

УДК 539.3, 620.171.2

## СВЯЗАННАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ ПИСАРЕНКО — ЛЕБЕДЕВА

В. Г. Баженов, С. Л. Осетров, Д. Л. Осетров, А. А. Рябов\*

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, Россия

\* Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, 607188 Саров, Россия  
E-mails: bazhenov@mech.unn.ru, osetrop@mail.ru, osetrovdmitry@mail.ru, alex.ryabov@saec.ru

Предложена и реализована связанная модель разрушения для исследования процессов деформирования и разрушения упругопластических материалов. Для определения параметров модели разрушения построены истинные диаграммы деформирования вплоть до разрушения и определены предельные характеристики стали марок 12X18H10T и 10XCHD. Представлены результаты численного моделирования процесса разрушения цилиндрических стержней при растяжении. Установлено, что определенные в расчетах вид и характер разрушения при растяжении цилиндрических образцов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: истинная диаграмма деформирования, связанная модель разрушения, критерий прочности, кинетическое уравнение накопления повреждений.

DOI: 10.15372/PMTF20220116

**Введение.** Изучение процессов разрушения упругопластических элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках является наиболее сложной задачей механики деформируемого твердого тела. Это обусловлено тем, что разрушение является финальной стадией деформирования и при его анализе необходимо учитывать деформационные свойства материала, изменяющиеся в процессе деформирования элементов конструкции. Согласно экспериментальным данным на разрушение конструкционных материалов при квазистатическом и динамическом нагружении, помимо деформационных свойств, существенное влияние оказывают вид напряженно-деформированного состояния и история его изменения. Из анализа работ [1–3], в которых моделировались процессы разрушения, следует, что в настоящее время не существует универсального подхода или модели, описывающей процессы разрушения. Отсутствуют рекомендации о границах области применимости моделей разрушения, поэтому для решения практических задач необходимо

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-08-00667).

проведение исследования применимости моделей разрушения на основе экспериментально-теоретических исследований.

Основные подходы к исследованию прочности упругопластических конструкций и моделированию процессов разрушения основаны на использовании критериев прочности либо кинетических моделей накопления повреждений с учетом влияния вида напряженно-деформированного состояния.

Первый подход основан на использовании критериев прочности, определяющих поверхность или скалярную величину, при достижении которой происходит локальное разрушение элемента конструкции. Известно более 200 критериев прочности материалов [4–12], в том числе деформационные, силовые, энергетические и комбинированные. Деформационные критерии основаны на деформациях и инвариантах тензора деформаций, силовые — на напряжениях и инвариантах тензора напряжений, энергетические — на внутренней энергии, комбинированные — на сочетании указанных параметров. Использование конкретного критерия в значительной мере зависит от вида материала (пластичный или хрупкий), типа нагружения (квазистатическое или динамическое, стационарное или нестационарное) и типа разрушения (откол, отрыв, сдвиг, фазовые переходы, трещинообразование, множественное разрушение и пр.). Критерии различаются по количеству используемых параметров, которые учитывают влияние вида напряженно-деформированного состояния на прочность материала. С точки зрения применимости более предпочтительны двух- или трехпараметрические критерии, которые позволяют определять разрушение для различных видов материала, типов нагружения и разрушения. Использование большего количества параметров является трудозатратным при верификации и экспериментальном определении констант.

Второй подход основан на использовании кинетического уравнения накопления повреждений, с помощью которого оценивается степень деструктивных изменений в материале при образовании микроповреждений и микротрещин в процессе деформирования. Кинетическое уравнение накопления повреждений [3, 8, 9, 13] является зависимостью, основанной на линейном или нелинейном суммировании параметра поврежденности в процессе деформирования с учетом вида напряженно-деформированного состояния. Обычно параметр поврежденности задается в виде скалярной или тензорной величины, которая определяет степень поврежденности материала. В качестве скалярного параметра поврежденности используются эквивалентные напряжения, интенсивность тензора напряжений или деформаций, параметр Оджвиста, внутренняя энергия и пр. Тензорный параметр поврежденности более адекватно описывает процесс разрушения при нестационарных процессах деформирования, но применение его при решении практических задач затруднительно вследствие невозможности проведения корректной верификации и экспериментов для определения необходимых параметров. На практике используются как связанные модели накопления повреждений [13], в которых учитывается влияние параметра поврежденности на характеристики материала или процесса деформирования, так и несвязанные модели, в которых указанная взаимосвязь отсутствует.

В данной работе развивается и реализуется подход к исследованию процессов разрушения при совместном использовании критерия прочности и кинетического уравнения накопления повреждений [3]. Этот подход является более предпочтительным при решении прикладных задач как с точки зрения его реализации, так и с точки зрения экспериментального определения материальных функций и констант. Преимущество подобного подхода к построению модели разрушения заключается в том, что при проведении моделирования возможно использование имеющейся информации о характеристиках материала, полученной в квазистатических экспериментах. Предлагается связанная модель разрушения на основе кинетического уравнения накопления повреждений в сочетании с критерием

прочности Писаренко — Лебедева. С использованием экспериментально-расчетного подхода построены истинные диаграммы деформирования вплоть до разрушения и определены предельные характеристики стали марок 12Х18Н10Т и 10ХСНД. Проводится численное моделирование процесса разрушения цилиндрических стержней при растяжении.

**1. Модель разрушения упругопластических материалов.** В предлагаемой модели разрушения в качестве кинетического уравнения накопления повреждений будем использовать линейное суммирование повреждений с учетом функции влияния [8, 12, 14–16]

$$\dot{\omega} = \dot{\lambda} / [\lambda^* f(\psi_\sigma, \varphi_\sigma, \dots)], \quad (1)$$

где  $\lambda$ ,  $\lambda^*$  — переменная, параметризующая процесс упругопластического деформирования, и ее предельное значение;  $f(\psi_\sigma, \varphi_\sigma, \dots)$  — безразмерная функция, характеризующая влияние вида напряженно-деформированного состояния на степень поврежденности материала;  $\psi_\sigma$  — коэффициент жесткости напряженного состояния;  $\varphi_\sigma$  — угол фазы девиатора напряжений.

В качестве параметра  $\lambda$  будем использовать параметр Одквиста  $\varkappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p} dt$  ( $\dot{e}_{ij}^p$  — тензор скоростей пластических деформаций). Соотношение (1) должно быть дополнено критерием разрушения  $\omega(\lambda) = 1$ , выражающим невозможность упругопластического деформирования материала.

Для определения предельного значения  $\varkappa^*$  с учетом влияния вида напряженно-деформированного состояния на степень поврежденности материала будем использовать критерий прочности типа Писаренко — Лебедева:

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 A^{1-\psi_\sigma} = \sigma_P. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений;  $\psi_\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sigma_i$ ;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $A < 1$  — параметр неоднородности материала;  $\chi = \sigma_P / \sigma_C$  — параметр, характеризующий степень хрупкости материала;  $\sigma_P, \sigma_C$  — пределы прочности на растяжение и сжатие. Первое слагаемое в (2) характеризует упругопластические свойства материала при разрушении, второе — хрупкие свойства. В работах [4–6], в которых проведен подробный анализ критерия прочности (2), отмечено, что этот критерий разрабатывался для описания предельных состояний квазихрупких материалов, но в дальнейшем использовался также для пластичных материалов. Широкий диапазон значений коэффициента  $\chi$  ( $0 < \chi < 1$ ) позволяет учитывать свойства материала и его разрушение преимущественно путем отрыва или сдвига. Предельные значения  $\chi = 1$  и  $\chi = 0$  соответствуют моделям идеально пластичных и идеально хрупких материалов.

Проведем преобразования критерия прочности и запишем выражение для максимального главного напряжения  $\sigma_1$  через инвариантные характеристики текущего напряженного состояния  $\varphi_\sigma, \psi_\sigma$  следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma_i (2 \cos(\varphi_\sigma) + \psi_\sigma) / 3. \quad (3)$$

С учетом соотношения (3) критерий прочности (2) представим в виде

$$\sigma_i (3\chi + (1 - \chi)(2 \cos(\varphi_\sigma) + \psi_\sigma) A^{1-\psi_\sigma}) / 3 = \sigma_P.$$

Отсюда, зная истинную диаграмму деформирования и предельное значение напряжений при разрушении, путем обратного преобразования можно найти предельное значение параметра Одквиста для различных видов напряженно-деформированного состояния.

Связанная модель разрушения обычно реализуется с учетом влияния параметра поврежденности  $\omega$  на свойства материала. Зависимость предела текучести, упругих характеристик материала и диаграмм деформирования от параметра поврежденности обычно задается в виде степенной зависимости

$$\bar{K} = K(1 - \omega^n), \quad \bar{G} = G(1 - \omega^n), \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i(\varkappa)(1 - \omega^n),$$

где  $K, G$  — модуль объемного сжатия и модуль сдвига соответственно;  $\sigma_i(\varkappa)$  — истинная диаграмма деформирования; параметр  $n$  определяет скорость изменения свойств материала при увеличении параметра поврежденности.

В связанной модели связь между скоростью девиатора напряжений  $\dot{\sigma}'_{ij}$  и скоростью упругих составляющих девиатора деформаций  $\dot{e}'_{ij}$  определяется в виде

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij} + \frac{\dot{G}}{G}\sigma'_{ij}, \quad \dot{G} = \frac{dG}{d\omega}\dot{\omega},$$

а связь между скоростью шаровых составляющих напряжений  $\dot{\sigma}$  и деформаций  $\dot{e}$  — в виде

$$\dot{\sigma} = 3K\dot{e} + \frac{\dot{K}}{K}\sigma, \quad \dot{K} = \frac{dK}{d\omega}\dot{\omega}.$$

**2. Экспериментально-расчетный метод построения истинных диаграмм деформирования при растяжении.** Для определения параметров моделей разрушения необходимы истинные диаграммы деформирования материала вплоть до разрушения. Наиболее распространенным способом изучения свойств упругопластических материалов является эксперимент на растяжение. В работах [17–21] на основе экспериментально-расчетного подхода разработаны методики и алгоритмы исследования деформационных и прочностных свойств упругопластических материалов. В качестве необходимых экспериментальных данных при растяжении образца используются его начальная геометрическая модель и зависимость осевой силы от удлинения. Методика построения истинных диаграмм деформирования основана на итерационной процедуре корректировки зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности пластических деформаций  $\varkappa$  (параметр Одквиста). Необходимость корректировки диаграммы деформирования обусловлена различием зависимостей от удлинения осевых сил, полученных в эксперименте ( $F_3$ ) и расчете ( $F_p$ ). При одном и том же удлинении образца вычисляется отношение  $\beta = F_3/F_p$ , после чего определяется взаимосвязь максимальной интенсивности пластических деформаций  $\varkappa_{\max}$  и соответствующего удлинения. На основе полученных результатов проводится корректировка диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_i(\varkappa_{\max}) = \beta\sigma_i(\varkappa_{\max})$  до тех пор, пока зависимости от удлинения осевых сил, полученные в эксперименте и расчете, не будут совпадать с заданной точностью. В качестве начальной диаграммы деформирования может использоваться любая диаграмма для упрочняющегося материала. При этом скорость сходимости итерационной процедуры практически не зависит от начального приближения. Наиболее эффективным алгоритмом построения диаграмм деформирования является корректировка диаграммы на каждом этапе нагружения по мере растяжения образца.

В экспериментах использовались сплошные цилиндрические образцы, изготовленные из стали марок 12X18H10T и 10XCHД. Рабочая часть образцов имела следующие размеры: начальный радиус  $R_0 = 6$  мм, начальная длина для стали марки 12X18H10T  $L_0 = 40$  мм, для стали марки 10XCHД  $L_0 = 60$  мм. На рис. 1 сплошными линиями показаны экспериментальные условные диаграммы деформирования ( $q_y = \sigma_y/\sigma_T$ ,  $\sigma_y = F/S$  — условное напряжение,  $\sigma_T$  — предел текучести материала,  $F$  — осевое усилие на торце,  $S$  — начальная площадь поперечного сечения образца,  $\Delta L$  — перемещение торца в процессе нагружения). Для рассматриваемых марок стали получены следующие пределы текучести: для марки 12X18H10T  $\sigma_T = 273$  МПа, для марки 10XCHД  $\sigma_T = 457$  МПа.

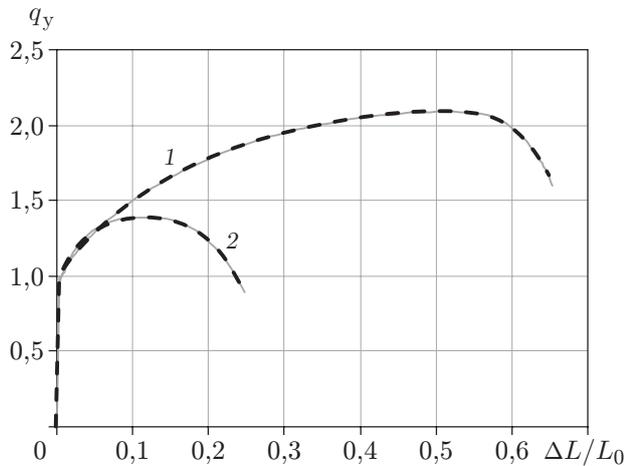


Рис. 1

Рис. 1. Условные диаграммы деформирования стали марок 12X18H10T (1) и 10XCHD (2), полученные в эксперименте (сплошные линии) и экспериментально-расчетным методом (штриховые линии)

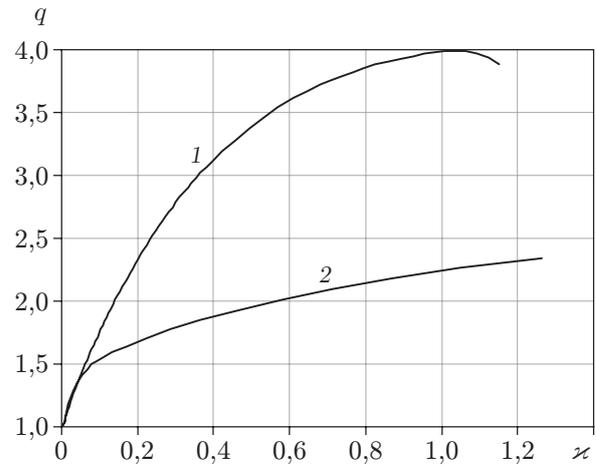


Рис. 2

Рис. 2. Истинные диаграммы деформирования стали марок 12X18H10T (1) и 10XCHD (2)

Численное решение квазистатических задач проводилось в динамической осесимметричной постановке с использованием программы LS-DYNA. Один торец образца жестко закреплялся, другой двигался с постоянной скоростью 1 м/с. Сначала численное решение задачи выполнялось с использованием начальной диаграммы деформирования. В предположении несжимаемости материала и равномерного деформирования рабочей части испытываемых образцов начальная диаграмма деформирования определялась по экспериментальной зависимости осевой силы  $F$  от удлинения:

$$\varepsilon = \ln \left( 1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right), \quad \sigma_i = \frac{F}{S} \left( 1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right).$$

С учетом различия значений осевых сил в эксперименте  $F_{\text{э}}$  и численном расчете  $F_{\text{р}}$  проводится итерационная процедура корректировки диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(\varepsilon)$  по формуле  $\bar{\sigma}_i = \beta \sigma_i$  до тех пор, пока экспериментальные и расчетные осевые силы не будут совпадать с погрешностью менее 1 % (см. рис. 1). Для сходимости итерационного процесса достаточно шести итераций. Полученные в процессе корректировки диаграммы деформирования представлены на рис. 2 ( $q = \sigma_i / \sigma_{\text{T}}$ ).

**3. Численное моделирование процесса разрушения цилиндрических стержней при растяжении.** Предложенная связанная модель разрушения реализована в виде пользовательской модели упругопластического материала с изотропным упрочнением для программы LS-DYNA. На основе полученных экспериментальных зависимостей (см. рис. 1) и диаграмм деформирования (см. рис. 2) можно определить предельные значения напряжений и параметра  $n$  для модели разрушения: для стали марки 12X18H10T  $\sigma_{\text{р}} = 1110$  МПа,  $n = 25$ , для стали марки 10XCHD  $\sigma_{\text{р}} = 1140$  МПа,  $n = 13$ . В качестве параметров модели разрушения можно принять рекомендуемые для данного класса материалов значения  $A = 0,9$ ,  $\chi = 0,9$ . В качестве истинной диаграммы деформирования стали марки 12X18H10T использовалась возрастающая кривая без ниспадающего участка (см. рис. 2). В этом случае участок падения на истинной диаграмме деформирования описывается связанной моделью накопления повреждений.

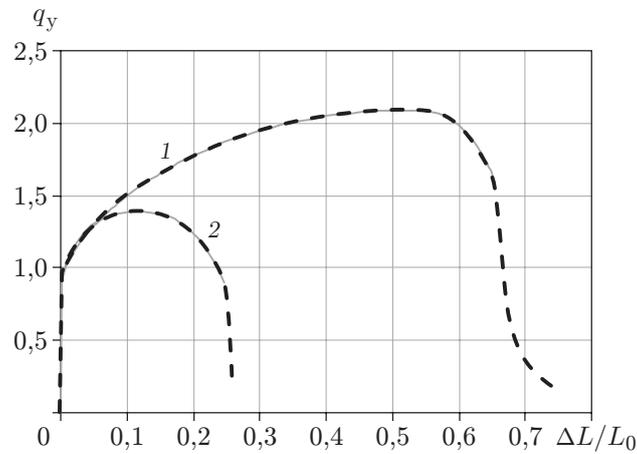


Рис. 3. Условные диаграммы деформирования стали марок 12X18H10T (1) и 10XCHD (2), полученные в эксперименте (сплошные линии) и численном расчете с использованием предлагаемой модели разрушения (штриховые линии)

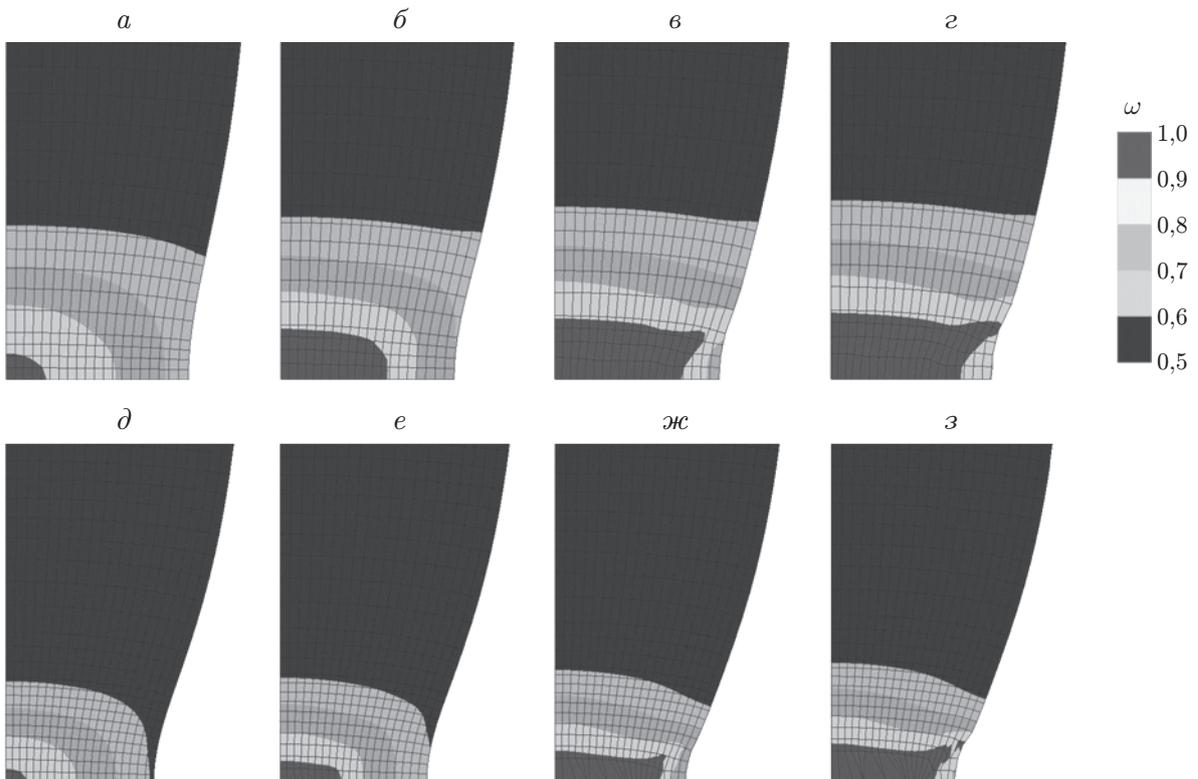


Рис. 4. Распределения параметра накопленного повреждения  $\omega$  после потери устойчивости пластического деформирования материала до момента разрушения образца:

$a-z$  — сталь марки 12X18H10T ( $a - \Delta L/L_0 = 0,651$ ,  $b - \Delta L/L_0 = 0,658$ ,  $в - \Delta L/L_0 = 0,665$ ,  $г - \Delta L/L_0 = 0,668$ ),  $д-з$  — сталь марки 10XCHD ( $д - \Delta L/L_0 = 0,2477$ ,  $е - \Delta L/L_0 = 0,249$ ,  $ж - \Delta L/L_0 = 0,256$ ,  $з - \Delta L/L_0 = 0,261$ )

На рис. 3 представлены результаты сравнения предложенной модели с экспериментальными зависимостями, на рис. 4 — распределения параметра накопленного повреждения  $\omega$  после потери устойчивости пластического деформирования материала (образования шейки) до момента разрушения образца.

Из результатов, представленных на рис. 4, следует, что предлагаемая модель разрушения достаточно точно описывает экспериментальные данные для рассматриваемых материалов. При растяжении стержня сначала разрушение происходит вблизи его оси путем отрыва, а затем распространяется в направлении свободной поверхности и трансформируется в сдвиговое разрушение. В результате форма полученной поверхности разрушения является чашеобразной, что согласуется с известными экспериментальными данными.

**Заключение.** В работе на основе предложенного ранее подхода (см. [3]) реализована связанная модель разрушения упругопластических материалов, в которой используются кинетическое уравнение накопления повреждений и двухпараметрический критерий прочности Писаренко — Лебедева. С помощью экспериментально-расчетного метода получены истинные диаграммы деформирования для стали марок 12X18H10T и 10XCHD и предельные значения характеристик материалов при разрушении. Применимость данной модели разрушения оценивалась на основе численного моделирования процессов растяжения и разрушения упругопластических стержней из стали марок 12X18H10T и 10XCHD. Установлено, что вид и характер разрушения в расчете и экспериментах хорошо согласуются. Таким образом, использование предложенного подхода при моделировании процессов разрушения упругопластических материалов и экспериментально-расчетного метода построения истинных диаграмм деформирования вплоть до разрушения позволяет более полно исследовать процессы деформирования и разрушения материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Волегов П. С., Грибов Д. С., Трусов П. В.** Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физ. мезомеханика. 2015. Т. 18, № 4. С. 68–86.
2. **Волков И. А.** Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И. А. Волков, Ю. Г. Коротких. М.: Физматлит, 2008.
3. **Садырин А. И.** Моделирование процессов динамического деформирования и разрушения конструкционных упругопластических материалов // Пробл. прочности и пластичности. 2012. Вып. 74. С. 28–39.
4. **Прочность** материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях / Под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1980. Т. 1.
5. **Прочность** материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях / Под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1980. Т. 2.
6. **Лебедев А. А.** Развитие теорий прочности в механике материалов // Пробл. прочности. 2010. № 5. С. 127–146.
7. **Гольденблат И. И.** Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Кошнов. М.: Машиностроение, 1968.
8. **Глушак Б. Л.** Разрушение деформируемых сред при импульсных нагрузках: Моногр. / Б. Л. Глушак, С. А. Новиков, А. И. Рузанов, А. И. Садырин. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 1992.
9. **Казаков Д. А.** Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций: Моногр. / Д. А. Казаков, С. А. Капустин, Ю. Г. Коротких. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 1999.

10. **Лебедев А. А.** Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справ. / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский. Киев: Издат. дом “Ин Юре”, 2003.
11. **Фридман Я. Б.** Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952.
12. **Lemaitre J.** Damage Mechanics. P.: Rhe Bath Press, 1990.
13. **Кукуджанов В. Н.** Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 6. С. 103–135.
14. **Чаусов Н. Г., Засимчук Е. Э., Маркашова Л. И. и др.** Особенности деформирования пластичных материалов при динамических неравновесных процессах // Завод. лаб. Диагностика материалов. 2009. Т. 75, № 6. С. 52–59.
15. **Леметр Ж.** Континуальная теория повреждения, используемая для расчета разрушения пластичных материалов // Теорет. основы инж. расчетов. 1985. Т. 108, № 1. С. 91–98.
16. **Лебедев А. А., Чаусов Н. Г., Богданович А. З.** Оценка предельных повреждений в материалах при статическом нагружении с учетом вида напряженного состояния // Пробл. прочности. 2002. № 2. С. 35–40.
17. **Пат. 2324162 РФ, МПК G 01 N 3/00 (2006.01).** Способ определения деформационных и прочностных свойств материалов при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии / В. Г. Баженов, С. В. Зефилов, Л. Н. Крамарев, С. Л. Осетров, Е. В. Павленкова. Оpubл. 10.05.2008, Бюл. № 13.
18. **Баженов В. Г., Зефилов С. В., Осетров С. Л.** Экспериментально-расчетный метод построения истинных диаграмм деформирования при больших деформациях на основе испытаний на твердость // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 2. С. 183–185.
19. **Баженов В. Г., Зефилов С. В., Осетров С. Л.** Экспериментально-расчетный метод идентификации деформационных и прочностных свойств материалов // Завод. лаб. Диагностика материалов. 2006. Т. 72, № 9. С. 39–45.
20. **Баженов В. Г., Зефилов С. В., Осетров С. Л.** Метод идентификации деформационных и прочностных свойств металлов и сплавов // Деформация и разрушение материалов. 2007. № 3. С. 43–48.
21. **Баженов В. Г., Ломунов В. К., Осетров С. Л., Павленкова Е. В.** Экспериментально-расчетный метод исследования больших упругопластических деформаций цилиндрических оболочек при растяжении до разрыва и построение диаграмм деформирования при неоднородном напряженно-деформированном состоянии // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 116–124.

*Поступила в редакцию 6/XI 2020 г.,  
после доработки — 28/XII 2020 г.  
Принята к публикации 29/III 2021 г.*