

*И. С. Белоцерковец, В. И. Тимошенко*

## ВЛИЯНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ВЯЗКО-НЕВЯЗКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДО- И СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ СО СВЕРХ- И ДОЗВУКОВЫМ СПУТНЫМ ПОТОКОМ В КАНАЛЕ И ТРУБЕ

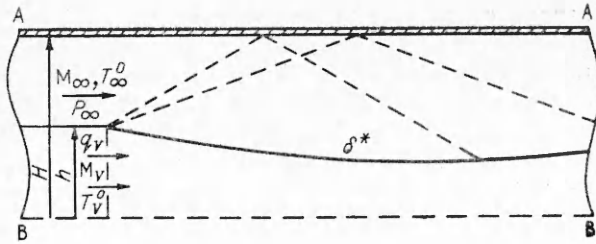
Исследование взаимодействия до- и сверхзвуковых струй со спутным сверх- и дозвуковым потоком в каналах и трубах имеет большой практический интерес, особенно в связи с процессами турбулентного смешения и взаимодействия через давление. Наиболее полной математической моделью таких течений является модель, основанная на уравнениях Навье — Стокса, дополненных уравнениями, описывающими турбулентный перенос. Однако численное решение уравнений Навье — Стокса требует значительных затрат машинного времени [1] и представляет определенные методические трудности в области больших чисел Рейнольдса [2]. Сложность ситуации усугубляется при исследовании турбулентных течений. Это вызвано, с одной стороны, необходимостью привлечения эмпирической информации для замыкания существующих теорий турбулентности [3], с другой, — дальнейшим усложнением системы дифференциальных уравнений, описывающих осредненные турбулентные течения и их микроструктуру [4]. Поэтому в практических расчетах применяются упрощенные подходы, основанные на численном решении маршевыми, конечно-разностными методами параболизированных уравнений Навье — Стокса [2, 5]. Так как область эффективного использования параболизированных уравнений Навье — Стокса ограничена в основном сверхзвуковыми течениями, для расчета вдува дозвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток широкое приложение получили уравнения пограничного слоя. Они являются уравнениями параболического типа и допускают решения маршевыми конечно-разностными методами как для сверх-, так и для дозвуковых течений. Наиболее эффективно уравнения пограничного слоя используются для расчета до- и сверхзвуковых струй в спутном сверхзвуковом потоке в трубах и каналах [6, 7], распределение давления в которых находится исходя из условия сохранения массы. Такой подход позволяет получить хорошее приближенное решение задачи в случае, когда волновыми процессами в невязком сверхзвуковом потоке можно пренебречь (например, при малых нерасчетных режимах истечения сверхзвуковой струи или при истечении дозвуковой струи большой интенсивности, когда давление на срезе сопла близко к давлению в спутном потоке).

При вдуве до- и сверхзвуковой струи в спутный сверх- и дозвуковой поток в канале или трубе, большая часть которых занята сверхзвуковым течением, полное решение задачи требует детального расчета взаимодействия через давление вдуваемой струи с внешним потоком. В этом случае эффективной оказывается модель, использующая уравнения пограничного слоя для описания течения в дозвуковой струе или потоке и уравнения невязкого течения (уравнения Эйлера) для сверхзвукового внешнего потока или вдуваемой струи. Составная часть этой модели — соотношения, описывающие вязко-невязкое взаимодействие и вытекающие из асимптотического сращения решений дифференциальных уравнений. Методология решения таких задач развита в [8—10]. В настоящей работе на основе данной методологии исследуются влияние волновых процессов в невязком потоке на характеристики течения в вязкой области при взаимодействии до- и сверхзвуковой струи со спутным сверх- и дозвуковым потоком в канале и трубе.

1. Рассматривается двумерное течение в канале или трубе при взаимодействии до- или сверхзвуковой вдуваемой струи с внешним сверх- или дозвуковым потоком. Газ в потоке и струе принимается однородным по составу и калорически и термически совершенным. В общем случае температуры торможения в потоках могут быть различными. Схема истечения дозвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток в канале представлена на рис. 1. Расчет течения проводится в рамках модели вязко-невязкого взаимодействия, ранее примененной при исследовании струйных течений в задачах внешней аэрогазодинамики [8—10]. Согласно данной модели, течение условно разбивается на невязкий поток, обтекающий эффективное тело вытеснения, и вязкое течение в зоне смешения струи со спутным потоком, описываемое в приближении пограничного слоя. Характеристики невязкого течения в начальном сечении, соответствующие сечению среза сопла, полагаются известными, а значения газодинами-

ческих параметров вниз по потоку находятся в результате численного интегрирования уравнений Эйлера.

В отличие от классической теории пограничного слоя Прандтля, в которой распределение давления вдоль области вязкого течения равно



Р и с. 1

местному давлению невязкого потока, при расчете струйных и отрывных течений в рамках модели вязко-невязкого взаимодействия необходимо уже в первом приближении учитывать влияние индуцированного вязкостью градиента давления на характеристики невязкого течения. Согласно значению градиента давления определяется при совместном расчете вязкого и невязкого течений из дополнительных уравнений — условий вязко-невязкого взаимодействия [8—10]. Эти условия представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для давления в вязкой области и границы эффективного тела вытеснения. Согласно [8, 9], в цилиндрической системе координат для двумерных течений они записываются в виде

$$(1.1) \quad \left[ \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{a^2}{u^2}\right) y^j dy - \int_{\delta^*}^{\delta} \left(1 - \frac{a_e^2}{u_e^2}\right) y^j dy \right] \frac{1}{\gamma P_e} \frac{dP_e}{dx} - \delta^{*j} \frac{d\delta^*}{dx} = \\ = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_e} \int_0^{\delta} \frac{1}{u^2} \left( u \frac{\partial Q}{\partial y} - h \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) dy;$$

$$(1.2) \quad q \frac{dP_e}{dx} - \rho_e u_e^2 \frac{dq}{dx} = \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=\delta^*} (1 + q^2);$$

$$(1.3) \quad d\delta^*/dx = q,$$

где  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{\rho v_t}{Pr_t} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + y^j \rho v_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ ;  $\tau = y^j \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y}$ ;

$v_t$  — турбулентная вязкость;  $\delta(x)$ ,  $\delta^*(x)$  — условная граница вязкой области и граница эффективного тела вытеснения;  $j = 0$  отвечает плоскому течению,  $j = 1$  — осесимметричному. Индексом  $e$  отмечены значения параметров в невязком потоке. Остальные обозначения общеприняты в литературе. Наличие в (1.1) интеграла, вычисляемого по параметрам невязкого потока, позволяет в приближенной постановке учесть влияние завихренности невязкого потока на течение взаимодействия.

Решение задачи о до- и сверхзвуковом вдуве в спутный сверх- и дозвуковой поток в канале в приближенной постановке в рамках модели вязко-невязкого взаимодействия сводится к совместному интегрированию уравнений Эйлера, пограничного слоя и условий (1.1)—(1.3). При сверхзвуковом течении в невязкой области уравнения Эйлера имеют гиперболический тип, причем роль маршевой координаты играет продольная координата  $x$ , уравнения пограничного слоя — параболический. Следовательно, для расчета рассматриваемых течений может быть сформулирована задача Коши. Однако корректность этой задачи по начальным данным зависит от структуры потока в области вязкого течения. Так как для течений с возвратно-циркуляционными зонами задача Коши для уравнений пограничного слоя не корректна, то в настоящей работе исследовались только течения с прямоточным профилем продольной скорости.

В задачах вязко-невязкого взаимодействия при сращивании решений в соответствующих подобластях возникает механизм передачи информации вверх по потоку. Дело в том, что краевой характер математической

задачи с неизвестной заранее границей (поверхностью эффективного тела вытеснения) может придать решению «эллиптические» свойства. В данной постановке этот механизм проявляется через наличие особой точки типа седло для системы условий (1.1)—(1.3), а физически реализуемому течению отвечает особое решение системы данных уравнений. В силу непрерывной зависимости решения системы (1.1)—(1.3) от начальных данных неизвестное значение статического давления в начальном сечении соответствует особому решению.

Для каждой интегральной кривой (в том числе и особой) в областях вязкого и невязкого течений приходится интегрировать уравнения газовой динамики и пограничного слоя. Поэтому эффективность применения маршевых схем в задачах вязкого взаимодействия существенно зависит от способа сращения решений. В отличие от метода глобальных итераций, требующего многократного последовательного расчета поля течения в соответствующих областях, использование системы (1.1)—(1.3) позволяет построить маршевый алгоритм расчета, суть которого в следующем. При совместном интегрировании уравнений Эйлера, пограничного слоя и условий (1.1)—(1.3) производная  $\partial P/\partial y$ , входящая в эти условия, аппроксимируется со вторым порядком точности односторонними разностями с применением значений давления в двух соседних с границей точках и в точке, принадлежащей границе. Так как в явной конечно-разностной схеме значения газодинамических параметров в точках, не лежащих на границе в сечении  $x_{n+1}$ , могут быть найдены по значениям параметров в сечении  $x_n$  независимо от условий на граничной поверхности, то при переходе от  $x_n$  к  $x_{n+1}$  параметры во внутренних точках невязкого течения находятся независимо от условий вязко-невязкого взаимодействия. Координата тела вытеснения  $\delta^*$  и величина давления  $P_e$  на ней в сечении  $x_{n+1}$  определяются в первом приближении из (1.1)—(1.3) при значениях коэффициентов, рассчитанных по параметрам течения в вязкой области в сечении  $x_n$ . Последующее уточнение  $P_e$  и  $\delta^*$  в сечении  $x_{n+1}$  происходит в итерационном процессе и связано с нелинейностью уравнений пограничного слоя. Кроме указанных итераций, необходимо проводить глобальные итерации с целью подбора давления в начальном сечении, надлежащий выбор которого позволяет пройти особую точку условий (1.1)—(1.3) и тем самым построить единственное решение.

2. Рассмотрим задачу о расчете течения в ближнем следе за телом при истечении дозвуковой струи в спутный безграничный сверхзвуковой поток. Параметры течения невязкого потока определялись в результате интегрирования уравнений газовой динамики по конечно-разностной схеме Мак-Кормака [11] на основе разработанного комплекса программ [12]. Как и в [10], уравнения пограничного слоя интегрировались по неявной конечно-разностной схеме в нормированных переменных Мизеса. Применялись алгебраическая и дифференциальная модели турбулентности. В качестве алгебраической модели выбрана модель Прандтля [13]

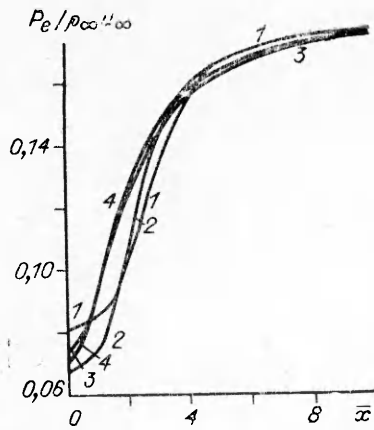
$$(2.1) \quad v_t = \kappa |u_{\max} - u_{\min}| \delta$$

(коэффициент пропорциональности  $\kappa = 0,27$  на начальном участке струи и  $0,22$  на основном участке). В качестве дифференциальной модели турбулентности взята однопараметрическая модель для турбулентной вязкости, получившая широкое распространение [6, 7]:

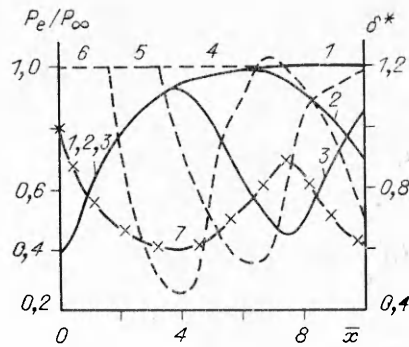
$$(2.2) \quad \rho u \frac{\partial v_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v_t}{\partial y} = \beta_0 f(M) \rho v_t \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + \xi v_t \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{\rho v_t}{Pr_{v_t}} \frac{\partial v_t}{\partial y} \right),$$

где  $\beta_0$ ,  $\xi$ ,  $Pr_{v_t}$  — эмпирические постоянные ( $\beta_0 = 0,2$ ,  $\xi = 2/3$ ,  $Pr_{v_t} = 0,5$ ), а для функции  $f(M)$  используется аппроксимация

$$f(M) = \begin{cases} 1 & \text{при } M \leq 1, \\ 1/M & \text{при } M > 1. \end{cases}$$



Р и с. 2



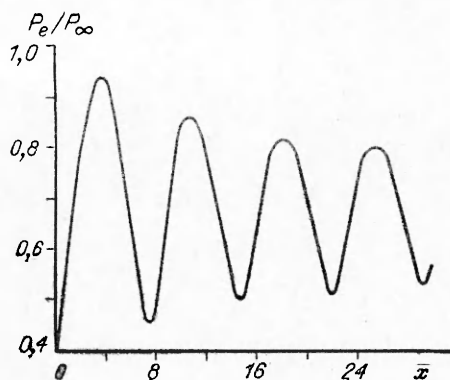
Р и с. 3

Распределение статического давления по оси плоского симметричного следа представлено на рис. 2. Кривые 1 и 2 отвечают дифференциальной (2.2) и алгебраической (2.1) моделям турбулентности, 3 — течению с постоянной турбулентной вязкостью  $\bar{\nu}_t = \nu_t / (hu_\infty) = 0,01$ , 4 — расчету ламинарного следа при характерном числе Рейнольдса  $Re = \rho_\infty u_\infty h / \mu_\infty = 100$  и степенной зависимости вязкости от температуры с показателем степени  $\omega = 0,5$ . Здесь  $h$  — ширина донного среза,  $u_\infty$  — скорость невозмущенного внешнего потока. Как видно из сопоставления кривых, модели турбулентности оказывают влияние на величину давления в начальном сечении и слабо влияют на распределение давления вниз по потоку за сечением запираания. Поэтому приведенные ниже результаты найдены с использованием алгебраической модели турбулентности как наиболее простой.

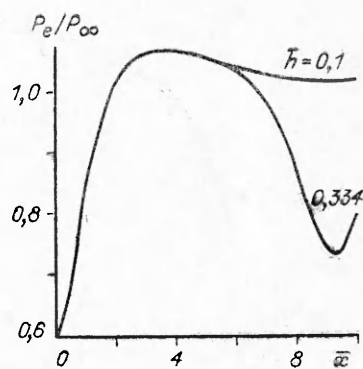
Отличительная особенность задачи о дозвуковом вдуве в слутный сверхзвуковой поток в канале или трубе — постановка граничных условий непротекания на ограничивающей расчетную область поверхности АА. Это соответствует задаче об истечении блока плоских одинаковых дозвуковых струй в слутный равномерный сверхзвуковой поток, когда поверхность АА, как и плоскость ВВ, является плоскостью симметрии течения. Результаты, полученные в этом случае, могут быть интерпретированы как результаты расчета истечения дозвуковой струи в слутный сверхзвуковой поток в канале или трубе, когда трение на стенках не учитывается. Как показано в [7], это допущение слабо влияет на давление.

Распределение статического давления по оси канала при различных значениях относительной высоты донного уступа в случае плоского течения представлено на рис. 3 (кривые 1—3 —  $\bar{h} = 0,1; 0,334; 0,5$  ( $\bar{h} = h/H$ )). Расчеты выполнены при следующих определяющих параметрах: числе Маха невозмущенного внешнего потока  $M_\infty = 2$ , относительной интенсивности вдува дозвуковой струи  $\bar{q}_v = \rho_v u_v / \rho_\infty u_\infty = 0,05$  и одинаковых температурах торможения во внешнем потоке и струе. На рис. 3 штриховыми линиями нанесены распределения давления на стенке канала (кривые 4—6 соответственно) и граница эффективного тела вытеснения (7). По пикам давления на характерных линиях течения можно судить о положении и интенсивности скачков уплотнения и волн разрежения, сформировавшихся в поле невязкого течения. Сравнение результатов расчетов показывает, насколько существенное влияние оказывает наличие стенки на волновую структуру течения. Чем больше величина  $\bar{h}$ , тем быстрее волновая структура невязкого потока сказывается на параметрах течения в вязкой области.

На рис. 4 при прежних определяющих параметрах приведено расчетное распределение статического давления в вязкой области в канале



Р и с. 4



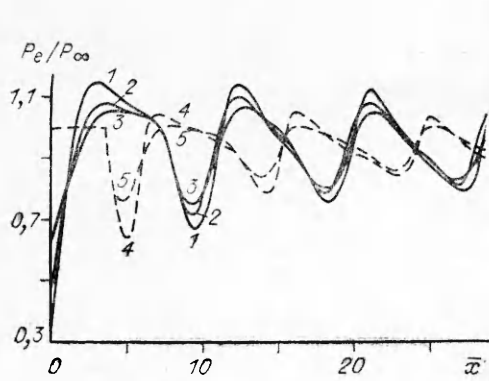
Р и с. 5

при  $\bar{h} = 0,5$  на достаточно большом расстоянии вниз по потоку. Прослеживается волнообразное периодическое поведение давления с затухающей вниз по потоку амплитудой.

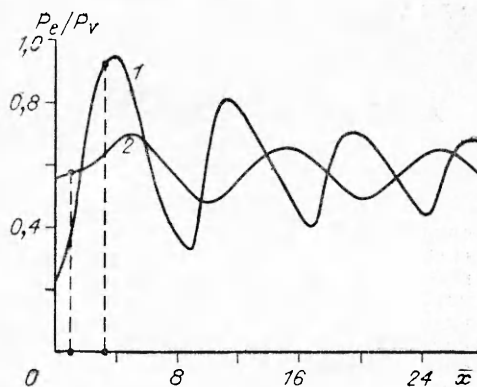
Результаты численного расчета распределения статического давления в вязкой области по оси трубы при двух значениях относительного радиуса сопла  $\bar{h} = 0,1; 0,334$  и  $\bar{q}_V = 0,1$  представлены на рис. 5. Осесимметричная картина течения в целом аналогична плоской. Однако имеются и некоторые особенности. Во-первых, градиенты давления в случае осесимметричного течения больше по величине, чем при плоском течении, во-вторых, максимальное статическое давление в вязкой области течения больше статического давления в невязком невозмущенном потоке.

На рис. 6 даны результаты расчетов, отражающие влияние интенсивности вдува. Цифрами 1—3 помечены кривые распределения статического давления по оси струи при  $\bar{q} = 0,05; 0,1; 0,15$  соответственно,  $\bar{h} = 0,334$  и прежних условиях. Распределение статического давления по стенке трубы при  $\bar{q} = 0,05$  и  $0,15$  показано кривыми 4 и 5. Видно вырождение волнового характера распределения давления с ростом  $\bar{h}$ . Это связано с увеличением донного давления  $P_g = P_e(0)$  и, как следствие, с уменьшением интенсивности волны разрежения на кромке сопла, порождающей волновой характер изменения давления вниз по потоку.

Рассмотрим задачу о взаимодействии сверхзвуковой струи со спутным дозвуковым потоком в канале. Как и в предыдущей задаче, параметры в дозвуковой области получаем исходя из уравнений пограничного слоя, а вдуваемая сверхзвуковая струя рассчитывается конечно-разностным методом с помощью уравнений Эйлера. Распределение давления в дозвуковом потоке выводится из условий вязко-невязкого взаимодействия (1.1)—(1.3). Параметры течения в недорасширенной струе определяются заданием статического давления  $P_V$ , температуры торможения  $T_V^0$ , числа Маха  $M_V$  на срезе сопла, а внешний равномерный дозвуковой поток — заданием удельного расхода  $q_\infty = \rho_\infty u_\infty$  и температуры торможения  $T_\infty^0$ . Неизвестное значение статического давления  $P_\infty$  во внешнем дозвуковом потоке находится в процессе решения задачи из условий прохождения через особую точку системы уравнений вязко-невязкого взаимодействия. На рис. 7 показано распределение статического давления вдоль стенки канала (влиянием трения, как и прежде, пренебрегалось) при  $M_V = 2$ ,  $\bar{q}_\infty = \rho_\infty u_\infty / \rho_V u_V = 0,05$ ,  $T_V^0 = T_\infty^0$ . Кривая 1 отвечает расчету при  $\bar{h} = 0,5$ , а 2 — расчету при  $\bar{h} = 0,25$ . Форма кривых давления аналогична соответствующим распределениям, приведенным на рис. 4 для задачи взаимодействия дозвуковой струи со спутным сверхзвуковым потоком. Наблюдается такое же волнообразное распределение давления с затухающей вниз по потоку амплитудой. С увеличением относительной высоты сопла амплитуда колебаний статического давления возрастает, а период колебаний уменьшается, что согласуется с волновой структурой течения



Р и с. 6



Р и с. 7

в сопряженной невязкой недорасширенной струе. На рис. 7 точками отмечены положения критических сечений в «горле» вязкой области. За этими сечениями вязкое течение в среднем становится сверхзвуковым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кокошинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
2. Тиреклий Г. А., Пейгин С. В. Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Итоги науки и техники/ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа.— 1988.— Т. 22.
3. Шец Дж. Турбулентное течение. Процессы вдува и перемешивания: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.
4. Луцник В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов // Итоги науки и техники/ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа.— 1988.— Т. 22.
5. Баев В. К., Головичев В. И., Третьяков П. К. и др. Горение в сверхзвуковом потоке.— Новосибирск: Наука, 1984.
6. Зимонт В. Л., Левин В. М., Мещеряков Е. А., Сабельников В. А. Особенности сверхзвукового горения перемешанных газов в каналах // ФГВ.— 1983.— № 4.
7. Мещеряков Е. А., Левин В. М., Сабельников В. А. Расчетное и экспериментальное исследование горения струи водорода в спутном сверхзвуковом потоке воздуха в канале // Тр. ЦАГИ.— 1983.— Вып. 2193.
8. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету характеристик течения при равномерном вдуве однородного газа в кормовой области тела // ПМТФ.— 1984.— № 1.
9. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа.— Киев: Наук. думка, 1987.
10. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету диффузионного горения дозвуковой струи в спутном сверхзвуковом потоке // ПМТФ.— 1988.— № 1.
11. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering.— N. Y., 1969.— (Pap./AIAA; N 69).
12. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И., Шеховцова В. А. Комплекс программ для расчета двумерных плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений.— Днепропетровск, 1984.— Деп. в ГФАИ 21.12.86, № 5087000642.
13. Теория турбулентных струй.— 2-е изд., испр. и доп./Под ред. Г. Н. Абрамовича.— М.: Наука, 1984.

г. Днепропетровск

Поступила 17/II 1989 г.