

УДК 531.45+539.374

## ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ КАК ВЯЗКОУПРУГИЙ ДИССИПАТИВНЫЙ ПРОЦЕСС

В. С. Булыгин

Московский государственный технологический университет "Станкин", 101402 Москва

С использованием тензора вязкости (диссипативного тензора) рассчитаны вязкие добавки к тензору напряжения на поверхности полупространства, по которой движется шар. Найдена сила трения качения, соответствующая закону Кулона и пропорциональная скорости, являющаяся одновременно оценкой снизу для силы трения скольжения. Приводятся выражения для радиального и вертикального смещений на поверхности упругого полупространства.

Трение качения можно рассматривать как результат совокупного действия различных диссипативных процессов как внутри катящегося тела, так и в теле, по которому происходит движение. Такими процессами могут быть возбуждение акустических волн, теплопроводность при неравномерном нагреве, а также диссипативные процессы, связанные с конечной скоростью деформаций, т. е. внутреннее трение (вязкость). Ниже рассматриваются процессы, обусловленные внутренним трением.

Если скорость деформации мала и, следовательно, диссипация энергии незначительна (что имеет место при качении в нормальных условиях), эффекты вязкости при деформировании могут быть описаны тензором вязкости, или диссипативным тензором  $\eta_{iklm}$  [1]. С его помощью могут быть вычислены объемная плотность диссипативной мощности, силы внутреннего трения в деформируемом теле, а также обусловленные вязкостью добавки к тензору напряжений. В изотропном теле тензор  $\eta_{iklm}$  имеет только две независимые компоненты: коэффициент вязкости при чистом сдвиге  $\eta$  и коэффициент вязкости при всестороннем сжатии  $\zeta$ . При этом вязкая составляющая тензора напряжений определяется выражением [1]

$$\sigma'_{ik} = 2\eta(\dot{u}_{ik} - \dot{u}_{ll}\delta_{ik}/3) + \zeta\dot{u}_{ll}\delta_{ik}, \quad (1)$$

где  $\dot{u}_{ik}$  — производные тензора деформации по времени;  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера; по повторяющимся индексам проводится суммирование:  $u_{ll} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \text{div } \mathbf{u}$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор деформации.

При качении тела по некоторой поверхности на ней возникает напряженное состояние, упругая часть которого является симметричной вдоль направления движения и поэтому не оказывает влияния на качение. Вязкая составляющая напряжений на поверхности качения несимметрична вдоль направления движения, поскольку знаки скоростей деформаций перед и за катящимся телом различны (перед телом происходит сжатие, а позади — разгрузка). По этой причине давление на переднюю и заднюю части тела будет различным, чем обуславливается сопротивление качению, т. е. трение качения тела.

В качестве примера рассмотрим качение шара по плоской поверхности вязкоупругого полупространства. Так как вязкие поправки к деформированному состоянию в данном случае малы, будем считать, что пятно контакта является кругом радиуса  $a$ , определяемого решением соответствующей контактной задачи (задача Герца [1, 2]) и для определения  $\sigma'_{ik}$  можно использовать тензор деформации, получаемый из решения соответствующей

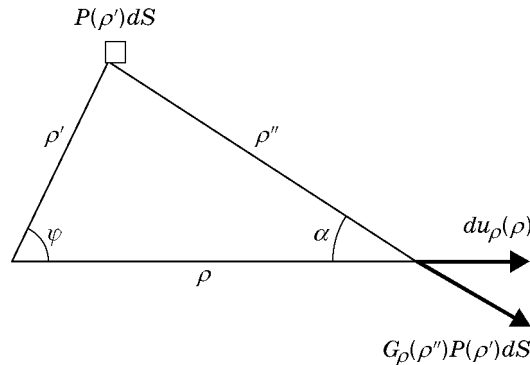


Рис. 1

щей упругой задачи. Следовательно, упругая часть деформации будет осесимметричной, и в цилиндрической системе координат с осью  $z$ , проходящей через центр шара внутрь полупространства, по поверхности которого он катится, вектор деформации  $\mathbf{u}$  будет иметь только две компоненты  $u_\rho(\rho, z)$  и  $u_z(\rho, z)$ . При этом

$$u_{||} = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + u_{zz},$$

где  $u_{zz} = \partial u_z / \partial z$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Таким образом, необходимая в дальнейшем составляющая тензора вязких напряжений согласно (1) имеет вид

$$\sigma'_{zz}(\rho, z) = \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \dot{u}_\rho) + \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \dot{u}_{zz}. \quad (2)$$

Для нахождения компонент упругой части вектора деформации воспользуемся функциями Грина, т. е. реакциями на сосредоточенные силы, которые для случая сил, перпендикулярных поверхности полупространства, принимают вид [1, 2]

$$G_\rho(\rho, z) = \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[ \frac{z}{r^3} - \frac{1 - 2\nu}{r(r+z)} \right] \rho, \quad G_z(\rho, z) = \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[ \frac{2(1 - \nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right], \quad (3)$$

где  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для полупространства;  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Функции Грина позволяют находить компоненты вектора деформации  $\mathbf{u}$  по известному давлению  $P(x, y)$  на поверхности деформируемого полупространства, которое в случае вдавливания в поверхность полупространства шара согласно [1, 2] в области контакта представляется в виде

$$P(x, y) = \frac{3N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2} \quad (\rho \leq a), \quad (4)$$

где  $N$  — сила нормального давления шара;  $a = \{ (3/4)[(1 - \nu^2)/E + (1 - \nu_{\text{ш}}^2)/E_{\text{ш}}] RN \}^{1/3}$  — радиус пятна контакта;  $R$  — радиус шара;  $E_{\text{ш}}, \nu_{\text{ш}}$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона шара.

Получим выражение для  $u_\rho$  на поверхности полупространства. С учетом (3) можно записать (рис. 1)

$$du_\rho = G_\rho(\rho'', 0) \cos \alpha P(\rho') dS = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \frac{\rho - \rho' \cos \varphi}{\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho'\rho \cos \varphi} P(\rho') \rho' d\rho' d\varphi,$$

откуда

$$u_\rho(\rho, 0) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\pi E} \int_0^a d\rho' \rho' P(\rho') \int_0^\pi \frac{\rho - \rho' \cos \varphi}{\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho'\rho \cos \varphi} d\varphi.$$

Можно показать (см. [3], формула 3.613.2), что

$$\int_0^{\pi} \frac{\rho - \rho' \cos \varphi}{\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho'\rho \cos \varphi} d\varphi = \pi \frac{H(\rho - \rho')}{\rho},$$

где  $H(\rho)$  — функция Хевисайда (единичная функция). Таким образом, окончательно получим

$$u_{\rho}(\rho, 0) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E\rho} \int_0^{\rho} P(\rho')\rho' d\rho'. \quad (5)$$

Следует отметить, что полученное выражение (5) для радиальной деформации на поверхности полупространства при осесимметричной нормальной нагрузке является более простым и удобным для вычислений, чем приведенное в [2].

Получим выражение для  $u_{zz} = \partial u_z / \partial z$  на граничной поверхности, необходимое для вычисления тензора вязких напряжений (2). Компонента  $u_z$  вектора деформации есть свертка функции Грина  $G_z$  и давления на поверхности  $P$  [1]

$$u_z(x, y, z) = \iint G_z(x - x', y - x', z)P(x', y') dx' dy',$$

при осесимметричном давлении  $P(x, y) \equiv P(\rho)$  принимающая вид

$$\bar{u}_z(w, z) = 2\pi \bar{G}_z(w, z) \bar{P}(w), \quad (6)$$

где  $\bar{u}_z$ ,  $\bar{G}_z$ ,  $\bar{P}$  — преобразования Ханкеля нулевого порядка соответствующих функций [4]. Из (3) можно получить (см. [3], формулы 6.554.1, 6.554.4)

$$\bar{G}_z(w, z) = \int_0^{\infty} G_z(\rho, z) J_0(w\rho) \rho d\rho = \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left( \frac{2(1 - \nu)}{w} + z \right) e^{-wz}. \quad (7)$$

Здесь  $J_0(x)$  — функция Бесселя. Подставив выражение (7) в (6) и для нахождения  $\bar{u}_{zz}$  продифференцировав (6) по  $z$ , нетрудно установить, что так как  $\partial \bar{G}_z / \partial z$  при  $z = 0$  есть константа, не зависящая от параметра преобразования Ханкеля  $w$ , то при  $z = 0$  преобразования Ханкеля  $\bar{u}_{zz}$  и  $\bar{P}$  пропорциональны, а следовательно, пропорциональны и сами функции. Таким образом, на поверхности полупространства

$$u_{zz}(\rho, 0) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} P(\rho). \quad (8)$$

Подставляя (5) и (8) в (2), получим выражение для тензора вязких напряжений на поверхности

$$\sigma'_{zz} = -\frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \dot{P}(\rho), \quad (9)$$

причем если упругие напряжения  $P(\rho)$ , создаваемые катящимся шаром, перемещаются со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$ , то с учетом (4)

$$\dot{P}(\rho) = \frac{dP}{d\rho} \dot{\rho} = -v \frac{x}{\rho} \frac{dP}{d\rho} = -v \frac{3N}{2\pi a^4} \frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)/a^2}}. \quad (10)$$

Коэффициент при  $\dot{P}(\rho)$  в (9) имеет, очевидно, размерность времени и является, как можно показать, временем релаксации на поверхности вязкоупругого тела компонент его тензора

деформации, т. е. временем релаксации поверхностных относительных деформаций. Вводя обозначение для времени релаксации на поверхности

$$\tau = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) = \frac{\zeta + \eta/3}{K + \mu/3}, \quad (11)$$

где  $K = E/[3(1-2\nu)]$  — модуль всестороннего сжатия;  $\mu = E/[2(1+\nu)]$  — модуль сдвига, запишем выражение (9) для тензора вязких напряжений на поверхности с учетом выражения (10) в виде

$$\sigma'_{zz}(x, y) = -v\tau \frac{3N}{2\pi a^4} \frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)/a^2}}.$$

Момент сил трения качения можно получить интегрированием давления на поверхности, равного тензору вязких напряжений с обратным знаком, по площади пятна контакта, имеющего радиус  $a$ :

$$M_{\text{тр}} = - \int_{-a}^a dx x \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sigma'_{zz}(x, y) dy = v\tau N \frac{3}{2\pi} \int_{-1}^1 d\theta \theta^2 \int_{-1}^1 \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} = v\tau N. \quad (12)$$

Считая силу трения качения  $F_{\text{тр}}$  приложенной к центру катящегося шара, из (12) получим

$$F_{\text{тр}} = N \frac{\tau v}{R}, \quad (13)$$

где  $R$  — радиус катящегося шара;  $N$  — сила нормального давления;  $v$  — скорость качения;  $\tau$  — время релаксации на поверхности качения, определяемое в (11). Пропорциональность силы трения (13) отношению  $N/R$  соответствует закону Кулона.

Следует отметить, что при скольжении шара по идеально скользкой поверхности, когда отсутствуют вызываемые трением скольжения касательные напряжения, напряженное состояние остается таким же, как и при качении шара, т. е. сила трения скольжения отлична от нуля при скольжении по идеально скользкой поверхности. Таким образом, значение силы, определяемое по (13), оценивает снизу силу трения скольжения шара.

В заключение приведем выражения для радиальной  $u_\rho(\rho, 0)$  и вертикальной  $u_z(\rho, 0)$  компонент вектора деформации на поверхности упругого полупространства при вдавлении в нее шара. Подставляя (4) в (5), получим

$$u_\rho(\rho, 0) = -\frac{N}{a} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \begin{cases} (1 - (1-r^2)^{3/2})/r, & r \leq 1, \\ 1/r, & r \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь и далее  $r \equiv \rho/a = \sqrt{(x/a)^2 + (y/a)^2}$ ; фигурной скобкой отделена часть  $u_\rho$ , зависящая только от координат. Зависимость  $u_\rho(\rho, 0)$  без учета числового множителя перед фигурной скобкой в (14) изображена на рис. 2, а. На рис. 2, б показана поверхность  $u_\rho(x, y, 0)$ . Радиальное смещение (14) везде направлено к центральной точке касания шара с поверхностью полупространства. Его наибольшее значение достигается при  $\rho = a(3/4)^{1/4} = 0,931a$ , т. е. внутри пятна контакта, и составляет 1,022 значения выражения  $(N/a)(1+\nu)(1-2\nu)/(2\pi E)$  в (14).

Вертикальное смещение поверхности полупространства  $u_z(\rho, 0)$  есть обратное преобразование Ханкеля выражения (6) при  $z = 0$ . Так как преобразование Ханкеля выражения (4) (см. [3], формула 6.567.1) равно

$$\bar{P}(w) = \int_0^a P(\rho) J_0(w\rho) \rho d\rho = \frac{3N}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} J_0(awr) r dr = \frac{3N}{2\sqrt{2\pi}} \frac{J_{3/2}(aw)}{(aw)^{3/2}},$$

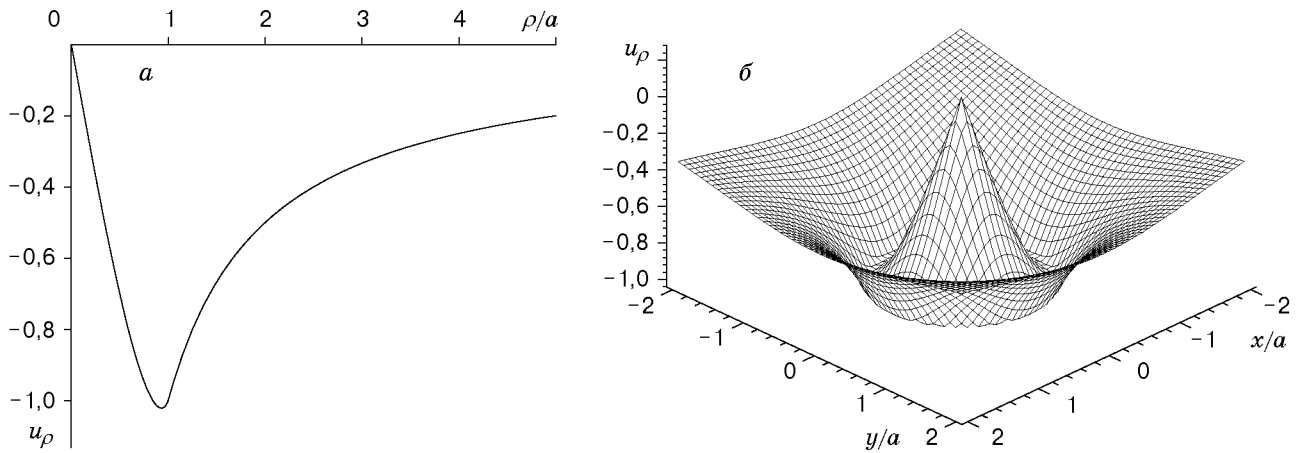


Рис. 2

то с учетом (6) и (7)

$$u_z(\rho, 0) = 2\pi \int_0^\infty \bar{P}(w) \bar{G}_z(w, 0) J_0(\rho w) w dw = \frac{3N}{a\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \nu^2}{E} \int_0^\infty J_{3/2}(w_0) J_0\left(\frac{\rho}{a} w_0\right) w_0^{-3/2} dw_0.$$

Отсюда после вычисления интеграла (см. [3], формула 6.574.1) получаем

$$u_z(\rho, 0) = \frac{3N}{4a} \frac{1 - \nu^2}{E} \begin{cases} 1 - r^2/2, & r \leq 1, \\ (4/(3\pi r)) F(1/2, 1/2; 5/2; 1/r^2), & r \geq 1, \end{cases} \quad (15)$$

где  $F(\dots)$  — гипергеометрическая функция Гаусса. Фигурная скобка в выражении (15) отделяет координатно-зависимую часть  $u_z$  на поверхности полупространства. Зависимость  $u_z(\rho, 0)$  без учета числового множителя перед фигурной скобкой в (15) изображена на рис. 3, а. На рис. 3, б показана поверхность  $u_z(x, y, 0)$ . Вертикальное смещение поверхности (15) повторяет в пятне контакта форму вдавленного шара и монотонно уменьшается от максимального значения  $(3N/a)(1 - \nu^2)/(4E)$ , достигаемого в центре пятна контакта.

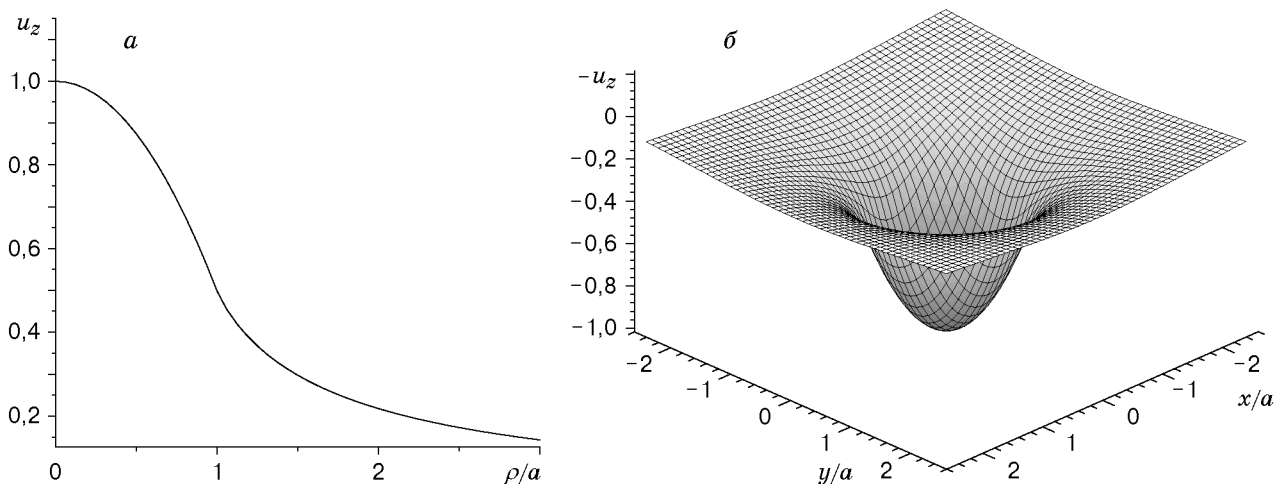


Рис. 3

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
2. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
3. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

*Поступила в редакцию 15/II 1999 г.,  
в окончательном варианте — 25/IX 2000 г.*

---