

**ФЛАТТЕР ПАНЕЛИ В ПОТОКЕ СЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

А. Д. Лисунов

(Новосибирск)

Настоящая работа посвящена рассмотрению флаттера свободно опертой прямоугольной пластинки постоянной толщины, обтекаемой с одной стороны идеально проводящей невязкой сжимаемой жидкостью. С другой стороны пластинки жидкость не является проводником электричества и находится в покое под давлением, равным давлению невозмущенного обтекающего потока. Внешнее магнитное поле параллельно скорости потока. Гидродинамическая нагрузка определяется по стационарной двумерной теории малых возмущений.

§ 1. Дифференциальное уравнение изгиба пластинки (фиг. 1) имеет вид [1]

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \gamma \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \quad \left(D = \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad (1.1)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — поперечный прогиб пластинки; $p(x, y, t)$ — гидродинамическая нагрузка; γ — массовая плотность материала пластинки.

Выражение для гидродинамической нагрузки в случае параллельности векторов скорости и внешнего магнитного поля имеет вид

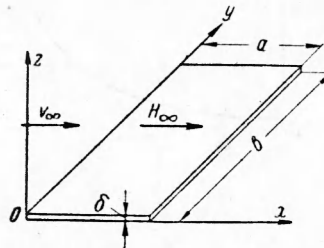
$$p = \rho_\infty V_\infty^2 \left(\frac{1}{m^2 V_\infty} \int_0^\infty \frac{\partial v_y}{\partial x} dy \pm \frac{m^2 - 1}{m^2 \sqrt{k^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

Здесь ρ_∞ и V_∞ — плотность и скорость невозмущенного потока соответственно, v_y — вертикальная компонента возмущенной скорости, m — число Альфвена (отношение скорости потока к скорости распространения магнитогиродинамических волн), H_∞ — напряженность внешнего магнитного поля, M_∞ — число M невозмущенного потока.

$$k^2 - 1 = \frac{(M_\infty^2 - 1)(m^2 - 1)}{M_\infty^2 + m^2 - 1} \quad \left(m = \sqrt{4\pi\rho_\infty} \frac{V_\infty}{H_\infty} \right)$$

Полагая, что затухание v_y происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания μ

$$v_y = V_\infty \frac{\partial w}{\partial x} e^{-\mu y}$$



Фиг. 1

Для гидродинамической нагрузки получим окончательное выражение в следующем виде:

$$p = \rho_\infty V_\infty^2 \left(\frac{1}{\mu m^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm \frac{m^2 - 1}{m^2 \sqrt{k^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

Формула (1.3) справедлива при соотношении между величинами M_∞ и m , выражаемом неравенством

$$M_\infty^2 + m^2 - 1 < \frac{M_\infty^2 m^2}{2} \quad (1.4)$$

В случае отсутствия внешнего магнитного поля ($H_\infty = 0, m \rightarrow \infty$) формула (1.3) сводится к хорошо известной формуле Аккерета

$$p = \pm \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{M_\infty^2 = 1} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.5)$$

После подстановки (1.3) в (1.1) уравнение изгиба принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \gamma \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{\mu m^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_\infty V_\infty^2 \frac{m^2 - 1}{m^2 \sqrt{k^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

Граничные условия для свободно опертой пластинки

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.7)$$

§ 2. Решение уравнения (1.6), удовлетворяющее граничным условиям (1.7), может быть выполнено методом Галеркина аналогично тому, как это было сделано в работе [2]. Для этого представим прогиб

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^i \sum_{q=1}^j a_{nq} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi q y}{b} e^{\omega t} \quad (2.1)$$

где ω является пока неизвестной комплексной функцией.

Подстановка (2.1) в (1.6) дает

$$\sum_{n=1}^i \sum_{q=1}^j a_{nq} \left(A_{nq} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi q y}{b} - \lambda n \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi q y}{b} \right) = 0 \quad (2.2)$$

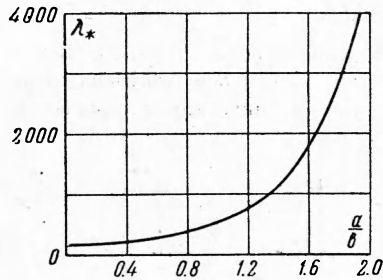
Здесь

$$A_{nq} = \left[n^2 + q^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{\gamma \delta a^4}{\pi^4 D} \omega^2 + \frac{a^2 \rho_{\infty} V_{\infty}^2}{\pi^2 \mu m^2 D} n^2, \quad \lambda = \frac{a^3 \rho_{\infty} V_{\infty}^2}{\pi^3 m^2 D} \frac{m^2 - 1}{\sqrt{k^2 - 1}} \quad (2.3)$$

В результате умножения уравнения (2.2) на

$$\sin \frac{\pi r x}{a} \sin \frac{\pi s y}{b}$$

и интегрирования по площади пластинки получается система уравнений для коэффициентов a_{nq}



Фиг. 2

$$A_{nq} a_{nq} - \lambda \sum_{r=1}^i \sum_{s=1}^j a_{rs} Q_{nq, rs} = 0 \quad (2.4)$$

где обобщенная сила $Q_{nq, rs}$, характеризующая действие колебания тона rs на колебание тона nq , равна

$$Q_{nq, rs} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{rn}{r^2 - n^2} & (q = s, n + r - \text{нечетное}) \\ 0 & (q = s, n + r - \text{четное}) \\ 0 & (q \neq s) \end{cases} \quad (2.5)$$

Для существования нетривиального решения системы однородных уравнений (2.4) необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов A_{nq} и $\lambda Q_{nq, rs}$, равнялся нулю. Получившееся уравнение решается относительно ω и находится граница неустойчивости и соответствующая ей критическая скорость флаттера пластинки в функции от a/b , δ/a , E и m при соответствующих параметрах потока.

§ 3. Если ограничиться рассмотрением двух тонов колебаний по оси x и одним тоном по оси y и считать, что μ достаточно велико, чтобы пренебречь первым слагаемым в формуле (1.3), можно получить довольно простую формулу для определения критической скорости флаттера. В этом случае $r = 1.2$, $s = 1$ и система уравнений (2.4) примет вид

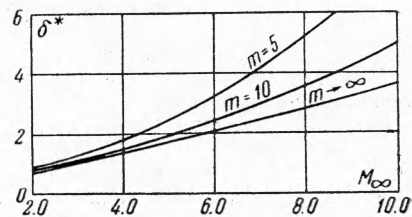
$$A_{11} a_{11} - \lambda Q_{11,21} a_{21} = 0, \quad A_{21} a_{21} - \lambda Q_{21,11} a_{11} = 0 \quad (3.1)$$

Замечая, что $Q_{nq, rs} = -Q_{rq, ns}$, характеристическим уравнением системы (3.1) будет

$$A_{11} A_{21} + \lambda^2 Q_{11,21}^2 = 0 \quad (3.2)$$

После подстановки сюда значений A_{11} , A_{21} и $Q_{11,21}$ из (2.3) и (2.5) и решения относительно ω получается (если считать, что коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$) следующая формула

$$\omega = 2.1 \sqrt{\frac{E}{\gamma}} \frac{\delta}{a^2} \left(- \left[17 + 10 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right]^2 \mp \sqrt{\left[17 + 10 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right]^4 - 4 \left\{ 0.72 \lambda^2 + \left[4 + 5 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right]^2 \right\}} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$



Фиг. 3

Как видно отсюда, граница неустойчивости будет определяться уравнением

$$\lambda_* = 0.589 \sqrt{\left[17 + 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]^2 - 4\left[4 + 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^4\right]^2}$$

Величина во вторых скобках в подкоренном выражении намного меньше первого слагаемого и потому

$$\lambda_* \approx 0.589 \left[17 + 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]^2 \quad (3.4)$$

На фиг. 2 построена зависимость $\lambda^* = f(a/b)$. Таким образом, из (2.3) легко можно найти

$$\delta^* = \frac{E}{\rho_\infty c_\infty^2} \left(\frac{\delta}{a}\right)^3 = 0.35 \frac{M_\infty^2}{\lambda_*} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \sqrt{\frac{M_\infty^2 + m^2 - 1}{(M_\infty^2 - 1)(m^2 - 1)}} \quad (3.5)$$

где c_∞ — скорость звука в жидкости.

Эта зависимость и показана на фиг. 3 для свободно опертой квадратной пластинки при различных значениях числа Альфвена. Как видно из графика, увеличение напряженности внешнего магнитного поля (уменьшение m) ведет к снижению критической скорости флаттера.

Поступила 2 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Sears W. R. Magneto-hydrodynamic effects in aerodynamic flows. ARS J. (Jet Propulsion). 1959, vol. 29, № 6.
2. Хеджет Дж., Флаттер прямоугольных свободноопертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1958, № 2.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ КРЫЛА ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Н. Панченко

(Киев)

С использованием теории малых волн задача о движении тела, погруженного в жидкость, исследовалась в работах многих авторов [1, 2].

При помощи общего метода Н. Е. Кочина можно получить приближенное решение задачи о движении крыла вблизи свободной поверхности.

Удовлетворяя условиям теоремы Н. Е. Жуковского в «малом» для комплексной скорости, можно написать выражение

$$V(z) = V_\infty(z) + V_2(z) \quad (1)$$

где $V_\infty(z)$ — комплексная скорость движения крыла в безграничном потоке,

$$V_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{V_\infty(\zeta)} \left[\frac{1}{z - \zeta} - 2i v e^{-i v z} \int_{+\infty}^z \frac{e^{i v t}}{t - \zeta} d\zeta \right] \quad (2)$$

Для сил воздействия потока имеем выражения

$$P_h = \rho v_0 \Gamma_\infty - \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty |H(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{\rho v}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^1 |H(v - \lambda v)|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (3)$$

$$Q = \rho v |H(v)|^2$$

где Γ_∞ — циркуляция вокруг крыла в безграничном потоке, а функция $H(\lambda)$ определяется выражением

$$H(\lambda) = \int_C e^{-i\lambda z} V_\infty(z) dz \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения: h — относительное погружение крыла; b — хорда крыла, принятая за характерный размер; δ — относительная толщина крыла; ζ — поправка для учета конечности размаха крыла вблизи свободной поверхности; τ — коэффициент, учитывающий форму крыла в плане; α'_k — кромочный угол; α_n — угол нулевой подъемной силы.