\nabla_0 \mathbf{V}_{(L)} = \nabla_L \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_{(L)}, \tag{1.12}$$

определяющей скорости изменения по времени векторов изгибной деформации.

Подобным же образом из равенства (1.6) определяются скорости изменения по времени векторов метрической деформации:

$$\nabla_0 \mathbf{U}_{(L)} = \nabla_L \mathbf{U}_0 - \mathbf{V}_0 \times \mathbf{A}_{[L]}. \tag{1.13}$$

Вектор $\mathbf{U}_0(t_0, t)$, определяемый равенством

$$\mathbf{U}_0 = \nabla_0 \mathbf{U},$$

является по своему смыслу вектором линейной скорости базиса.

2. Для вывода динамических уравнений термомеханического моментного континуума определим на мгновенных координатных поверхностях рассчитанные на единицу начальной площади векторы $\mathbf{X}^{(M)}(t_0, t)$ силовых напряжений и векторы $\mathbf{Y}^{(M)}(t_0, t)$ моментных напряжений.

Пусть, кроме того, $\mathbf{F}(t_0, t), \mathbf{G}(t_0, t)$ — рассчитанные на единицу начального объема векторы объемных внешних сил и моментов; $H_0(t_0, t)$ — скорость притока тепла к единице начального объема; $\rho(t)$ — начальная плотность континуума; $\mathbf{R}(t)$ — тензор локальных моментов инерции (по определению он не зависит от времени и является осредненной по начальному единичному объему мерой инерции структурных частиц среды при их вращательном движении как твердых тел относительно локальных осей).

В начальный момент времени выделим в континууме произвольную пространственную область A с гладкой поверхностью B, на которой определено поле единичных нормальных векторов

$$\mathbf{N}(t) = N_{(M)}(t) \mathbf{A}^{(M)}.$$

В текущий момент времени на выделенную область действуют поверхностные и объемные силы. Главные векторы поверхностных сил и моментов, действующих на выделенную область извне через поверхностный элемент $d\beta$, равны соответственно $\mathbf{X}^{(M)}N_{(M)}\,d\beta$ и $\mathbf{Y}^{(M)}N_{(M)}\,d\beta$. Главные векторы объемных сил и моментов, действующих на объемный элемент $d\alpha$, складываются из векторов $\mathbf{F}d\alpha$, $\mathbf{G}d\alpha$ внешних сил и моментов и из векторов $\rho\nabla_0\mathbf{U}_0 d\alpha$, $\mathbf{R}\cdot\nabla_0\mathbf{V}_0 d\alpha$ инерционных сил и моментов.

Движение выделенной области континуума описывается следующими интегральными динамическими уравнениями изменения количества движения и момента количества движения (относительно отсчетной точки пространства):

$$\int_B \mathbf{X}^{(M)}N_{(M)}d\beta + \int_A \mathbf{F}d\alpha = \int_A \rho\nabla_0\mathbf{U}_0 d\alpha,$$

$$\int_B \left(\mathbf{a}_0 \times \mathbf{X}^{(M)} + \mathbf{Y}^{(M)}\right) N_{(M)}d\beta + \int_A (\mathbf{a}_0 \times \mathbf{F} + \mathbf{G})\, d\alpha =$$

$$= \int_A (\rho\mathbf{a}_0 \times \nabla_0\mathbf{U}_0 + \mathbf{R}\cdot\nabla_0\mathbf{V}_0)\, d\alpha.$$

При достаточной гладкости рассматриваемых функций преобразование поверхностных интегралов по формуле Гаусса — Остроградского приводит к локальным уравнениям движения моментного континуума

$$\nabla_{(M)}\mathbf{X}^{(M)} + \mathbf{F} = \rho\nabla_0\mathbf{U}_0,\quad \nabla_{(M)}\mathbf{Y}^{(M)} + \tag{2.1}$$
$$+ \mathbf{A}_{(M)} \times \mathbf{X}^{(M)} + \mathbf{G} = \mathbf{R}\cdot\nabla_0\mathbf{V}_0.$$

Если $U(t_0, t)$ — рассчитанная на единицу начального объема плотность внутренней энергии континуума, то для выделенной области должен выполняться первый закон термодинамики, формулируемый интегральным уравнением

$$\nabla_0\int_A \left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{U}_0\cdot\mathbf{U}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}_0 + U\right) d\alpha = \int_A (\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}_0 + \tag{2.2}$$
$$+ \mathbf{G}\cdot\mathbf{V}_0 + H_0)\, d\alpha + \int_B \left(\mathbf{X}^{(M)}\cdot\mathbf{U}_0 + \mathbf{Y}^{(M)}\cdot\mathbf{V}_0\right) N_{(M)}\, d\beta.$$

В результате преобразования поверхностного интеграла по формуле Гаусса — Остроградского и привлечения уравнений (2.1) отсюда следует локальное уравнение энергии

$$\nabla_0 U = \mathbf{X}^{(M)}\cdot(\nabla_M\mathbf{U}_0 - \mathbf{V}_0 \times \mathbf{A}_{(M)}) + \mathbf{Y}^{(M)}\cdot\nabla_M\mathbf{V}_0 + H_0. \tag{2.3}$$

Если область, занимаемая континуумом, ограничена и на ее границе заданы либо векторы перемещения и поворота, либо рассчитанные на единицу начальной площади векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ внешних поверхностных сил и моментов, то необходимым и достаточным условием выполнения во всей области интегрального уравнения (2.2) при дополнительной локальной связи (2.3) является выполнение внутри области уравнений (2.1), а на граничной поверхности — уравнений (граничных условий)

$$(\mathbf{X}^{(M)}N_{(M)} - \mathbf{P})\cdot\mathbf{U}_0 = 0,\quad (\mathbf{Y}^{(M)}N_{(M)} - \mathbf{Q})\cdot\mathbf{V}_0 = 0. \tag{2.4}$$

3. Для скалярного представления сформулированных кинематических и динамических уравнений могут быть использованы разложения кинематических и силовых векторов как по начальному, так и по повернутому базису:

$$\mathbf{U} = U_{(N)}\mathbf{A}^{(N)} = U_{[N]}\mathbf{A}^{[N]},\quad \mathbf{V} = V_{(N)}\mathbf{A}^{(N)} = \tag{3.1}$$
$$= V_{[N]}\mathbf{A}^{[N]}\ (V_{[N]} \equiv V_{(N)}\ ),$$

$$\mathbf{U}_{(M)} = U_{(MN)}\mathbf{A}^{(N)} = U_{(MN]}\mathbf{A}^{[N]},\ \mathbf{V}_{(M)} = V_{(MN)}\mathbf{A}^{(N)} = \\ = V_{(MN]}\mathbf{A}^{[N]}$$

$$\mathbf{X}^{(M)} = X^{(MN)}\mathbf{A}_{(N)} = X^{(MN]}\mathbf{A}_{[N]},\ \mathbf{Y}^{(M)} = Y^{(MN)}\mathbf{A}_{(N)} = \\ = Y^{(MN]}\mathbf{A}_{[N]}.$$

При этом переход от одного из этих базисов к другому осуществляется с помощью уравнений (1.1), представленных в виде

$$\mathbf{A}_{[M]} = (A_{(MN)} + W_{(MN)})\,\mathbf{A}^{(N)},\ \mathbf{A}_{(M)} = (A_{(NM)} + \\ + W_{(NM)})\mathbf{A}^{[N]},$$
$$W_{(MN)} = \frac{1}{f}D_{(LMN)}V^{(L)} + \frac{1}{2f}\left(V_{(M)}V_{(N)} - A_{(MN)}V_{(L)}V^{(L)}\right). \tag{3.2}$$

Равенства (1.12), (1.13) позволяют установить формулы

$$\nabla_M \mathbf{V}_0 = \nabla_0 V_{(MN]}\mathbf{A}^{[N]},\ \nabla_M \mathbf{U}_0 - \mathbf{V}_0 \times \mathbf{A}_{(M)} = \nabla_0 U_{(MN]}\mathbf{A}^{[N]}, \tag{3.3}$$

с помощью которых уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$\nabla_0 U = X^{(MN]}\nabla_0 U_{(MN]} + Y^{(MN]}\nabla_0 V_{(MN]} + H_0, \tag{3.4}$$

показывающему, что компоненты силовых и деформационных тензоров в повернутом базисе являются соответственно обобщенными внутренними силами и обобщенными перемещениями. Компоненты этих тензоров в начальном базисе таковыми не являются.

Для замыкания сформулированной системы кинематических и динамических уравнений необходимо привлечь определяющие уравнения моментного континуума. Вопрос о формулировке этих уравнений не может быть решен в общей постановке. Он требует конкретизации, базирующейся на экспериментальных исследованиях. В частности, для моментного континуума, как и для безмоментного, может быть выделен класс обратимых процессов деформирования [4]. Если ограничиться изучением только таких процессов, то для формулировки определяющих уравнений достаточно задать либо плотность внутренней энергии U как функцию обоих деформационных тензоров и плотности энтропии S:

$$U = U(U_{(MN]},\ V_{(MN]},\ S),$$

либо плотность свободной энергии V как функцию тех же тензоров и абсолютной температуры T:

$$V \equiv U - TS = V(U_{(MN]},\ V_{(MN]},\ T).$$

При этом параметры состояния S и T связаны друг с другом уравнением второго закона термодинамики

$$H_0 = T\nabla_0 S. \tag{3.5}$$

В результате дифференцирования каждой из функций U, V по времени и сравнения с уравнениями (3.4), (3.5) получаются дифференциальные равенства

$$\frac{\partial U}{\partial U_{(MN]}}\nabla_0 U_{(MN]} + \frac{\partial U}{\partial V_{(MN]}}\nabla_0 V_{(MN]} + \frac{\partial U}{\partial S}\nabla_0 S = \\ = X^{(MN]}\nabla_0 U_{(MN]} + Y^{(MN]}\nabla_0 V_{(MN]} + T\nabla_0 S,$$

$$\frac{\partial V}{\partial U_{(MN]}}\nabla_0 U_{(MN]} + \frac{\partial V}{\partial V_{(MN]}}\nabla_0 V_{(MN]} + \frac{\partial V}{\partial T}\nabla_0 T = \\ = X^{(MN]}\nabla_0 U_{(MN]} + Y^{(MN]}\nabla_0 V_{(MN]} - S\nabla_0 T,$$

из которых следуют эквивалентные формулировки определяющих уравнений и уравнений притока тепла:

$$X^{(MN]} = \frac{\partial U}{\partial U_{(MN]}}, \quad Y^{(MN]} = \frac{\partial U}{\partial V_{(MN]}}, \quad H_0 - \frac{\partial U}{\partial S} \nabla_0 S; \tag{3.6}$$

$$X^{(MN]} = \frac{\partial V}{\partial U_{(MN]}}, \quad Y^{(MN]} = \frac{\partial V}{\partial V_{(MN]}}, \quad H_0 = - T\nabla_0 \frac{V}{\partial T}. \tag{3.7}$$

Первая из них предпочтительнее при адиабатических, вторая — при изотермических процессах деформирования.

4. Наложение кинематических связей

$$\mathbf{U}_{(M)} \cdot \mathbf{A}_{[N]} = \mathbf{U}_{(N)} \cdot \mathbf{A}_{[M]}, \tag{4.1}$$

обеспечивающих симметрию тензора метрических деформаций, приводит к модели псевдоконтинуума Коссера [1, 4, 5]. Кинематика такого континуума тождественна кинематике классического континуума, ибо равенства (4.1) определяют вектор поворота материальной точки континуума через вектор ее перемещения точно так же, как в классической модели. И лишь наличие моментных напряжений отличает модель псевдоконтинуума Коссера от классической модели. В модели псевдоконтинуума число независимых граничных условий сокращается до пяти [5].

Дополнение связей (4.1) динамическими связями

$$Y^{(M)} \cdot \mathbf{A}^{[N]} = 0$$

приводит к нелинейной модели безмоментного континуума в формулировке, не ограниченной условием малости локальных поворотов и тем самым обобщающей формулировку Био [2].

Итак, предложенный способ построения нелинейных моделей деформируемых сред дает единую кинематическую основу для моментных и безмоментных сред, выраженную притом в наиболее простой (векторной) форме.

Поступила 28 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тупин Р. А.** Теории упругости, учитывающие моментные напряжения.— Сб. пер. Механика, 1965, № 3 (91).
2. **Biot M. A.** Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress.— Philos. mag., ser. 7, 1939, vol. 27, N 183.
3. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
4. **Новацкий В.** Теория упругости. М., Мир, 1975.
5. **Койтер В. Т.** Моментные напряжения в теории упругости.— Сб. пер. Механика, 1965, № 3 (91).