

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ, ПРОНИКАЮЩИХ В ГРУНТОВЫЕ СРЕДЫ

В. Л. Котов, Е. Ю. Линник, А. А. Тарасова

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия  
E-mails: vkotov@inbox.ru, ElenkaLinnik@gmail.com, annatarasova1989@mail.ru

Приведены результаты исследования форм осесимметричных тел с минимальным сопротивлением внедрению и максимальной глубиной проникания в пластические грунтовые среды. С использованием модифицированного метода локальных вариаций получены оптимальные формы тел вращения с заданными длиной и радиусом поперечного сечения, образующие которых представляются в виде отрезков прямых. Задача решается с использованием двучленной квадратичной модели локального взаимодействия, включающей инерционное и прочностное слагаемые, содержащие постоянное и кулоновское трение. Определены силы сопротивления и глубины внедрения конусов и полученных тел оптимальной формы при различных скоростях внедрения.

**Ключевые слова:** грунт, тело вращения, оптимизация, минимальное сопротивление внедрению, максимальная глубина проникания, модель локального взаимодействия, метод локальных вариаций, абсолютно оптимальное тело.

DOI: 10.15372/PMTF20160508

**Введение.** Исследование процессов взаимодействия жестких тел с потоком сопротивляющейся среды является сложной задачей, для решения которой совместно применяются экспериментальные и теоретические методы. В работах [1, 2] для описания волнового сопротивления и результатов аэродинамических испытаний на основе точных решений построены оптимальные формы тел, представляющих собой как тела вращения, так и тела со звездообразным миделем. Известные численно-аналитические методы определения контактных сил и глубин проникания ударников в плотные, в том числе грунтовые, среды основаны на гипотезе локального взаимодействия [3]. Модели локального взаимодействия используются при исследовании движения тел в грунтовых средах [4–7] и определении оптимальных форм проникающих тел [8–14]. Установлено, что существует большое количество пространственных конфигураций с одним и тем же минимальным сопротивлением, соответствующих абсолютно оптимальному телу, сопротивление которого при заданной площади основания не зависит от длины тела и определяется скоростью движения и характеристиками среды [8]. Согласно работам [1, 2] движущиеся в грунтовых средах абсолютно

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (код проекта 2014/134 2226), при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 6944.2016.8) и Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-08-00531\_а, 16-08-00825\_а, 16-38-60035-мол\_а\_дк).

© Котов В. Л., Линник Е. Ю., Тарасова А. А., 2016

оптимальные тела могут иметь звездообразное поперечное сечение, частным случаем таких тел является круговой конус. Применимость модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению в мягкий грунт острых конических тел показана экспериментально и теоретически [7, 14]. В то же время в экспериментах, в которых исследовалось проникание в глинистый и песчаный грунты, преимущество звездообразных тел по сравнению с коническими не установлено [15]. Также известно, что при длине тела, меньшей длины абсолютно оптимального конуса, оптимальные тела вращения могут содержать передний торец [10, 12, 13]. С увеличением радиуса торца увеличивается погрешность расчетов по модели локального взаимодействия, что оказывает влияние на силовые характеристики и форму оптимальных затупленных тел [14]. Таким образом, в отличие от задач газовой динамики [1] для решения задачи построения осесимметричных форм с минимальным сопротивлением внедрению и максимальной глубиной проникания в пластические грунтовые среды необходимо провести дополнительные исследования.

**1. Постановка задачи и методика численного решения.** Рассмотрим процесс проникания ударника длиной  $L$  с радиусом миделя  $R$ . В пренебрежении стадией внедрения головной части ударника обтекание ее грунтом будем полагать безотрывным. Введем цилиндрическую систему координат  $rOz$  ( $Oz$  — ось симметрии с началом отсчета в вершине тела — центре окружности радиусом  $r_0 \leq R$ ), образующая тела описывается выпуклой кривой  $r(z)$ .

Выражение для полного осевого сопротивления  $F$  тела с торцом радиусом  $r_0$  имеет вид

$$F = \sigma_0 \pi r_0^2 + \pi \int_{r_0}^R \sigma_n dr^2 + \pi \int_{r_0}^R \sigma_\tau \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} dr^2, \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{r'}{\sqrt{1 + (r')^2}}, \quad r' \equiv \frac{dr(z)}{dz}.$$

Первое слагаемое в (1) — сила, действующая на передний плоский торец тела, второе и третье слагаемые — равнодействующие нормальных и касательных напряжений, приложенных к боковой поверхности тела, соответственно.

Напряжения на поверхности тела, проникающего со скоростью  $V_0$ , описываются квадратичной моделью локального взаимодействия

$$\sigma_n = A_1 V_0^2 \alpha^2 + C_1, \quad \sigma_0 = A_1 V_0^2 + C_1, \quad \sigma_\tau = k_f \sigma_n + C_2, \quad (2)$$

где постоянные  $A_1, C_1$  зависят от инерционных сил и прочности грунта;  $k_f$  — константа в законе Кулона;  $C_2$  — прочность грунта на сдвиг. Подобная модель применялась при описании глинистого грунта или пластилина [4–6, 10], ее двучленная форма была предложена для песчаного грунта [16]. В [9, 12] рассматривались также более общие модели.

Глубина проникания тела массой  $m$  при начальной скорости  $V_0$  определяется из решения задачи Коши

$$-mV \frac{dV}{dS} = F(r), \quad S(V_0) = 0.$$

Рассмотрим следующие две задачи оптимизации: 1) определение выпуклой кривой  $r(z)$ , для которой полное сопротивление (1) имеет минимум; 2) определение формы тела вращения, обеспечивающей максимальную глубину проникания:

$$F(r) \rightarrow \min, \quad S(r) = m \int_0^{V_0} \frac{V dV}{F(r)} \rightarrow \max, \quad r(0) = r_0, \quad r(L) = R.$$

Для получения приближенного решения этих задач представим образующую искомого оптимального тела в виде ломаной с координатами  $r_i = r(z_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  аналогично работам [9, 13, 17]. С учетом (2) выражение для силы сопротивления внедрению такого тела имеет вид

$$F = F_0 + \sum_1^N F_i, \quad F_0 = \pi(A_1 V^2 + C_1) r_0^2, \quad i = \overline{1, N},$$

$$F_i = \pi \left( (A_1 V^2 \alpha_i^2 + C_1) (1 + \tilde{k}_f) + \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i} C_2 \right) (r_i^2 - r_{i-1}^2), \quad \tilde{k}_f = k_f \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i}, \quad (3)$$

где  $z_i$  — координаты точек, равномерно распределенных по длине тела с шагом  $\Delta z_i$ ,  $\alpha_i = \Delta r_i / \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2}$ ,  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $r_N = R$ .

Для получения решения второй задачи выражение (3) для силы сопротивления запишем в следующем виде:

$$F = AV^2 + C, \quad A = \pi A_1 r_0^2 + \pi A_1 \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (1 + \tilde{k}_f) (r_i^2 - r_{i-1}^2),$$

$$C = \pi C_1 r_0^2 + \pi (1 + \tilde{k}_f) C_1 \sum_{i=1}^N (r_i^2 - r_{i-1}^2) + \pi C_2 \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i} (r_i^2 - r_{i-1}^2).$$

Тогда глубина проникания тела вращения до его полной остановки равна

$$S = \frac{m}{2A} \ln \left( \frac{A}{C} V_0^2 + 1 \right). \quad (4)$$

Для того чтобы получить приближенное решение на основе известного метода локальных вариаций, необходимо свести исходную задачу к задаче безусловной оптимизации — нахождению определяющего кусочно-линейную образующую тела вращения набора координат  $(r_0, \dots, r_{N-1})$ , при которых величина  $D(r_0, \dots, r_{N-1})$ , представляющая собой интегральную силу сопротивления внедрению  $F$  (3) или глубину проникания  $S$  (4), взятую с противоположным знаком, достигает минимума.

Для определения вектора неизвестных параметров  $\mathbf{r} = \{r_i\}$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , являющегося одним из локальных экстремумов, составляется система нелинейных уравнений [17]. Для решения системы применяется метод Ньютона, частные производные первого и второго порядка от величины  $D(r_0, \dots, r_{N-1})$  по координатам  $(r_0, \dots, r_{N-1})$  приближаются конечными разностями второго порядка аппроксимации. Модифицированный таким образом алгоритм [17] позволяет единообразно проводить вычисления, представляя образующую в виде отрезков прямых, для определения формы тела вращения с минимальным сопротивлением внедрению при постоянной скорости  $V_0$  и максимальной глубиной проникания при заданной начальной скорости.

**2. Результаты анализа форм оптимальных тел.** Рассмотрим процесс проникания ударников в пластичный грунт (глину или пластилин) с начальной плотностью  $\rho_0 = 2 \text{ г/см}^3$  и прочностью на сдвиг  $\tau = 1 \text{ МПа}$ . Для этого грунта определены следующие значения коэффициентов в модели локального взаимодействия (2):  $A_1 = \rho_0$ ,  $C_1 = 10C_2 = 10\tau$ ,  $k_f = 0$  [6]. Относительное удлинение ударника равно  $l = L/R = \sqrt{5}$  (квадрат синуса полуугла раствора  $\alpha^2 = 1/6$ ).

Определим критические скорости проникания, при которых отсутствует передний плоский торец оптимального тела, а конус с заданными длиной и миделем поперечного

сечения является абсолютно оптимальным телом [11]. Для силы сопротивления, действующей на конус, при заданных параметрах среды из (3) следует выражение

$$F = \pi \left( A_1 V^2 \alpha^2 + C_1 + \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} C_2 \right) R^2. \quad (5)$$

Решая уравнение  $F'(\alpha) = 0$ , где штрих обозначает дифференцирование по  $\alpha$ , получаем выражение для квадрата критической скорости  $V_F^2$ :

$$V_F^2 = \frac{C_2}{2A_1\alpha^3\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (6)$$

Следует отметить, что критическая скорость (6) не зависит от величины  $C_1$ . При скоростях проникания, больших  $V_F$ , длина абсолютно оптимального конуса увеличивается (угол раствора уменьшается), а у оптимального тела заданной длины  $L = \sqrt{5}R$  появляется передний торец. При малых углах раствора конуса в приближении тонкого тела ( $\alpha^2 \ll 1$ ) в [11] получено выражение  $V^2 \approx C_2/(2A_1\alpha^3)$ . При  $\alpha^2 = 1/6$  значение  $V^2$ , вычисленное по этому выражению, отличается от значения  $V_F^2$ , вычисленного по формуле (6), не более чем на 5%.

Выражение для конечной глубины проникания конуса с единичными массой и площадью основания следует из (4):

$$S = \frac{1}{2A_1\alpha^2} \ln \left( \frac{A_1\alpha^2 V_0^2}{C_1 + C_2\sqrt{1 - \alpha^2}/\alpha} + 1 \right).$$

Положим для упрощения  $C_1 = 0$ ,  $\alpha^2 \ll 1$ , тогда

$$S \approx \frac{1}{2A_1\alpha^2} \ln \left( \frac{A_1\alpha^3 V_0^2}{C_2} + 1 \right).$$

Запишем уравнение  $S'(\alpha) = 0$ :

$$\frac{3}{2} \frac{X}{X + 1} - \ln(X + 1) = 0. \quad (7)$$

Здесь  $X = A_1\alpha^3 V^2 / C_2$ . Решение уравнения (7) выражается через значение функции Ламберта  $W$ :

$$X = \exp \left( W \left( -\frac{3}{2} e^{-3/2} \right) + \frac{3}{2} \right) - 1 \approx 1,396\,998\,827. \quad (8)$$

В задаче, в которой целевой функцией является глубина проникания, для критической скорости получаем приближенное выражение

$$V_S^2 \approx \frac{XC_2}{A_1\alpha^3}, \quad (9)$$

где  $X$  определяется в соответствии с (8). В отличие от (6) в общем случае величина  $V_S$  зависит от  $C_1$ . При выбранных параметрах среды и тела погрешность расчетов по формуле (9) составила приблизительно 7%. Таким образом, решение задачи определения оптимальной формы тела, имеющего заданные длину и радиус миделя поперечного сечения и проникающего на максимальную глубину, проводится только при скоростях, превышающих  $V_S$ .

Для задачи, в которой целевой функцией является сила сопротивления, критическая скорость равна  $V_F = 63,4$  м/с. В этом случае  $V_S = 99,7$  м/с. Для скоростей  $V < V_F$  или  $V < V_S$  абсолютно оптимальным телом является конус с большим углом раствора,

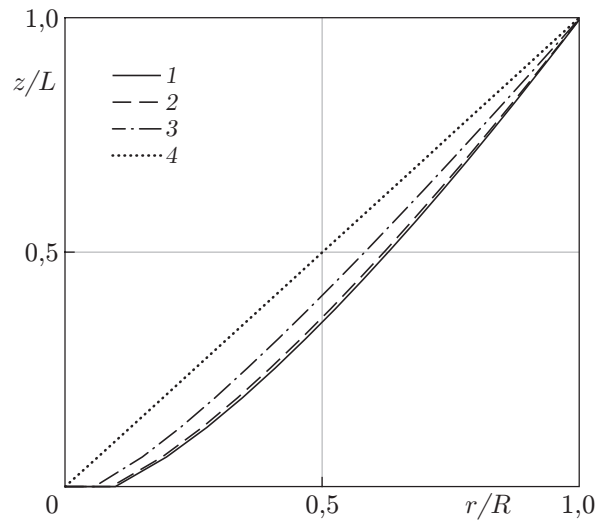


Рис. 1. Образующие оптимальных тел вращения с заданными длиной  $L$  и радиусом основания  $R$  при различных скоростях внедрения ударника:  
 1, 2 —  $V_0 = 400$  м/с, 3, 4 —  $V_0 = V_S$ ; 1, 3 — образующая тела вращения с минимальным сопротивлением внедрению, 2, 4 — образующая тела вращения с максимальной глубиной проникания

дополненный до заданной длины иглой с нулевой площадью сечения [10, 11], или тело с плоским торцом радиусом  $R$ .

При скорости, превышающей критическое значение, у оптимального тела появляется передний торец, радиус которого увеличивается до значения, приближенно равного  $R/10$ . На рис. 1 приведены образующие тел вращения с минимальным сопротивлением внедрению (кривая 1) и максимальной глубиной проникания (кривая 2) при скорости внедрения  $V_0 = 400$  м/с, кривые 3, 4 получены при  $V_0 = V_S$ . Заметим, что при значениях скорости, близких к критическому, формы образующих существенно различаются, при увеличении скорости это различие практически исчезает (кривые 1 и 2).

Таким образом, на примере пластической среды типа глинистого грунта или пластилина показано, что при больших скоростях внедрения глубина проникания тела с минимальной силой сопротивления внедрению близка к максимальной. Этот вывод справедлив и для других моделей грунтов, например для песчаного грунта, для которого существует разрыв силы сопротивления при некоторой критической скорости, приближенно равной 100 м/с [16].

Рассмотрим процесс проникания ударников в песчаный грунт с начальной плотностью  $\rho_0 = 1,6$  г/см<sup>3</sup>. Относительное удлинение ударника такое же, как и для глинистого грунта:  $l = L/R = \sqrt{5}$ . Слагаемые в выражении для силы сопротивления внедрению (3), действующей на тело с образующей, представляемой в виде отрезков прямых, имеют вид

$$F_0 = \pi(A_1 V^2 + C_1)r_0^2, \quad F_i = \pi(A_1 V^2 \alpha_i^2 + C_1)(1 + \tilde{k}_f)(r_i^2 - r_{i-1}^2), \quad V \leq V_k,$$

$$F_0 = \pi(A_2 V^2)r_0^2, \quad F_i = \pi(A_2 V^2 \alpha_i^2)(r_i^2 - r_{i-1}^2), \quad V > V_k.$$

Коэффициенты  $A$  и  $C$  в формуле для глубины проникания (4) равны

$$F = AV^2 + C, \quad A = \begin{cases} \pi A_1 r_0^2 + \pi A_1 \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (1 + \tilde{k}_f)(r_i^2 - r_{i-1}^2), & V \leq V_k, \\ \pi A_2 r_0^2 + \pi A_2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (r_i^2 - r_{i-1}^2), & V > V_k, \end{cases} \quad (10)$$

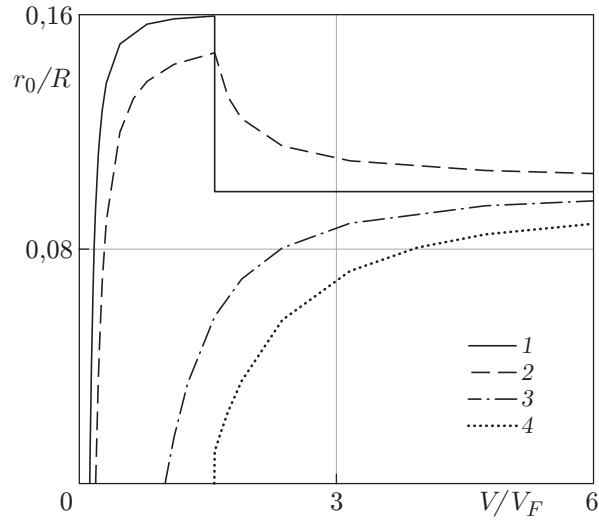


Рис. 2. Зависимость радиуса переднего торца от скорости проникания для оптимальных тел с заданными длиной  $L$  и радиусом основания  $R$  ( $V_F = 63,4$  м/с): 1, 2 — песчаный грунт при законе сопротивления (10), 3, 4 — глинистый грунт; 1, 3 — тело с минимальным сопротивлением внедрению, 2, 4 — тело с максимальной глубиной проникания

$$C = \begin{cases} \pi C_1 r_0^2 + \pi(1 + \tilde{k}_f) C_1 \sum_{i=1}^N (r_i^2 - r_{i-1}^2), & V \leq V_k, \\ 0, & V > V_k. \end{cases}$$

В [16] определены следующие значения коэффициентов:  $A_1 = 2A_2 = 2\rho_0$ ,  $C_1 = 0,1$  МПа,  $k_f = 0,3$ ,  $V_k = 100$  м/с.

Наиболее существенное различие форм тел с различными целевыми функциями оптимизации наблюдается в окрестности их вершин. На рис. 2 приведены безразмерные зависимости радиуса переднего торца оптимальных тел от скорости внедрения. При разрывном законе сопротивления радиус переднего торца тела с минимальным сопротивлением внедрению также меняется скачкообразно (кривая 1 на рис. 2), качественно и количественно близкая непрерывная зависимость радиуса переднего торца от скорости имеет место для тела с максимальной глубиной проникания (кривая 2).

**3. Анализ сил и глубин проникания оптимальных тел.** Введем следующие обозначения:  $F$ ,  $S$  — минимальное значение силы сопротивления внедрению и максимальная глубина проникания тела с заданными длиной и радиусом поперечного сечения,  $F_S$  — сила сопротивления внедрению тела с максимальной глубиной проникания,  $S_F$  — глубина проникания тела с минимальным сопротивлением внедрению.

Оценку сверху отношений  $F_S/F$  и  $S/S_F$  можно получить, полагая  $C_1 = 0$ ,  $V = V_S$  и используя в качестве оптимальных тел абсолютно оптимальные тела — конусы с углами раствора  $\alpha_S^3 \approx XC_2/(A_1V_S^2)$  и  $\alpha_F^3 \approx C_2/(2A_1V_S^2)$ .

Полагая  $\alpha^2 \ll 1$ , имеем

$$F = A_1 V_S^2 \alpha_F^2 + \frac{C_2}{\alpha_F} = \left( \frac{A_1 V_S^2 \alpha_F^3}{C_2} + 1 \right) \frac{C_2}{\alpha_F} = \frac{(0,5 + 1)C_2}{\alpha_F},$$

$$F_S = A_1 V_S^2 \alpha_S^2 + \frac{C_2}{\alpha_S} = \left( \frac{A_1 V_S^2 \alpha_S^3}{C_2} + 1 \right) \frac{C_2}{\alpha_S} = \frac{(X + 1)C_2}{\alpha_S}, \quad \frac{\alpha_S}{\alpha_F} = \left( \frac{X}{0,5} \right)^{1/3}.$$

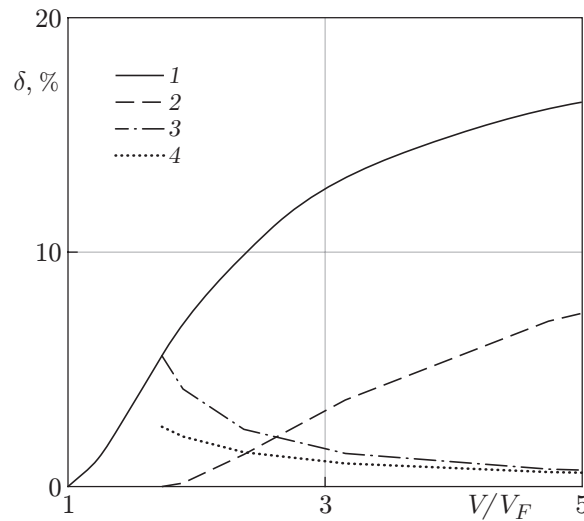


Рис. 3. Зависимости отношений  $\delta_{F_c} = 1 - F/F_c$  (1),  $\delta_{S_c} = S/S_c - 1$  (2),  $\delta_{F_S} = 1 - F/F_S$  (3),  $\delta_{S_F} = 1 - S_F/S$  (4) от скорости проникания

Тогда

$$\frac{F}{F_S} = \frac{0,5 + 1}{X + 1} \left( \frac{X}{0,5} \right)^{1/3} \approx 0,88, \quad \left( 1 - \frac{F}{F_S} \right) \cdot 100 \% \approx 12 \%. \quad (11)$$

Аналогично получаем

$$S = \frac{1}{2A_1\alpha_S^2} \ln \left( \frac{A_1V_S^2\alpha_S^3}{C_2} + 1 \right) = \frac{1}{2A_1\alpha_S^2} \ln(X + 1),$$

$$S_F = \frac{1}{2A_1\alpha_F^2} \ln \left( \frac{A_1V_S^2\alpha_F^3}{C_2} + 1 \right) = \frac{1}{2A_1\alpha_F^2} \ln(0,5 + 1), \quad (12)$$

$$\frac{S_F}{S} = \frac{\ln(0,5 + 1)}{\ln(X + 1)} \left( \frac{X}{0,5} \right)^{2/3} \approx 0,92, \quad \left( 1 - \frac{S_F}{S} \right) \cdot 100 \% \approx 8 \%.$$

При  $C_1 > 0$  оценки (11), (12) уменьшаются. Следует отметить, что оценка силы сопротивления абсолютно оптимальных тел (10) не зависит от скорости движения.

На рис. 3 кривые 1, 2 соответствуют относительным величинам  $\delta_{F_c} = (1 - F/F_c) \cdot 100 \%$ ,  $\delta_{S_c} = (S/S_c - 1) \cdot 100 \%$  ( $S_c$ ,  $F_c$  — глубина проникания и сила сопротивления внедрению конуса), кривыми 3, 4 показаны зависимости отношений  $\delta_{F_S} = (1 - F/F_S) \cdot 100 \%$ ,  $\delta_{S_F} = (1 - S_F/S) \cdot 100 \%$  от скорости. Преимущества оптимальных затупленных тел вращения по сравнению с конусом, имеющим такие же длину и радиус поперечного сечения, проявляются при больших скоростях внедрения (значения  $\delta_{S_c}$  и  $\delta_{F_c}$  не превышают 10 и 20 % при заданных параметрах среды и тела). Результаты численных расчетов силы сопротивления движению, глубины проникания и форм оптимальных тел с торцом показывают, что оценки (11), (12) оказались завышенными приблизительно в два раза, максимальное значение погрешности получено при  $V = V_S$ , при  $V > V_S$  зависимости, соответствующие кривым 3 и 4, убывают. Также подтверждается вывод [11], что погрешность результатов расчетов при использовании тела минимального сопротивления в качестве оптимального тела максимальной глубины проникания не превышает 3 %.

Поскольку оценка (11) не зависит от скорости движения, глубина проникания конического ударника с переменным углом раствора, равным углу раствора абсолютно оптимального тела с минимальным сопротивлением внедрению при любом значении скорости

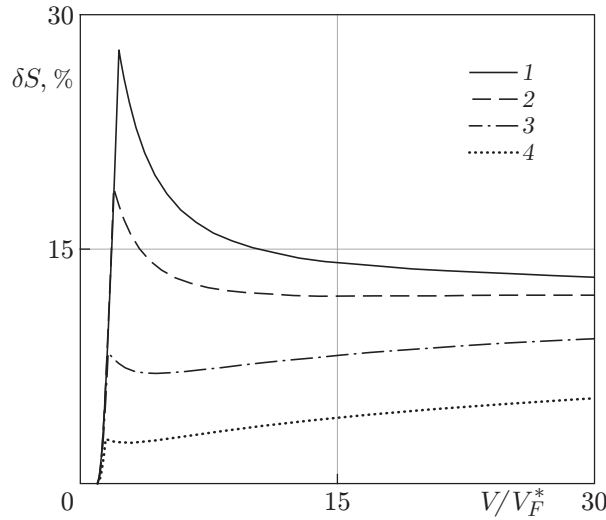


Рис. 4. Зависимость отношения конечных глубин проникания  $\delta S$  от безразмерной скорости при различных значениях  $C_1/C_2$ :  
 1 —  $C_1/C_2 = 0,5$ , 2 —  $C_1/C_2 = 1$ , 3 —  $C_1/C_2 = 3$ , 4 —  $C_1/C_2 = 10$

внедрения, лишь на 12 % больше глубины проникания абсолютно оптимального тела с максимальной глубиной проникания (по крайней мере, при больших скоростях движения).

Следует учесть, что при меньших скоростях осесимметричное абсолютно оптимальное тело с минимальным сопротивлением внедрению является конусом только до определенного значения угла раствора  $\alpha_F^*$  [11], далее минимальное сопротивление внедрению имеет тело с плоским торцом. Угол  $\alpha_F^*$  определяется из системы уравнений для  $\alpha_F^*$  и  $V_F^*$ :  $F(\alpha, V) = F(1, V)$ ,  $\partial F(\alpha, V)/\partial \alpha = 0$ , решение которой с учетом (5) имеет вид

$$V_F^* = \sqrt{2C_2/A_1}, \quad \alpha_F^* = \sqrt{0,5}.$$

В [11] показано, что для абсолютно оптимального тела с максимальной глубиной проникания  $\alpha_S^* \leq \sqrt{0,5}$ . Результаты расчетов показали, что отношение скоростей находится в интервале  $1,5 < V_S^*/V_F^* < 2,0$  при  $0,1 < C_2/C_1 < 1,0$ .

Обозначим глубину проникания тела с изменяемой геометрией  $\tilde{S}$ , максимальную глубину проникания абсолютно оптимального тела —  $S$ . На рис. 4 приведены зависимости  $\delta S = (\tilde{S}/S - 1) \cdot 100$  % от безразмерной скорости  $V/V_F^*$  при  $C_1/C_2 = 0,5; 1,0; 3,0; 10,0$ . В окрестности значения  $V/V_F^* = 1$  достигается максимальное значение величины  $\delta S$ , равное 18 % при  $C_1/C_2 = 1$  (кривая 2). При  $C_1/C_2 < 1$  максимальное значение больше (кривая 1 на рис. 4 соответствует отношению  $C_1/C_2 = 0,5$ ). Ранее подобные значения не были получены [4–6]. Значение  $\delta S \approx 12$  %, определяемое формулой (11), достигается с увеличением скорости при значениях  $C_1/C_2 \approx 1$ . Заметим, что при увеличении значения отношения  $C_1/C_2$  значение  $\delta S < 12$  %, как и было отмечено при анализе оценок (11), (12).

Из полученных в данной работе результатов численных расчетов следует, что при больших скоростях движения тело оптимальной формы с минимальным сопротивлением внедрению имеет передний торец. Данная форма близка к форме оптимального тела с максимальной глубиной проникания. Эти результаты согласуются с решениями, полученными в [10, 11] на основе гипотезы локального взаимодействия. В [7] показано, что с увеличением радиуса затупления увеличивается погрешность расчетов по модели локального взаимодействия, оказывающая влияние на силовые характеристики и форму оптимальных затупленных тел. В этом случае расчеты необходимо проводить с использованием поста-



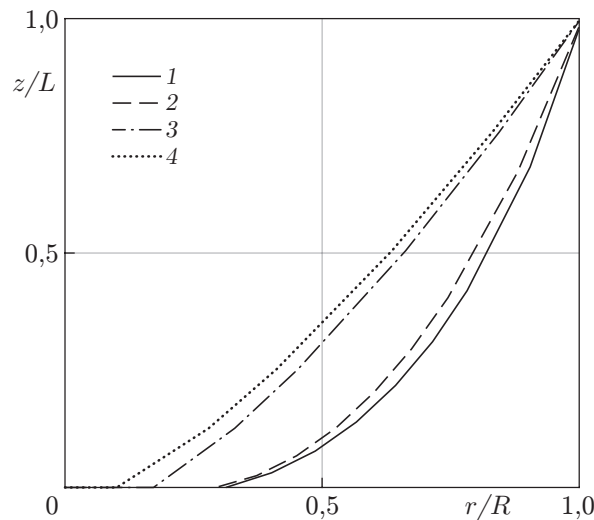


Рис. 5. Образующие тел с минимальным сопротивлением внедрению с заданными длиной  $L$  и радиусом основания  $R$ :

1, 2 — расчеты с использованием модели механики сплошных сред, 3, 4 — расчеты с использованием модели локального взаимодействия; 1, 3 — при наличии в грунтовой среде внутреннего и поверхностного трения, 2, 4 — при отсутствии трения в грунтовой среде

новки задачи в рамках механики сплошных сред на основе известных моделей грунтовых сред [14].

На рис. 5 приведены результаты расчетов [14, 18], полученные с использованием модели локального взаимодействия и модели механики сплошных сред при  $V_0 = 400$  м/с. Кривые 1, 3 получены при наличии в грунтовой среде внутреннего и поверхностного трения ( $C_1/C_2 = 1/k_f = 3$ ), кривые 2, 4 соответствуют случаю отсутствия трения ( $C_1 = C_2 = 0$ ).

**Заключение.** Исследованы задачи построения оптимальных форм осесимметричных тел при проникании ударника в грунтовую среду. Показано, что, используя предложенную методику численного исследования на основе модели локального взаимодействия для предварительных расчетов оптимальных форм, можно существенно уменьшить объем вычислений в осесимметричной постановке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бордюг В. А., Ведерников Ю. А., Дулов В. Г. и др.** Параметрическое исследование гиперзвуковых пространственных форм // ПМТФ. 1983. № 1. С. 51–57.
2. **Ведерников Ю. А.** Оптимизация реогазодинамических систем / Ю. А. Ведерников, В. А. Щепановский. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995.
3. **Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.** Engineering models of high speed penetration into geological targets // Centr. Europ. J. Engng. 2014. N 4. P. 1–9.
4. **Велданов В. А., Марков В. А., Пусев В. И. и др.** Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // Журн. техн. физики. 2011. Т. 81, № 7. С. 94–104.
5. **Симонов И. В., Осипенко К. Ю.** Устойчивость, траектории и динамический изгиб затупленного тела вращения при проникании в упругопластическую среду // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 146–160.

6. **Осипенко К. Ю.** Проникание тела вращения в упругопластическую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 169–180.
7. **Котов В. Л., Баландин В. В., Брагов А. М. и др.** Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 114–125.
8. **Остапенко Н. А., Якунина Г. Е.** О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 1. С. 95–106.
9. **Остапенко Н. А., Романченко В. И., Якунина Г. Е.** Оптимальные формы пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 32–40.
10. **Остапенко Н. А.** Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. 2002. № 2. С. 105–149.
11. **Якунина Г. Е.** Оптимальные формы движущихся в среде тел при учете трения // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, вып. 5. С. 759–774.
12. **Баничук Н. В., Иванова С. Ю.** Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2007. Вып. 69. С. 47–57.
13. **Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.** Shape optimization of impactors against a finite width shield using a modified method of local variations // Mech. Based Design Structures Machines. 2007. V. 35. P. 113–125.
14. **Баженов В. Г., Баландин В. В., Григорян С. С., Котов В. Л.** Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 1. С. 98–115.
15. **Бивин Ю. К.** Сравнительная оценка проникания звездообразных и конических тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 113–117.
16. **Аллен У., Мэйфилд Э., Моррисон Г.** Динамика проникания снаряда в песок // Механика. 1957. № 6. С. 125–137.
17. **Котов В. Л., Линник Е. Ю.** Численный расчет формы тела вращения минимального сопротивления движению в грунтовой среде в рамках модели локального взаимодействия // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2013. Вып. 75. С. 296–302.
18. **Баженов В. Г., Котов В. Л., Линник Е. Ю., Тарасова А. А.** Анализ моделей и методов расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // Материалы 20-го Междунар. симп. “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А. Г. Горшкова, Ярополец, 17–21 февр. 2014 г. М.: ТР-принт, 2014. Т. 1. С. 14–16.

*Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.,  
в окончательном варианте — 9/IX 2015 г.*