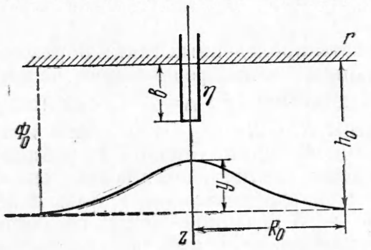
РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНЫХ БЕЗВОДНЫХ ДЕБИТОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТАХ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Ю. И. Стклянин, А. П. Телков

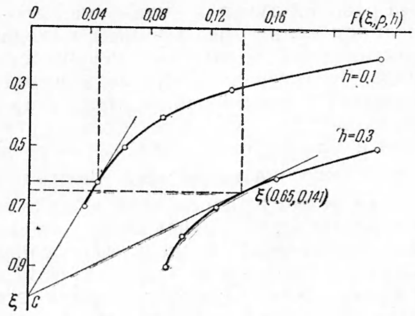
(Москва)

Дается решение задачи о потенциале несовершенной скважины в однородноанизотропном пласте с конечным радиусом контура питания. Полученное решение использовано для расчета предельных безводных дебитов нефти и газа; приведены универсальные графики зависимостей безразмерных дебитов q от относительного вскрытия пласта h для различных ρ.

§ 1. Потенциал несовершенной скважины. Рассмотрим приток к несовершенной скважине в круговом пласте (фиг. 1). Пусть R_0 — радиус контура питания, h_0 — мощность пласта, k — проницаемость вдоль напластования, k_z — проницаемость по вертикали, μ — вязкость вытесняемой жидкости. Жидкость считаем несжимаемой, фильтрацию — подчиняющейся закону Дарси.



Фиг. 1



Фиг. 2

Сначала определим потенциал $\varphi = -(k/\mu)\,p$ точечного стока с координатами $r=0$, $z=\eta$; p — давление в жидкости. Как известно [1, 2], потенциал в области, содержащей источники или стоки, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\varkappa^2\,\partial z^2}=q\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,\delta(z-\eta) \qquad \left(\varkappa=\sqrt{\frac{k}{k_z}}\right) \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ — характеристика анизотропии, q — мощность точечного стока, $\delta(r)$ и $\delta(z-\eta)$ — функции Дирака [1, 2].

Будем считать кровлю и подошву непроницаемыми, т. е.

$$\partial\varphi/\partial z=0 \qquad \text{при } z=0,\ z=h_0 \tag{1.2}$$

На контуре питания $r=R_0$ для простоты примем

$$\varphi(R_0, z)=0 \tag{1.3}$$

Задачу будем решать методом интегральных преобразований [1]. Применим преобразование Ханкеля с конечными пределами к соотношениям (1.1)—(1.3) и получим

$$\left(\frac{1}{\varkappa^2}\frac{d^2}{dz^2}-\frac{\mu_i^2}{R_0^2}\right)\varphi^\circ=\frac{q}{2\pi}\,\delta(z-\eta) \tag{1.4}$$

$$d\varphi^\circ/dz=0 \qquad \text{при } z=0,\ z=h_0 \tag{1.5}$$

$$\left(\varphi^\circ(z,\mu_i)=\int_0^{R_0}\varphi(z,r)\,J_0\left(\frac{r}{R_0}\,\mu_i\right)r\,dr\right)$$

Здесь $J_0(\mu_i r/R_0)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, μ_i — положительный корень уравнения $J_0(\mu_i)=0$ ([3], стр. 298).

К (1.4) и (1.5) применим косинус — преобразование Фурье с конечными пределами [1, 4] и получим

$$\varphi^{\circ\circ}(n,\mu_i)=-\frac{q}{2\pi}\left(\frac{n^2\pi^2}{h_0^2\varkappa^2}+\frac{\mu_i^2}{R_0^2}\right)^{-1}\cos\frac{n\pi\eta}{h_0} \tag{1.6}$$

Здесь

$$\varphi^\circ(n, \mu_i) = \int_0^{h_0} \varphi^\circ(z, \mu_i) \cos \frac{n\pi z}{h_0}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

По найденной двойной трансформанте (1.6), применяя дважды формулу обращения [1, 4], получим

$$\varphi_1 \underset{\varkappa<\eta}{(z, r)} = -\frac{q\varkappa}{\pi k_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_i \varkappa \dfrac{(h_0 - \eta)}{R_0} \operatorname{ch} \mu_i \dfrac{z}{R_0} \varkappa}{\mu_i \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \dfrac{h_0}{R_0}} \, \frac{J_0\left(\dfrac{r}{R_0} \mu_i\right)}{J_1^2(\mu_i)} \tag{1.7}$$

$$\varphi_2 \underset{z>\eta}{(z, r)} = -\frac{q\varkappa}{\pi R_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_i \varkappa \dfrac{(h_0 - z)}{R_0} \operatorname{ch} \mu_i \varkappa \dfrac{\eta}{R_0}}{\mu_i \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \dfrac{h_0}{R_0}} \, \frac{J_0\left(\dfrac{r}{R_0} \mu_i\right)}{J_1^2(\mu_i)} \tag{1.8}$$

где $J_1(\mu_i)$ — функция Бесселя первого рода, первого порядка.

Таблица 1

h	ρ	ξ_0	F	q	ρ	ξ_0	F	q	ρ	ξ_0	F	q
0.1	4	0.430	0.153	0.186		0.670	0.026	0.635		0.800	0.0001	100.0
0.3		0.500	0.460	0.163		0.675	0.096	0.508		0.880	0.0003	50.0
0.5		0.600	0.780	0.128	0.7	0.720	0.194	0.361	0.2	0.890	0.0028	8.92
0,7		0.770	1.120	0.072		0.800	0.410	0.171		0.900	0.0330	1.06
0.8		0.825	1.530	0.046		0.850	0.610	0.098		0.910	0.1020	0.354
0.1		0.500	0.100	0.250		0.720	0.016	0.876		0.820	10^{-8}	$9\cdot10^5$
0.3		0.530	0.320	0.220	0.6	0.725	0.066	0.625	0.1	0.925	10^{-7}	$1.12\cdot10^5$
0.5	2	0.630	0.545	0.170		0.750	0.150	0.416		0.945	10^{-5}	$1.35\cdot10^3$
0.7		0.800	0.775	0.090		0.810	0.340	0.196		0.950	$9\cdot10^{-4}$	19.5
0.8		0.830	1.120	0.061		0.856	0.525	0.110		0.955	10^{-2}	1.8
0.1		0.600	0.050	0.400		0.740	0.008	1.625		0.860	10^{-10}	$7.5\cdot10^7$
0.3		0.635	0.160	0.342	0.5	0.760	0.028	1.288	0.08	0.930	10^{-9}	$1.05\cdot10^7$
0.5	1	0.685	0.320	0.246		0.765	0.108	0.543		0.950	$4.6\cdot10^{-7}$	$2.72\cdot10^4$
0.7		0.800	0.540	0.136		0.815	0.280	0.231		0.955	$1.7\cdot10^{-4}$	92.6
0.8		0.840	0.790	0.081		0.860	0.450	0.125		0.960	$3\cdot10^{-3}$	5.3
0.1		0.620	0.044	0.432		0.770	0.0040	2.880		0.900	0	∞
0.3		0.650	0.141	0.363	0.4	0.790	0.0175	1.800	0.05	0.940	0	∞
0.5	0.9	0.700	0.280	0.268		0.800	0.0620	0.806		0.955	0	∞
0.7		0.800	0.500	0.140		0.835	0.1950	0.296		0.960	$1.5\cdot10^{-6}$	$9.34\cdot10^3$
0.8		0.850	0.720	0.083		0.870	0.3500	0.149		0.970	$1.6\cdot10^{-4}$	75
0.1		0.650	0.034	0.515		0.780	0.0010	11.000		1	0	∞
0.3	0.8	0.665	0.112	0.448	0.3	0.840	0.0045	5.340	0.01	1	0	∞
0.5		0.705	0.250	0.295		0.850	0.0220	1.700		1	0	∞
0.7		0.810	0.460	0.152		0.860	0.1100	0.445		1	0	∞
0.8		0.850	0.670	0.089		0.880	0.2450	0.196		1	0	∞

Таблица 2

h	$\rho = 1$					$\rho = 4$				
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8
[1]	0.37	0.33	0.26	0.145	0.085	0.182	0.165	0.130	0.070	0.046
(2.4)	0.40	0.34	0.25	0.131	0.081	0.186	0.163	0.128	0.072	0.045

Найдем потенциал для несовершенной скважины. При этом скважину будем рассматривать как линию стоков (фиг. 1) вдоль оси z от $z = 0$ до $z = b$ постоянной мощности q. Тогда потенциал линии стоков будет

$$\Phi = \int_0^b \varphi(r, z, \eta)\, d\eta \tag{1.9}$$

Из (1.7)—(1.9) получим

$$\Phi_1_{z<b} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r}{R_0} + \frac{q}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_i \varkappa \frac{z}{R_0} \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{h_0 - b}{R_0}}{\mu_i^2 \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{h_0}{R_0}} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_0} \mu_i\right)}{J_0^2(\mu_i)} \tag{1.10}$$

$$\Phi_2_{z>b} = -\frac{q}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_i \varkappa \frac{h_0 - z}{R_0} \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{b}{R_0}}{\mu_i^2 \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{h_0}{R_0}} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_0} \mu_i\right)}{J_1^2(\mu_i)} \tag{1.11}$$

Найдем расход, приходящийся через линейный сток

$$Q = \int_0^{h_0} 2\pi R_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R_0} dz \tag{1.12}$$

Учитывая (1.10) и (1.11), из (1.12) находим

$$q = Q/b \tag{1.13}$$

§ 2. Расчет предельных безводных дебитов. Будем рассматривать горизонтальный пласт с подошвенной водой (фиг. 1).

Для определения предельных безводных дебитов используем полученное решение (1.11). Вводя безразмерные параметры

$$\rho = \frac{R_0}{\varkappa h_0}, \qquad \frac{z}{h_0} = \xi, \qquad \frac{b}{h_0} = \bar{h} \tag{2.1}$$

и учитывая (1.13) при $r = 0$, из (1.11) получим распределение потенциала на оси скважины

$$\Phi(0, \xi) = -\frac{Q}{\pi h_0 \bar{h}} F(\xi, \rho, \bar{h})$$

$$F(\xi, \rho, \bar{h}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_i}{\rho}(1 - \xi) \operatorname{sh} \mu_i \frac{\bar{h}}{\rho}}{\mu_i^2 \operatorname{sh} \frac{\mu_i}{\rho} J_1^2(\mu_i)} \tag{2.2}$$

Согласно [5] условие устойчивости конуса при $\Phi(R_0, z) = \Phi_0 = 0$ имеет вид

$$\Phi(0, \xi) = -\frac{k \Delta\gamma h_0}{\mu}(1 - \xi) \tag{2.3}$$

где $\Delta\gamma$ — разность объемных весов вытесняемой и вытесняющей жидкостей.

Имея семейство кривых $F(\xi, \rho, \bar{h})$, легко найти графически предельный дебит, соответствующий точке касания ξ_0 кривой $F(\xi, \rho, \bar{h})$ и прямой (2.3) (фиг. 2). (Здесь построены кривые для $\rho = 0.9$, $\bar{h} = 0.1$ и 0.3. Для других ρ и $\bar{h}$ точка касания ξ_0 находится аналогично.)

Тогда, решая совместно (2.2) и (2.3) при $\xi = \xi_0$, находим безразмерный дебит

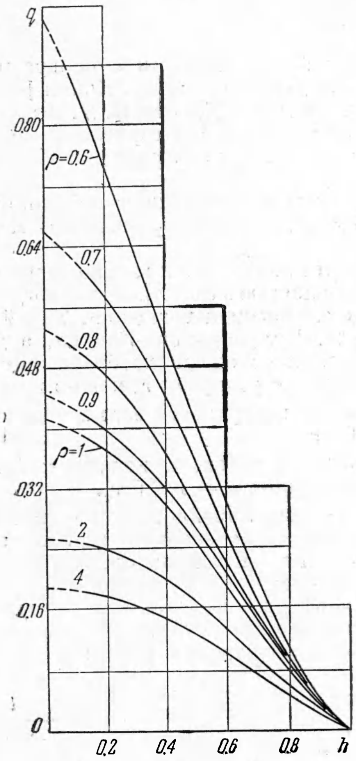
$$q(\bar{h}, \rho) = \frac{Q}{Q_0} = \frac{\bar{h}}{2} \frac{(1 - \xi_0)}{F(\xi_0, \rho, \bar{h})}$$

Здесь введено обозначение

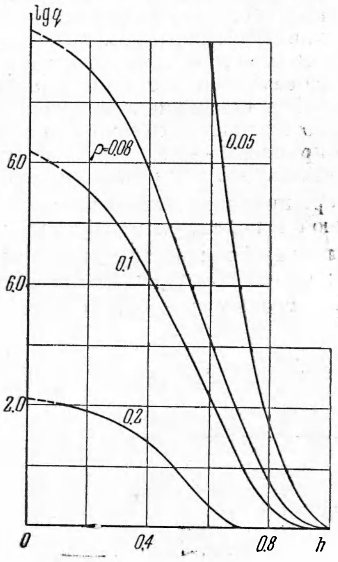
$$Q_0 = \frac{2\pi k h_0}{\mu} \Delta\gamma h_0 \tag{2.4}$$

Количественный расчет предельных безводных безразмерных дебитов $q = q(\bar{h}, \rho)$ был выполнен по формулам (2.2) и (2.4) на быстродействующей электронной счетной машине. Для суммы ряда (2.2) выписывалась асимптотическая формула [6], по которой делались оценки количества членов ряда из расчета, чтобы отношение остаточного члена ряда к его частичной сумме составляло не более 0.1% (фактически расчетная точность выше, так как удерживалось членов ряда больше заданного; так для некоторых ρ удерживалось 60 членов). Результаты расчетов для различных ρ сведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены значения $q = q(h)$ для $\rho = 1$ и $\rho = 4$, рассчитанные по формуле (2.4) и по И. А. Чарному [5].



Фиг. 3 *a*



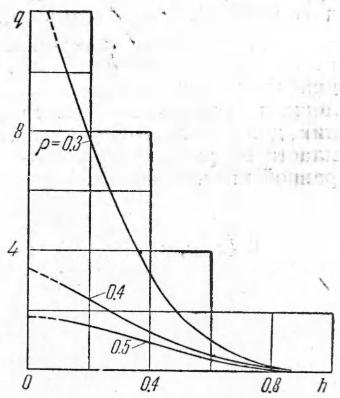
Фиг. 3 *b*

Как видно из таблицы, совпадение хорошее. По данным табл. 1 построены универсальные графики $q = q(h)$ для различных ρ, представленные на фиг. 3, *a*, *b*, *c*.

Из табл. 1 и графиков $q = q(h)$ видно, что с уменьшением ρ (т. е. при больших $\varkappa$), предельные дебиты увеличиваются и для $\rho = 0.01$ достигают весьма большой величины (практически стремятся к бесконечности), а значения ξ_0 стремятся к единице. Это говорит о том, что в сильно анизотропных пластах конусообразование проявляется очень слабо или совсем отсутствует.

Полученные безразмерные графики позволяют при известной характеристике анизотропии пласта $\varkappa$ определять предельные безводные дебиты Q нефти или газа (формула (2.4)).

Авторы признательны В. Томелькасу за произведенный счет на БЭСМ и И. А. Чарному за совместное обсуждение статьи.



Фиг. 3 *c*

Поступила 3 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., ИИЛ, 1955.
2. Иваненко Д. и Соколов А. Классическая теория поля. М., 1951.
3. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.
4. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М., Гостехиздат, 1956.
5 Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. М., ГНТИ нефтяной и горнотопливной литературы, 1956.
6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т, II, М., Гостехиздат, 1956.