УДК 539.3.01

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ВСТАВКОЙ

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Решаются контактные задачи с трением для прямоугольной пластины, в круговое отверстие которой с малым зазором вставлена кольцевая пластина (вставка). Формулируются два варианта контактных краевых условий. В каждом из вариантов краевые условия, в соответствии с предлагаемой приближенной постановкой задачи, удовлетворяются не в действительно контактирующих, а в задаваемых парах точек, благодаря чему достаточно определять области прилипания и скольжения, контакта и свободного края только на одном контуре из двух вступающих в контакт контуров. Для решения применяются метод конечных элементов и принцип Буссинеска. Решение с одним из вариантов краевых условий по сравнению с другим вариантом ведет к меньшим значениям энергии деформации пластины и вставки, коэффициента концентрации напряжений, длин областей прилипания, контакта.

1. Основные уравнения. Уравнения равновесия, выражения деформаций через смещения и соотношения закона Гука принимаются в виде [1]

$$\begin{gathered} \sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}=0, \qquad \sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}=0, \qquad e_{11}=u_{1,1}=E^{-1}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}), \\ e_{22}=u_{2,2}=E^{-1}(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}), \qquad e_{12}=0{,}5(u_{1,2}+u_{2,1})=(1+\nu)E^{-1}\sigma_{12}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; u_i — смещения; e_{ij} — деформации; σ_{ij} — напряжения в плоском напряженном состоянии в декартовой системе координат x_i ($i,\ j=1,\ 2$); индексы 1, 2 после запятой означают частное дифференцирование по x_1, x_2 соответственно. Энергия деформации определяется по формуле

$$\Phi_E=\int\limits_\Omega \frac{E}{2(1-\nu^2)}\,[e_{11}^2+2\nu e_{11}e_{22}+e_{22}^2+2(1-\nu)e_{12}^2]\,dx_1\,dx_2.$$

Толщина пластин считается постоянной и без нарушения общности единичной. Выполняется интегрирование по области Ω, занятой пластиной. Для прямоугольной пластины $E=E_1$, $\nu=\nu_1$, для кольцевой $E=E_2$, $\nu=\nu_2$.

2. Краевые условия вне области контакта. Даны прямоугольная пластина (шириной $2H$, длиной $L=L_1+L_2$ с круговым отверстием радиуса R, называемая в дальнейшем кратко «пластина») и кольцевая пластина (вставка), имеющая внешний радиус $R_1=R-c$ и внутренний R_2 с центром в точке с декартовыми координатами $(-c,0)$; $c=\varepsilon R$, где ε — малый безразмерный параметр зазора, $\varepsilon>0$. Ввиду симметрии решение ищется только для верхних половин пластины и вставки (показанных в недеформированном состоянии на рис. 1,*а* в случае отсутствия зазора $\varepsilon=0$) при следующих краевых условиях:

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=0 \qquad \text{при} \qquad x_1=-L_1, \quad 0\leqslant x_2\leqslant H,$$

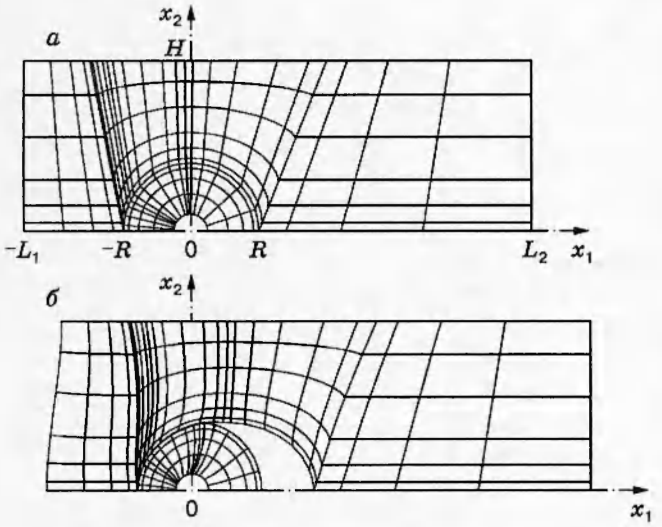

Рис. 1. Пластина и вставка с линиями разбиения на четырехугольные конечные элементы в исходном (*а*) и деформированном (*б*) состояниях в контактной задаче в отсутствие зазора ($\varepsilon = 0$, $\mu = 0{,}3$, $E_1 = E_2$, $w = 1$, $l = 0{,}4807$, $b = 0{,}1485$)

$$u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \begin{cases} H, & -L_1 \leqslant x_1 \leqslant L_2, \\ 0, & -L_1 \leqslant x_1 \leqslant -R, \quad R \leqslant x_1 \leqslant L_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$u_1 = w, \qquad u_2 = 0 \qquad \text{при} \qquad x_1 = L_2, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant H$$

и для вставки:

$$\begin{gathered} u_1 = u_2 = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad R_2 \leqslant \rho \leqslant R_1, \quad \theta = 0 \;\text{ и }\; \theta = \pi. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Используются две полярные системы координат: (r, φ) $(x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi)$ и (ρ, θ) $(x_1 = \rho\cos\theta - c,\ x_2 = \rho\sin\theta)$.

Действующая на правой стороне пластины тянущая сила P и совершаемая ею работа Φ определяются по формулам

$$P = \int_0^H \sigma_{11}\, dx_2, \qquad \Phi = \int_0^\tau P\dot{w}\, d\tau \quad \text{при} \quad x_1 = L_2.$$

Точка сверху означает дифференцирование по параметру нагружения, называемому временем τ. Ниже формулируются краевые условия также на контуре вставки Γ_c $(\rho = R_1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ и контуре отверстия Γ_p $(r = R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

3. Работа сил трения на вариациях смещений. В соответствии с принципом возможных перемещений при любых вариациях смещений δu_i, удовлетворяющих краевым условиям для смещений в (2.1), (2.2), и определяемых по ним вариациях деформаций δe_{ij} работа напряжений в пластине и вставке равна работе действующих на них сил:

$$\delta\Phi_{E1} = \delta\Phi - \delta\Phi_{\Gamma 1}, \qquad \delta\Phi_{E2} = \delta\Phi_{\Gamma 2}. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\delta\Phi_{E1} = \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}\delta e_{ij}\, dx_1\, dx_2, \qquad \delta\Phi_{E2} = \int_{\Omega_2} \sigma_{ij}\delta e_{ij}\, dx_1\, dx_2,$$

$$\delta\Phi = P\delta w, \qquad \delta\Phi_{\Gamma 1} = \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\, R\, d\varphi, \qquad \delta\Phi_{\Gamma 2} = \int_{\Gamma_c} \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\delta\hat{\boldsymbol{u}}\, R_1\, d\theta$$

Выполняется суммирование по повторяющимся индексам i, $j = 1, 2$ и интегрирование по областям Ω_1, Ω_2, занимаемым соответственно пластиной и вставкой; $\boldsymbol{p}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ — векторы усилий, действующих на Γ_p и Γ_c со стороны, противоположной центру вставки; $\delta\boldsymbol{u}$, $\delta\hat{\boldsymbol{u}}$ — векторы вариаций смещений, причем векторы на Γ_c помечаются знаком «∧».

Для всей конструкции (пластины и вставки) имеем

$$\delta\Phi = \delta\Phi_E + \delta\Phi_f, \qquad \delta\Phi_E = \delta\Phi_{E1} + \delta\Phi_{E2}, \tag{3.2}$$

т. е. $\delta\Phi$ равняется сумме работ напряжений и взятой со знаком «минус» работы действующих в области контакта пластины со вставкой сил трения на вариациях смещений $\delta\Phi_f$. Не раскрывая пока выражение для $\delta\Phi_f$, подставим в (3.2) $\delta\Phi_{E1}$, $\delta\Phi_{E2}$ из (3.1). Приходим к соотношению

$$\delta\Phi_f = \int\limits_{\Gamma_p} \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\, R\, d\varphi - \int\limits_{\Gamma_c} \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\delta\hat{\boldsymbol{u}}\, R_1\, d\theta, \tag{3.3}$$

которое выполняется независимо от вида краевых условий на контурах пластины и вставки вне Γ_p, Γ_c и используется ниже при формулировке краевых условий на Γ_p и Γ_c.

4. Взаимодействие пластины и вставки. Равенства декартовых координат любых точек $\varphi \in \Gamma_p$ и $\hat\theta \in \Gamma_c$, вступающих в контакт при нагружении пластины, представляются в виде

$$R\cos\varphi + u_1 = R_1\cos\hat\theta - c + \hat u_1, \qquad R\sin\varphi + u_2 = R_1\sin\hat\theta + \hat u_2, \tag{4.1}$$

где берутся значения векторов смещений $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ в точке φ, а $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat u_1, \hat u_2)$ — в точке $\hat\theta$; величины смещений и усилий, определяемые на Γ_c, помечаются знаком «∧». Далее формулируются два варианта краевых условий на Γ_p и Γ_c.

Вариант 1. Возьмем ближайшую к φ точку $\theta \in \Gamma_c$, для которой

$$\cos\theta = \rho_s^{-1}(\cos\varphi + \varepsilon), \qquad \sin\theta = \rho_s^{-1}\sin\varphi, \qquad \rho_s = (1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2)^{1/2}.$$

Разложим правые части равенств (4.1) в ряды Тейлора в точке θ. Пренебрегая произведениями производных от смещений $\hat u_1$, $\hat u_2$ на $(\hat\theta - \theta)$ и слагаемыми, содержащими степени $(\hat\theta - \theta)$ выше первой, приближенно полагаем

$$\begin{gathered} R\cos\varphi + u_1 = R_1[\cos\theta - (\hat\theta - \theta)\sin\theta] - c + \hat u_1, \\ R\sin\varphi + u_2 = R_1[\sin\theta + (\hat\theta - \theta)\cos\theta] + \hat u_2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь в отличие от (4.1) значения $\hat u_1$, $\hat u_2$ берутся в точке θ. Определим проекции векторов смещений $u_\rho = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_c$, $u_\theta = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{l}_c$, $\hat u_\rho = \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n}_c$, $\hat u_\theta = \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{l}_c$ на нормаль $\boldsymbol{n}_c = (\cos\theta, \sin\theta)$ и касательную $\boldsymbol{l}_c = (-\sin\theta, \cos\theta)$ к Γ_c в точке θ. Из (4.2) получаем соотношения $u_\rho = u_{\rho s} + \hat u_\rho$, $u_\theta = u_{\theta s} + \hat u_\theta$, где величины $u_{\rho s} = R_1 - \rho_s R$, $u_{\theta s} = R_1(\hat\theta - \theta)$ должны быть малыми порядка малости самих смещений.

Разность нормальных смещений $u_{\rho s}$ равна взятому со знаком «минус» расстоянию между точками φ и θ. Она является известной, не зависящей от времени функцией от φ (или θ). Вне области контакта в качестве условия непроникания Γ_p и Γ_c в деформированном состоянии друг через друга потребуем для каждой пары точек φ и θ выполнения неравенства $u_\rho - \hat u_\rho \geqslant u_{\rho s}$. Значения $u_{\rho s}$ не совпадают со значениями смещений $u_\rho = u_{\rho c} = -c\rho_s^{-1}(1 + \cos\varphi)$, задаваемыми в случае абсолютно жесткой вставки в [2]. Имеем $u_{\rho s} \leqslant u_{\rho c} \leqslant 0$, разность $(u_{\rho c} - u_{\rho s})$ мала порядка c^2. Для обеспечения непрерывного при неограниченном возрастании жесткости вставки перехода к условиям контакта, данным в [2], усиливая условие непроникания, в дальнейшем полагаем $u_{\rho s} = u_{\rho c}$.

Разность касательных смещений $u_{\theta s}$ с точностью до знака равна длине дуги на Γ_c между точками θ и $\hat{\theta}$. Посредством $u_{\theta s}$ учитывается возможность проскальзывания Γ_p и Γ_c друг относительно друга и смены пар контактирующих точек. Вычислив $u_{\theta s}$, можно для каждой точки φ определить приближенно координату контактирующей с ней точки по формуле $\hat{\theta} = \theta + R_1^{-1} u_{\theta s}$. При наличии трения величина $u_{\theta s}$ в каждый момент времени может зависеть от истории нагружения конструкции и рассматривается вместе со смещениями как искомая функция от φ (или θ) и времени τ. Частная производная $\dot{u}_{\theta s}$ по τ в области контакта есть скорость скольжения. Если $\dot{u}_{\theta s} = 0$, то $\dot{\theta} = \dot{\hat{\theta}}$, смена пары контактирующих точек не происходит, осуществляется прилипание.

Введем обозначения для областей контакта Γ_{p1} и свободного края Γ_{p2} на Γ_p и для областей Γ_{c1}, Γ_{c2}, образуемых точками на Γ_c, ближайшими к точкам соответственно из Γ_{p1} и Γ_{p2} ($\Gamma_p = \Gamma_{p1} \cup \Gamma_{p2}$, $\Gamma_c = \Gamma_{c1} \cup \Gamma_{c2}$). Определяем проекции векторов усилий $p_\rho = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}_c$, $p_\theta = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l}_c$ в точке φ и $\hat{p}_\rho = \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{n}_c$, $\hat{p}_\theta = \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{l}_c$ в точке θ на нормаль и касательную к Γ_c. Величины $\hat{p}_\rho = \hat{\sigma}_{\rho\rho}$, $\hat{p}_\theta = \hat{\sigma}_{\rho\theta}$ и $\hat{\sigma}_{\theta\theta}$ есть компоненты напряжений во вставке на Γ_c в полярной системе координат (ρ, θ). Пусть в области контакта при варьировании смещений всюду осуществляется прилипание: $\delta u_\rho = \delta \hat{u}_\rho$, $\delta u_\theta = \delta \hat{u}_\theta$. Тогда работа сил трения равна нулю, из (3.3) с учетом соотношений $R\, d\varphi = \gamma_1 R_1\, d\theta$, $\gamma_1 = \rho_s^2 (1-\varepsilon)^{-1} (1 + \varepsilon \cos\varphi)^{-1}$ следует

$$\delta\Phi_f = 0 = \int\limits_{\Gamma_{c1}} [(\gamma_1 p_\rho - \hat{p}_\rho)\delta u_\rho + (\gamma_1 p_\theta - \hat{p}_\theta)\delta u_\theta] R_1 d\theta + \int\limits_{\Gamma_{c2}} [\gamma_1 (p_\rho \delta u_\rho + p_\theta \delta u_\theta) - (\hat{p}_\rho \delta \hat{u}_\rho + \hat{p}_\theta \delta \hat{u}_\theta)] R_1\, d\theta.$$

В данных интегралах приравняем к нулю коэффициенты при произвольных вариациях смещений. С учетом прижатия Γ_p и Γ_c в области контакта друг к другу и, следовательно, отрицательности нормальных усилий получаем краевые условия

$$\begin{gathered} u_\rho - \hat{u}_\rho = u_{\rho s}, \quad u_\theta - \hat{u}_\theta = u_{\theta s}, \quad \hat{p}_\rho = \gamma_1 p_\rho, \quad \hat{p}_\theta = \gamma_1 p_\theta, \quad p_\rho < 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{p1}, \\ p_\rho = p_\theta = \hat{p}_\rho = \hat{p}_\theta = 0, \quad u_\rho - \hat{u}_\rho \geqslant u_{\rho s} \quad \text{на} \quad \Gamma_{p2}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где значения u_ρ, u_θ, p_ρ, p_θ берутся в точке φ, а $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\theta$, $\hat{p}_\rho$, $\hat{p}_\theta$ — в точке θ; области на Γ_c для краткости не указываются; $u_{\rho s} = u_{\rho c} = -c\rho_s^{-1}(1 + \cos\varphi)$. Согласно (4.3) имеем $\hat{\boldsymbol{p}} = \gamma_1 \boldsymbol{p}$ на Γ_{p1} и $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ на Γ_{p2}. Посредством коэффициента γ_1 учитываются неодинаковость размеров вступающих в контакт площадок на краях пластины и вставки и наклон их друг к другу в исходном недеформированном состоянии.

Вариант 2. Разложим теперь левые части равенств (4.1) в ряды Тейлора в ближайшей к $\hat{\theta}$ точке $\varphi \in \Gamma_p$, для которой

$$\cos\hat{\varphi} = r_s^{-1}[(1-\varepsilon)\cos\hat{\theta} - \varepsilon], \qquad \sin\hat{\varphi} = r_s^{-1}(1-\varepsilon)\sin\hat{\theta},$$
$$r_s = [1 - 2\varepsilon(1-\varepsilon)(1+\cos\hat{\theta})]^{1/2}.$$

Далее краевые условия формулируются аналогично, как и в варианте 1, но для проекций векторов смещений и усилий $u_r = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_p$, $u_\varphi = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{l}_p$, $p_r = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}_p$, $p_\varphi = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l}_p$ в точке $\hat{\varphi}$ и $\hat{u}_r = \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n}_p$, $\hat{u}_\varphi = \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{l}_p$, $\hat{p}_r = \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{n}_p$, $\hat{p}_\varphi = \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{l}_p$ в точке $\hat{\theta}$ на нормаль $\boldsymbol{n}_p = (\cos\hat{\varphi}, \sin\hat{\varphi})$ и касательную $\boldsymbol{l}_p = (-\sin\hat{\varphi}, \cos\hat{\varphi})$ к Γ_p. Величины $p_r = \sigma_{rr}$, $p_\varphi = \sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ есть компоненты напряжений в пластине на Γ_p в полярной системе координат (r, φ). Получаем равенства $u_r = u_{rs} + \hat{u}_r$, $u_\varphi = u_{\varphi s} + \hat{u}_\varphi$, в которых $u_{rs} = R(r_s - 1)$ и $u_{\varphi s} = R(\hat{\varphi} - \varphi)$. Для обеспечения непрерывного при неограниченном возрастании жесткости вставки перехода к условиям контакта, данным в [2], усиливая условие непроникания $u_r - \hat{u}_r \geqslant u_{rs}$, полагаем $u_{rs} = u_{rc} = -c(1 + \cos\hat{\varphi})$. Определяются области контакта Γ_{c1} и свободного края Γ_{c2} на Γ_c и области Γ_{p1}, Γ_{p2} на Γ_p, образуемые точками, ближайшими к точкам из Γ_{c1}, Γ_{c2} соответственно,

Таблица 1

Вариант	u	v	p	q	$\hat{u}$	$\hat{v}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	u_s	v_s	γ	Γ_1	Γ_2	Γ
1	u_ρ	u_θ	p_ρ	p_θ	$\hat{u}_\rho$	$\hat{u}_\theta$	$\hat{p}_\rho$	$\hat{p}_\theta$	$u_{\rho s}$	$u_{\theta s}$	γ_1	Γ_{p1}	Γ_{p2}	Γ_p
2	u_r	u_φ	p_r	p_φ	$\hat{u}_r$	$\hat{u}_\varphi$	$\hat{p}_r$	$\hat{p}_\varphi$	u_{rs}	$u_{\varphi s}$	γ_2	Γ_{c1}	Γ_{c2}	Γ_c

причем Γ_{p1}, Γ_{p2}, Γ_{c1}, Γ_{c2} здесь могут быть иными, чем в варианте 1. Имеем $\Gamma_p = \Gamma_{p1} \cup \Gamma_{p2}$, $\Gamma_c = \Gamma_{c1} \cup \Gamma_{c2}$. В области контакта векторы усилий связываются соотношением $\hat{\boldsymbol{p}} = \gamma_2 \boldsymbol{p}$, в котором $\gamma_2 = r_s^{-2}[1 - \varepsilon(1 + \cos\hat{\theta})]$.

Используем общие для обоих вариантов обозначения, данные в первой строке табл. 1 для величин и областей, приведенных в двух следующих ее строках. В общих обозначениях краевые условия как в варианте 1, так и в варианте 2 записываются в виде

$$\begin{gathered} u - \hat{u} = u_s, \quad v - \hat{v} = v_s, \quad \hat{p} = \gamma p, \quad \hat{q} = \gamma q, \quad p < 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ p = q = \hat{p} = \hat{q} = 0, \quad u - \hat{u} \geqslant u_s \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \end{gathered} \tag{4.4}$$

В варианте 1 они совпадают с (4.3), в области контакта из $p < 0$ следует $\hat{p} < 0$, условие непроникания $u - \hat{u} \geqslant u_s$ выполняется всюду на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Краевые условия (4.4) формулируются независимо от материалов пластины и вставки, соотношения между их жесткостями и свойств контактирующих поверхностей. Ниже они будут дополнены краевыми условиями, учитывающими действие трения.

Применим теперь соотношение (3.3) не для вариаций, а для скоростей смещений. Заменяя $\delta\Phi_f$ на $\dot{\Phi}_f$ и переходя к интегрированию по Γ_c, имеем

$$\dot{\Phi}_f = \int_{\Gamma_c} [\gamma(p\dot{u} + q\dot{v}) - (\hat{p}\dot{\hat{u}} + \hat{q}\dot{\hat{v}})]\, d\Gamma_c.$$

Учитывая далее вытекающие из (4.4) в области контакта равенства $\hat{p} = \gamma p$, $\hat{q} = \gamma q$, $\dot{u} = \dot{\hat{u}}$, $\dot{v} - \dot{\hat{v}} = \dot{v}_s$, для мощности рассеяния энергии на трение получаем выражения вида

$$\dot{\Phi}_f = \int_{\Gamma_{p1}} q\dot{v}_s\, d\Gamma_p = \int_{\Gamma_{c1}} \hat{q}\dot{v}_s\, d\Gamma_c.$$

Ее плотности на единицу длины краев пластины $Q = q\dot{v}_s$ и вставки $\hat{Q} = \hat{q}\dot{v}_s$ и величина $\dot{\Phi}_f$ должны быть неотрицательными.

5. Контактные задачи с трением Кулона. Пусть в области контакта Γ_1 действует трение по закону Кулона [3]. Тогда усилия на Γ_1 должны удовлетворять неравенствам $p < 0$, $|q| \leqslant \mu|p|$ или $f_1 = \mu p + q \le 0$, $f_2 = \mu p - q \leqslant 0$, $F = f_1 f_2 \geqslant 0$ (μ — коэффициент трения). В декартовых координатах p, q занимают в полуплоскости $p < 0$ область, ограниченную прямыми $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, на которых достигаются минимально возможные углы наклона вектора (p, q) к Γ. Модуль вектора (p, q) законом трения не ограничивается. Ограничения, налагаемые законом трения на $\hat{p}$, $\hat{q}$, выполняются при выполнении соотношений $\hat{p} = \gamma p$, $\hat{q} = \gamma q$ и поэтому ниже в краевые условия не включаются.

Скольжение края пластины по вставке с трением при ненулевой скорости $\dot{v}_s$ может происходить только тогда, когда значения усилий находятся на одной из граничных прямых $f_1 = 0$ или $f_2 = 0$, плотность мощности рассеяния энергии неотрицательна $Q = q\dot{v}_s \geqslant 0$, на каждое из контактирующих тел сила трения действует в направлении, противоположном скорости его скольжения относительно другого тела. Абсолютные величины $\dot{v}_s$ при скольжении могут быть любыми независимо от значений усилий p, q.

В остальных точках области контакта, где условия скольжения не выполняются, осуществляется прилипание $\dot{v}_s = 0$.

Приходим к краевым условиям

$$
\begin{gathered}
u - \hat{u} = u_s, \quad \dot{v}_s = 0, \quad \hat{p} = \gamma p, \quad \hat{q} = \gamma q, \quad p < 0, \quad F > 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1', \\
u - \hat{u} = u_s, \quad f = 0, \quad \hat{p} = \gamma p, \quad \hat{q} = \gamma q, \quad p < 0, \quad Q \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1'', \\
p = q = \hat{p} = \hat{q} = 0, \quad u - \hat{u} \geqslant u_s \quad \text{на} \quad \Gamma_2.
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

Здесь условие $F = f_1 f_2 > 0$ на Γ_1' ввиду строгого $p < 0$ равносильно двум неравенствам $f_1 < 0$ и $f_2 < 0$, линейным относительно искомых функций. Прилипание осуществляется на Γ_1', а также в тех точках на Γ_1'', где $Q = 0$. В остальных точках на Γ_1'' имеем скольжение, $Q > 0$. В качестве f в каждой точке на Γ_1'' берется функция f_1 или f_2, в этой точке равная нулю. Неравенство $Q \geqslant 0$ можно заменить при $f = f_1 = 0$, $q = -\mu p > 0$ на $\dot{v}_s \geqslant 0$, а при $f = f_2 = 0$, $q = \mu p < 0$ на $\dot{v}_s \leqslant 0$.

Разбиение $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$ полностью определяется по величинам усилий p, q в текущий момент времени. Области Γ_1', Γ_1'', Γ_2, вид функции f (f_1 или f_2) на Γ_1'', значения усилий p, q на Γ в каждый момент времени зависят от истории нагружения конструкции, прилипания и скольжения вступающих в контакт поверхностей пластины и вставки друг относительно друга и находятся из решения задачи. Условия для скоростей касательных смещений в (5.1) используются для прослеживания истории нагружения.

В (5.1), в отличие от [2], на Γ_1'' пренебрегается возможностью выполнения неравенства $\dot{f} < 0$, предполагающего разрывное изменение f как функции от времени, и тем самым устраняется необходимость задавать $\dot{v}_s = 0$. В приведенных ниже численных решениях, так же как и в [2], случай $\dot{f} < 0$ на Γ_1'' не реализуется.

Отметим, что краевые условия (5.1) удовлетворяются не в действительно контактирующих, а в задаваемых согласно предлагаемой приближенной постановке задачи парах точек φ, θ в варианте 1 или $\hat{\varphi}$, $\hat{\theta}$ в варианте 2, благодаря чему в каждом из вариантов в процессе решения достаточно определять области прилипания и скольжения, контакта и свободного края только на одном контуре Γ.

Итак, имеем две контактные задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.1), получаемые в вариантах 1 и 2. Решения этих задач в каждый момент времени зависят от истории нагружения и взаимодействия пластины и вставки.

Положив в (5.1) $\varepsilon = 0$, придем к контактной задаче с трением в случае отсутствия зазора. Если w монотонно возрастает (начиная от нуля в исходном недеформированном состоянии пластины и вставки), то ее решение изменяется линейно пропорционально w и может быть найдено при краевых условиях:

$$
\begin{gathered}
u = \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad p = \hat{p}, \quad q = \hat{q}, \quad p < 0, \quad F > 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1', \\
u = \hat{u}, \quad f = 0, \quad p = \hat{p}, \quad q = \hat{q}, \quad p < 0, \quad Q_1 \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1'', \\
p = q = \hat{p} = \hat{q} = 0, \quad u \geqslant \hat{u} \quad \text{на} \quad \Gamma_2.
\end{gathered} \tag{5.2}
$$

Здесь значения u, v, p, q для пластины и $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$, $\hat{q}$ для вставки берутся в одной и той же точке на $\Gamma = \Gamma_p = \Gamma_c$, причем в проекциях на нормаль и касательную к Γ в той же точке. Области Γ_1', Γ_1'', Γ_2 образуются в начальный момент времени при задании сколь угодно малого w и с возрастанием w не изменяются. В области Γ_1' вследствие $\dot{v}_s = 0$ имеем $v_s = 0$, $v = \hat{v}$. На Γ_1'' функция f в каждой точке будет одна и та же (f_1 или f_2) при любом $w > 0$. С учетом линейной зависимости q, v_s от w неравенство $Q \geqslant 0$ заменяется на условие неотрицательности плотности энергии, рассеянной на трение: $Q_1 = 0{,}5 q v_s \geqslant 0$.

В случае отсутствия трения $\mu = 0$ из (5.1) следуют краевые условия

$$\begin{gathered} u - \hat{u} = u_s, \quad \hat{p} = \gamma p, \quad q = \hat{q} = 0, \quad p < 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ p = q = \hat{p} = \hat{q} = 0, \quad u - \hat{u} \geqslant u_s \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \end{gathered} \tag{5.3}$$

определяемые в вариантах 1 и 2. Задача для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.3) в каждом из вариантов имеет единственное решение. Энергия деформации пластины и вставки Φ_E, рассматриваемая как функционал, достигает на нем минимума в пространстве смещений, удовлетворяющих краевым условиям для смещений в (2.1), (2.2) и условию непроникания $u - \hat{u} \geqslant u_s$ всюду на Γ. Области Γ_1, Γ_2 определяются из решения задачи.

Задачи для пластин с абсолютно жесткой вставкой решаются в [4–6] в отсутствие трения, а в [2] с учетом трения. В [7] решение ищется при наличии зазора и трения в рядах для бесконечной пластины и деформируемой вставки при задании в области прилипания разностей смещений края отверстия и контура вставки без учета истории их взаимодействия.

6. Об алгоритме решения контактных задач. Решения находятся при монотонно возрастающем смещении правой стороны пластины w с использованием при любом варианте краевых условий (как 1, так и 2) следующего алгоритма.

Вводим на Γ новую переменную — координату η, в варианте 1 принимающую значение $\eta = 1 - \varphi/\pi$, в варианте 2 — $\eta = 1 - \hat{\theta}/\pi$ и возрастающую вдоль Γ в направлении по часовой стрелке ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$) (рис. 1). Предполагаем, что в каждый момент времени области Γ_1', Γ_1'', Γ_2 занимают на Γ отрезки $0 \leqslant \eta < b$, $b \leqslant \eta < l$, $l \leqslant \eta \leqslant 1$ соответственно, а область контакта $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$ — отрезок $0 \leqslant \eta < l$. Во всех точках на Γ_1'' полагается равной нулю одна и та же функция f (f_1 или f_2), и, следовательно, силы трения считаются действующими вдоль Γ_1'' всюду в одном и том же направлении. Значения b, l, вид функции f (f_1 или f_2), равной нулю на Γ_1'', могут зависеть от смещения w, зазора c, коэффициента трения μ, соотношения между жесткостями пластины и вставки, а также от задаваемого варианта краевых условий 1 или 2.

Вычисления в процессе нагружения ведутся при увеличении длины области контакта l по шагам. На каждом шаге от τ до $\tau + \Delta\tau$ задается значение l в конце шага в момент времени $\tau + \Delta\tau$. Скорости скольжения в конце шага определяются по формуле $\dot{v}_s = (v_s - v_{s\tau})/\Delta\tau$ (значения в начале шага помечаются индексом τ; в начальный момент $l = 0$, $v_s = 0$ всюду на Γ).

Опуская в (5.1) неравенства и удовлетворяя $\dot{v}_s = 0$ на Γ_1', приходим к краевым условиям

$$\begin{gathered} u - \hat{u} = u_s, \quad v - \hat{v} = v_{s\tau}, \quad \hat{p} = \gamma p, \quad \hat{q} = \gamma q \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \eta < b, \\ u - \hat{u} = u_s, \quad f = 0, \quad \hat{p} = \gamma p, \quad \hat{q} = \gamma q \quad \text{при} \quad b \leqslant \eta < l, \\ p = q = \hat{p} = \hat{q} = 0 \quad \text{при} \quad l \leqslant \eta \leqslant 1. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь на отрезке $0 \leqslant \eta < b$ задаются значения разностей касательных смещений $v_{s\tau}$, найденные на предыдущем шаге по времени. Из решения задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (6.1) (называемой задачей A) определяется состояние равновесия пластины и вставки в конце шага с заданной областью контакта.

Введем две вспомогательные задачи $A1$ и $A2$, отличающиеся от задачи A только тем, что в краевых условиях задаются

$$\begin{gathered} u = \hat{u}, \quad v = \hat{v} \ \text{в} \ A1, \quad u - \hat{u} = c^{-1} u_s, \quad v - \hat{v} = c^{-1} v_{s\tau} \ \text{в} \ A2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \eta < b, \\ u = \hat{u}, \quad f = 0 \ \text{в} \ A1, \quad u - \hat{u} = c^{-1} u_s, \quad f = 0 \ \text{в} \ A2 \quad \text{при} \quad b \leqslant \eta < l, \end{gathered}$$

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0 \ \text{в} \ A1, \quad u_1 = u_2 = 0 \ \text{в} \ A2 \quad \text{при} \quad x_1 = L_2, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant H.$$

Решение контактной задачи в отсутствие зазора для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.2) определяется как решение задачи $A1$ при $\varepsilon = 0$, $w = 1$ и таких b, l, f, что ограничения в виде неравенств в (5.2) выполняются.

Пластина и вставка разбиваются на лагранжевы конечные элементы (четырехугольные, девятиузловые, изопараметрические) [8], например так, как показано (в случае $\varepsilon = 0$) на рис. 1. Множества узлов на Γ_p и Γ_c составляются из пар таких точек (φ, θ в варианте 1 или $\hat{\varphi}$, $\hat{\theta}$ в варианте 2), значения искомых функций в которых связываются задаваемыми краевыми условиями. В остальном алгоритм аналогичен данному в [2] для задач с абсолютно жесткой вставкой. На основе принципа возможных перемещений формулируются системы конечно-элементных уравнений задач $A1$, $A2$. Эти системы имеют одну и ту же несимметрическую матрицу коэффициентов при искомых переменных — компонентах смещений узлов элементов — и решаются методом исключения Гаусса [8, 9] с учетом ленточности этой матрицы и симметричности большей ее части относительно главной диагонали. Решение задачи A ищется в виде суммы с коэффициентами w, c решений задач $A1$ и $A2$. Применяя принцип Буссинеска [3, 10], определяем w из условия равенства нулю нормального усилия p в крайнем правом узле области контакта $\eta = l_*$. Итерациями находим такое положение крайнего правого узла области прилипания $\eta = b_*$, при котором в нем обращается в нуль функция усилий f, равная нулю в области скольжения (значения b_*, l_* принимаются в качестве длин областей прилипания и контакта $b = b_*$, $l = l_*$). В результате определяется искомое решение контактной задачи, ограничения в виде неравенств в (5.1) выполняются. В узле $\eta = b_*$ удовлетворяются условия $v - \hat{v} = v_{s\tau}$, $f = 0$, а в узле $\eta = l_*$ — $f = 0$, $p = 0$. В этом смысле имеется непрерывный переход вдоль Γ от одних краевых условий к другим.

7. Результаты счета. Перейдем к безразмерным величинам. Для этого x_1, x_2, r, ρ умножим на обезразмеривающий множитель R^{-1}, смещения и зазор c — на L_0^{-1}, деформации — на $\omega = RL_0^{-1}$, напряжения и усилия p, q — на ωE_1^{-1}, энергии деформации пластины Φ_{E1} и вставки Φ_{E2}, энергию Φ_f, рассеиваемую на трение, и работу тянущей силы Φ — на $E_1^{-1} L_0^{-2}$ (L_0 — постоянная, имеющая размерность длины). Для обезразмеренных величин сохраним прежние обозначения. Теперь $R = 1$, $R_1 = 1 - \varepsilon$, $R_2 = 0{,}25$, $H = L_1 = 2{,}5$, $L_2 = 5$, $c = \omega\varepsilon$. Коэффициент Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$.

В обезразмеренные уравнения и краевые условия войдут два параметра c и ε, связанные с величиной зазора. По заданным c, ε можно определить $\omega = c\varepsilon^{-1}$ и перейти от безразмерных величин искомых функций к размерным. В случае отсутствия зазора ($c = \varepsilon = 0$) решение линейно пропорционально w, полагаем $w = 1$. Возвращаясь к размерным величинам и задавая размерные w, R, найдем $L_0 = w$, $\omega = RL_0^{-1}$, и также можно перейти от безразмерных величин искомых функций к размерным.

Рассмотрим решение контактной задачи с трением в отсутствие зазора для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.2), найденное при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0{,}3$, $E_1 = E_2$, $w = 1$, $l = 0{,}4807$, $b = 0{,}1485$ ($\pi l = 86{,}5°$, $\pi b = 26{,}7°$). Пластина и вставка с разбиением их на четырехугольные конечные элементы (лагранжевы, изопараметрические, девятиузловые) в исходном и деформированном состояниях показаны на рис. 1. Координаты узлов в деформированном состоянии X_i определяются по их исходным значениям x_i по формулам $X_i = x_i + \beta u_i$ ($i = 1, 2$), где коэффициент β выбирается таким, что умноженная на β максимальная абсолютная величина компонент глобального вектора искомых переменных — смещений узлов элементов — равна единице. Переход к безразмерным величинам смещений и умножение их на β ведут к преувеличенным деформациям пластины и вставки (рис. 1).

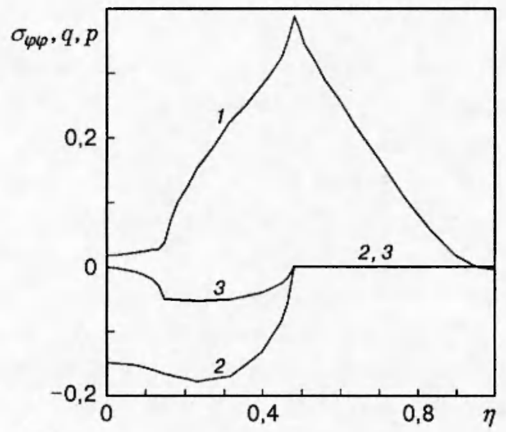

Рис. 2

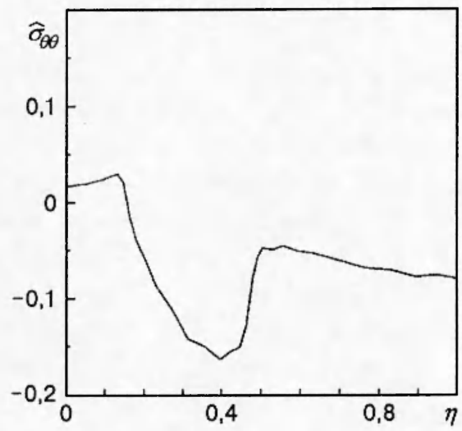

Рис. 3

Рис. 2. Окружное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ (кривая *1*), нормальное и касательное усилия p, q (кривые *2*, *3*) в пластине на контуре отверстия в решении задачи, представленном на рис. 1

Рис. 3. Окружное напряжение $\hat{\sigma}_{\theta\theta}$ на контуре вставки Γ_c в решении задачи, представленном на рис. 1 и 2

Значения растягивающей силы $P = 0{,}195$, энергий деформаций пластины и вставки $\Phi_{E1} = 0{,}075\,04$, $\Phi_{E2} = 0{,}019\,96$ превосходят получаемые в решении в отсутствие трения, в котором $P = 0{,}184$, $\Phi_{E1} = 0{,}073\,22$, $\Phi_{E2} = 0{,}018\,74$, $l = 0{,}4708$, $b = 0$. С возрастанием жесткости вставки при $\mu = 0{,}3$ энергия, рассеиваемая на трение, увеличивается от $\Phi_f = 0{,}0025$ в рассматриваемом решении до $\Phi_f = 0{,}0053$ в случае абсолютно жесткой вставки с $\Phi_{E1} = 0{,}1183$.

На рис. 2 показаны p, q, $\sigma_{\varphi\varphi}$ в пластине, на рис. 3 — $\hat{\sigma}_{\theta\theta}$ во вставке на Γ как функции от η. Имеем $p = q = 0$ при $l \leqslant \eta \leqslant 1$. Максимум $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma^*_{\varphi\varphi}$ достигается на свободной части Γ вблизи точки $\eta = l$, максимум по абсолютной величине p — во внутренней точке области контакта. Около точки $\eta = 0$, в отличие от случая абсолютно жесткой вставки [2], $\sigma_{\varphi\varphi} > 0$. Вследствие трения величина $\sigma^*_{\varphi\varphi}$ и коэффициент концентрации напряжений $K = HP^{-1}\sigma^*_{\varphi\varphi}$ возрастают от 0,3282, 4,460 при $\mu = 0$ до 0,3873, 4,965 соответственно при $\mu = 0{,}3$.

С уменьшением E_2/E_1 при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0{,}3$, $w = 1$ значения P, Φ_E, (Φ_f/Φ), максимумы $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\hat{\sigma}_{\theta\theta}$ на Γ убывают, l, b возрастают. Имеем $l = 0{,}4748$, $b = 0{,}023\,66$ при $E_2 = 16E_1$ и $l = 0{,}4868$, $b = 0{,}2054$ при $E_2 = 0{,}25E_1$.

Решение контактной задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.1) с зазором и трением в варианте 1 найдено при $c = 1$, $\varepsilon = 0{,}05$, $\mu = 0{,}3$, $E_1 = E_2$ с переменными шагами по l ($l = 0{,}05 \div 0{,}45$) за 16 шагов. При $l = 0{,}05$ в области прилипания задавались нулевые разности касательных смещений $v_s = 0$. На рис. 4 кривыми *1*, *2* показаны соответственно l, b как функции от w. В отличие от случая абсолютно жесткой вставки [2] знаки q, $\dot{v}_s$ в области скольжения в процессе нагружения не изменяются, скольжение края пластины по контуру вставки происходит в направлении по часовой стрелке. Длина области прилипания с ростом w после достижения максимума $b = 0{,}1869$ при $l = 0{,}225$, $w = 0{,}8445$ далее уменьшается (кривая *2* на рис. 4), но не столь значительно, как в решении с абсолютно жесткой вставкой [2]. Рассеиваемая энергия Φ_f, пренебрежимо малая, пока $l \leqslant 0{,}225$, затем резко возрастает, но остается существенно меньше энергии деформации пластины и вставки. При $l = 0{,}45$ она составляет примерно 1,6 % от $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2}$.

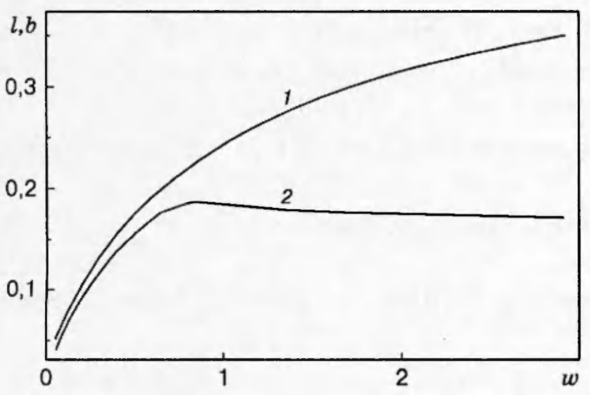

Рис. 4

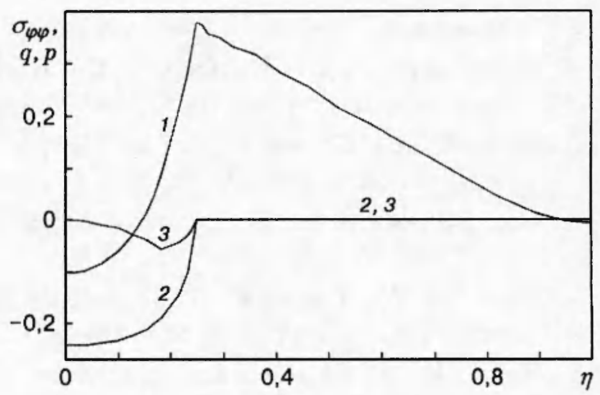

Рис. 5

Рис. 4. Длины областей контакта l (кривая *1*) и прилипания b (кривая *2*) в зависимости от смещения правой стороны пластины w в задаче с краевыми условиями в варианте 2 при наличии зазора и трения ($\varepsilon = 0{,}05$, $\mu = 0{,}3$, $E_1 = E_2$)

Рис. 5. Окружное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ (кривая *1*), нормальное и касательное усилия p, q (кривые *2*, *3*) в пластине на контуре отверстия в решении задачи, представленном на рис. 4, при $l = 0{,}25$, $b = 0{,}1824$, $w = 1{,}1062$

Таблица 2

Решение	μ	l	b	$P \cdot 10^2$	$\Phi_{E1} \cdot 10^3$	$\Phi_{E2} \cdot 10^3$	$\sigma^*_{\varphi\varphi}$	K
$\boldsymbol{U}^{(1)}$	0,3	0,1455	0,1309	4,651	6,411	1,833	0,1017	5,468
$\boldsymbol{U}^{(2)}$	0,3	0,15	0,1339	4,694	6,481	1,836	0,1029	5,483
$\boldsymbol{U}^{(3)}$	0	0,1499	0	4,679	6,427	1,874	0,0994	5,313

На рис. 5 показаны p, q, $\sigma_{\varphi\varphi}$ на Γ_p при $l = 0{,}25$, $b = 0{,}1824$, $w = 1{,}1062$, $P = 0{,}1559$. В окрестности точки $\eta = 0$ имеем $\sigma_{rr} < 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} < 0$.

Разность между решениями задач для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.1) в вариантах 1 и 2 (глобальные векторы искомых переменных которых обозначим через $\boldsymbol{U}^{(1)}$ и $\boldsymbol{U}^{(2)}$ соответственно), вычисленными при одном и том же значении w, мала. При небольших w они незначительно отличаются от решений в отсутствие трения. В табл. 2 при $c = 1$, $\varepsilon = 0{,}05$, $E_1 = E_2$, $w = 0{,}3838$ приведены значения μ, l, b, P, Φ_{E1}, Φ_{E2}, максимального окружного напряжения на крае отверстия $\sigma^*_{\varphi\varphi}$ и коэффициента концентрации напряжений $K = HP^{-1}\sigma^*_{\varphi\varphi}$ в $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ при $\mu = 0{,}3$ и в решении $\boldsymbol{U}^{(3)}$ задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.2), (5.3) в варианте 2 при $\mu = 0$. Краевые условия в варианте 1 по сравнению с вариантом 2 менее стеснительны для пластины и вставки: значения l, b, P, Φ_{E1}, Φ_{E2}, $\sigma^*_{\varphi\varphi}$, K в $\boldsymbol{U}^{(1)}$ меньше, чем в $\boldsymbol{U}^{(2)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975.
2. **Солодовников В. Н.** О действии трения в контактной задаче для пластины со штифтом // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 184–192.

3. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
4. **Mangalgiri P. D., Dattaguru B., Rao A. K.** Finite element analysis of moving contact in mechanically fastened joints // Nuclear Engng Design. 1984. V. 78. P. 303–311.
5. **Naik R. A., Crews J. H. (Jr.)** Stress analysis method for a clearance-fit bolt under bearing loads // AIAA J. 1986. V. 24, N 8. P. 1348–1353.
6. **Солодовников В. Н.** Решение контактной задачи для пластины со штифтом // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 120–127.
7. **Hyer M. W., Klang E. C.** Contact stresses in pin-loaded orthotropic plates // Intern. J. Solids Struct. 1985. V. 21, N 9. P. 957–975.
8. **Bathe K. J.** Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
9. **Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
10. **Boussinesq J.** Application des potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauther-Villard, 1885.

Поступила в редакцию 27/I 1998 г.