

**НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ  
ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД  
В БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ТРУБОПРОВОДЕ**

Р. М. Саттаров

(Баку)

1. Рассматривается неустановившееся движение сжимаемой вязкопластичной среды, свойства которой меняются по степенному и нелинейному законам, в тонкостенной трубе из вязкоупругого максвелловского тела, описываемое уравнением  $\dot{\gamma} = \tau/G + \tau/\mu$ .

Предполагается, что первоначально расход и давление во всей трубе, занимающей полупространство  $x \geq 0$  постоянно и равно нулю, а в момент  $t = 0$  границе  $x = 0$  сообщается давление  $p = \varphi(t)$  или расход  $M = \psi(t)$ .

Решение задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений [1]

$$(1.1) \quad \frac{1}{f_0} \frac{\partial M}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} - m_1 M;$$

$$(1.2) \quad \frac{R}{\delta} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{R}{\delta} \frac{\mu}{G} + \frac{\mu}{2K_{ж}} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\mu}{2\rho_0 f_0} \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} = 0,$$

$$m_1 = \frac{16\eta_a}{4\rho_0 f_0 R r} \left( \frac{3n+1}{4n} \right), \quad m_2 = \frac{16\eta_p}{4\rho_0 f_0 R r} \frac{1}{\sigma},$$

$$\sigma = \frac{(1 - \beta_0^{1/n})^{n+1} \beta_0^{3n-1}}{C_{n-1}^n} \sum_{k=0}^{3n-1} C_{4n-k-1}^n \beta_0^{k/n}.$$

При  $j = 1$  уравнение (1.1) описывает движение «степенной» среды, при  $j = 2$  уравнение (1.1) описывает движение нелинейно-вязкопластичной среды. Здесь  $p$  — давление;  $M$  — массовый расход;  $R$  — радиус трубы;  $\delta$  — толщина стенок трубы;  $\rho_0$  — плотность среды;  $f_0$  — площадь поперечного сечения трубы;  $K_{ж}$  — модуль упругости жидкости;  $G$  — модуль сдвига материала трубы;  $\mu$  — вязкость материала трубы;  $\eta_a$  — кажущаяся вязкость;  $\eta_p$  — аналог пластической вязкости;  $r$  — гидравлический радиус;  $n$  — параметр нелинейности;  $\beta_0$  — безразмерный радиус ядра;  $\sigma$  — напряжение сдвига материала трубы;  $\gamma$  — деформация сдвига материала трубы; точка над буквами обозначает оператор  $d/dt$ . Значение  $m_2$  уточнено из [2], поскольку в [1] оно определялось для малых значений ядер течения. Начальные и граничные условия для данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} M(x, t) = 0, \quad p(x, t) = 0, \quad t \leq 0; \\ \left. \begin{aligned} p(0, t) = \varphi(t) \\ M(0, t) = \psi(t) \end{aligned} \right\} t > 0 \quad \begin{array}{l} \text{случай А,} \\ \text{случай В.} \end{array} \end{aligned}$$

Кроме того, предполагается, что функция  $p(x, t)$  и  $M(x, t)$  ограничены при  $x \rightarrow \infty$ .

Решим задачу для случая А.

Исключив из уравнений (1.1), (1.2) расход, получим дифференциальное уравнение относительно  $p$

$$(1.3) \quad A \partial^3 p / \partial t^3 + B \partial^2 p / \partial t^2 + D \partial p / \partial t = \partial^3 p / \partial t \partial x^2$$

при начальных и граничных условиях

$$(1.4) \quad \begin{cases} p(0, x) = 0, & \partial p(0, x)/\partial t = 0, & \partial^2 p(0, x)/\partial t^2 = 0, \\ p(t, 0) = \varphi(t), & p(t, \infty) = 0, \end{cases}$$

где

$$A = R/\delta \cdot 2\rho_0/G + \rho_0/K_{ж} = 1/C^2; \quad B = f_0 m_j / C^2 + 2Rf_0/\delta\mu; \quad D = 2R\rho_0 f_0 m_j / \delta\mu.$$

Применив преобразование Лапласа к (1.3), (1.4), получим

$$(1.5) \quad \partial^2 p^*/\partial x^2 - (As^2 + Bs + D)p^* = 0;$$

$$(1.6) \quad p^*(s, 0) = \varphi^*(s), \quad p^*(s, \infty) = 0,$$

$$p^*(s, x) = \int_0^\infty e^{-st} p(x, t) dt, \quad \varphi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt.$$

Решение (1.5) при граничных условиях (1.6) имеет вид

$$p^*(s, x) = \varphi^*(s) \exp(-x\sqrt{As^2 + Bs + D}).$$

Переходя к оригиналу, имеем

$$(1.7) \quad p(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{c} \\ e^{-\frac{B}{2}Cx} \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) - xC\sqrt{\beta} \int_{\frac{x}{c}}^t \varphi(t - \tau) e^{-\frac{B}{2}C\tau} \frac{J_1\left(C^2\sqrt{\beta}\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}} d\tau & \text{при } t \geq \frac{x}{c}, \end{cases}$$

где  $\beta = AD - (B/2)^2$ .

Расход определяется по формуле

$$(1.8) \quad M = -f_0 \int_0^t e^{-f_0 m_j(t-\tau)} \frac{dp(x, \tau)}{dx} d\tau.$$

Поступая аналогично изложенному, решение для случая В представим в виде

$$(1.9) \quad M(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{c} \\ e^{-\frac{B}{2}Cx} \psi\left(t - \frac{x}{c}\right) - xC\sqrt{\beta} \int_{\frac{x}{c}}^t \psi(t - \tau) e^{-\frac{B}{2}C\tau} \frac{J_1\left(C^2\sqrt{\beta}\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}} d\tau & \text{при } t \geq \frac{x}{c}; \end{cases}$$

$$(1.10) \quad p(x, t) = - \int_0^x \left( \frac{1}{f_0} \frac{\partial M}{\partial t} + m_j M \right) dx.$$

Закон изменения поперечного сечения трубы  $f$  определяется из выражения [1]

$$f - f_0 = (2f_0/\delta\mu)(\partial p/\partial t + t_0 p),$$

где  $t_0 = \mu/G$  — время релаксации.

Величины  $B$  и  $D$ , входящие в формулы (1.7) — (1.10), пропорциональны  $m_j$  и обратно пропорциональны  $\mu$ . Параметр  $m_1$  («степенная» жидкость) меняется от изменения  $n$  при прочих равных условиях в пределах  $3\eta_a/\rho_0 f_0 Rr - \infty$ , причем увеличение  $n$  ( $n > 1$  — дилатантная среда) приводит к уменьшению  $m_1$ , а следовательно,  $B$  и  $D$ , уменьшение же  $n$  ( $n < 1$  — псевдопластичность) — к увеличению  $m_1$ ,  $B$  и  $D$ . Анализ параметра  $m_2$  показывает, что увеличение параметра нелинейности, а также предельного напряжения сдвига  $\tau_0(\beta_0)$  увеличивает значения параметров  $m_2$ ,  $B$  и  $D$ .

Изложенное показывает, что при движении «степенной» среды ослабление давления и расхода с течением времени происходит для псевдопластичных сред быстрее, чем для вязкой и дилатантной сред. Для нелинейно-вязкопластичной же среды увеличение параметра нелинейности  $n$  и предельного напряжения сдвига  $\tau_0(\beta_0)$  приводит к более интенсивному ослаблению давления и расхода.

Уменьшение вязкости материала трубы (последнее равносильно уменьшению времени релаксации материала трубы) также приводит к ослаблению давления и расхода.

Вышеизложенное выражает важную идею, заключающуюся в том, что на движение можно воздействовать путем изменения либо характеристик перекачиваемой среды, либо вязкости материала трубы.

Если примем  $\mu \rightarrow \infty$  в формулах (1.7) — (1.10), то они приведут к выражениям давления и расхода в упругой трубе, причем в этом случае

$$B = f_0 m_j / C^2; \quad D = 0.$$

Пусть теперь в начале упругого трубопровода задан скачок давления или расхода, т. е.

$$(1.11) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ p_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M_0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Подставляя граничные условия (1.11) в формулы (1.7) — (1.10), получим в случае А

$$p(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{C} \\ \bar{p}_0 \left[ e^{-\frac{f_0 m_j}{2C} x} + \frac{f_0 m_j}{2C} x \int_{\frac{x}{C}}^t e^{-\frac{f_0 m_j}{2} \tau} I_1 \left( \frac{f_0 m_j}{2} \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}} \right] & \text{при } t \geq \frac{x}{C}; \end{cases}$$

$$M(x, t) = \frac{p_0 f_0}{C} \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{C} \\ e^{-\frac{f_0 m_j}{2} t} I_0 \left( \frac{f_0 m_j}{2} \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{C^2}} \right) & \text{при } t \geq \frac{x}{C}; \end{cases}$$

в случае В

$$(1.12) \quad p(x, t) = \frac{M_0 C}{f_c} \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{C} \\ e^{-\frac{f_0 m_j}{2C} x} + \frac{m_j f_0}{2} \int_{\frac{x}{C}}^t e^{-\frac{f_0 m_j}{2} \tau} \left[ I_0 \left( \frac{f_0 m_j}{2} \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\tau I_1 \left( \frac{f_0 m_j}{2} \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}} \right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}} \right] d\tau & \text{при } t \geq \frac{x}{C}; \end{cases}$$

$$M(x, t) = M_0 \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{C} \\ e^{-\frac{f_0 m_j}{2C} x} + \frac{f_0 m_j}{2C} x \int_{\frac{x}{C}}^t e^{-\frac{f_0 m_j}{2} \tau} \frac{I_1 \left( \frac{f_0 m_j}{2} \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}} \right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{C^2}}} d\tau & \text{при } t \geq \frac{x}{C}. \end{cases}$$

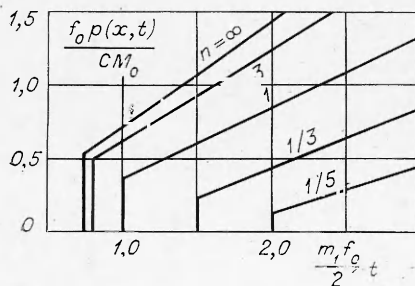
На фиг. 1,2 приведены результаты расчетов по формуле (1.12) соответственно при движении «степенной» и нелинейно-вязкопластичной сред. В этом случае для «степенной» среды принималось  $m_{10} x/C = 1$ , а для нелинейно-вязкопластичной среды  $m_{20} x/C = 1$ , где значения  $m_{10}$  и  $m_{20}$  имеют вид

$$m_{10} = 4\eta_a/\rho_0 R^2; \quad m_{20} = 4\eta_p/\rho_0 R^2.$$

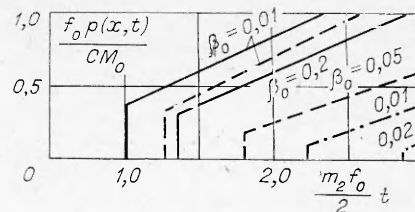
На фиг. 2,3 сплошные линии соответствуют параметру  $n = 1$ , штриховые  $n = 2$  и штрихпунктирные  $n = 3$ .

Из фиг. 1 видно, что уменьшение реологического параметра  $n$  «степенной» среды увеличивает время запаздывания распространения скачка, причем при  $n \rightarrow 0$  это время стремится к бесконечности, т. е. давление по всей трубе не меняется и равно нулю. Это обстоятельство, вероятно, связано больше с известными ограничениями степенного реологического уравнения в диапазоне малых скоростей сдвига, нежели с реальным поведением среды в трубопроводе.

Фиг. 2 показывает, что увеличение параметра  $n$  и радиуса квазистержневой зоны приводит к возрастанию времени запаздывания. Причем с ростом параметра нелинейности  $n$  темп возрастания времени запаздывания увеличивается.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Рассматривается неустановившееся движение сжимаемой «степенной» и нелинейно-вязкопластичной среды в тонкостенной трубе из вязкоупругого материала, описываемое уравнением Фойгта  $\tau = G\gamma + \mu\dot{\gamma}$ . Постановка задачи такая же, как и в п. 1.

Решение задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений [1]

$$(2.1) \quad \frac{1}{f_0} \frac{\partial M}{\partial t} + m_j \bar{M} = - \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$(2.2) \quad \left( \frac{R}{\delta} + \frac{G}{2K_{ж}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{G}{2\rho_0 f_0} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\mu}{2K_{ж}} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\mu}{2\rho_0 f_0} \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} = 0$$

(обозначения те же, что и в п. 1).

Начальные и граничные условия для данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} M(x, t) = 0, \quad p(x, t) = 0, \quad t \leq 0; \\ \left. \begin{aligned} p(0, t) = \varphi(t) \\ M(0, t) = \psi(t) \end{aligned} \right\} t > 0 \quad \begin{array}{l} \text{случай А,} \\ \text{случай В.} \end{array} \end{aligned}$$

Функции  $p(x, t)$  и  $M(x, t)$  ограничены при  $x \rightarrow \infty$ . Вначале задача решается для случая А. Исключив из уравнений (2.1), (2.2) расход  $M$ , получим дифференциальное уравнение относительно  $p$

$$(2.3) \quad A \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + B \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + D \frac{\partial p}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}$$

при начальных и граничных условиях

$$(2.4) \quad \begin{cases} p(0, x) = 0, \quad \frac{\partial p(0, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 p(0, x)}{\partial t^2} = 0, \\ p(0, t) = \varphi(t), \quad p(t, \infty) = 0, \end{cases}$$

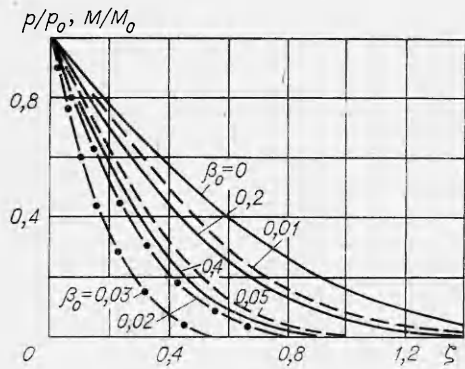
где  $A = \rho_0/K_{ж}$ ;  $B = \lambda/C^2 + Am_j f_0$ ;  $D = f_0 \lambda m_j / C^2$ ;  $1/\lambda = \mu/G$  — время запаздывания. Применив к системе равенств (2.3), (2.4) преобразование Лапласа и решив полученное дифференциальное уравнение относительно изображений функции  $p(x, t)$ , получим

$$(2.5) \quad p^*(s, x) = \varphi^*(s) \exp \left( -x \sqrt{\frac{As^3 + Bs^2 + Ds}{s + \lambda}} \right).$$

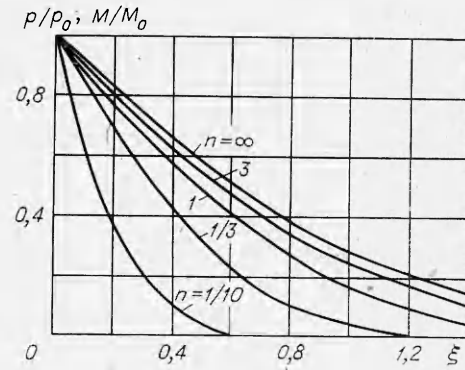
Оригинал (2.5) может быть получен таким же образом, как и в [3]. Однако ниже анализируется лишь асимптотическое поведение решения, поскольку общее решение приводит к довольно громоздким выражениям.

При  $sm/G \gg 1$  выражение (2.5) в оригинале имеет тот же вид, что и формула (1.7), следовательно, выражения для расхода и решение для случая В могут быть определены соответственно по формулам (1.8)—(1.10). Очевидно, все выводы, сделанные в п. 1, качественно не теряют смысла и для данного случая. Если же  $sm/G \ll 1$ , то оригинал (2.5) представится в виде

$$(2.6) \quad p(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x\sqrt{f_0 m_j}}{c\sqrt{t}}}^{\infty} \Psi \left( t - \frac{x\sqrt{f_0 m_j}}{4Cz^2} \right) e^{-z^2} dz.$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Изменение сечения  $f$  определяется из выражения [1]

$$f - f_0 = \frac{2f_0 R}{\delta \mu} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} p d\tau.$$

Расход можно определить по формуле (1.8). Для случая В будем иметь

$$(2.7) \quad M(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x\sqrt{f_0 m_j}}{cv\bar{t}}}^{\infty} \psi\left(t - \frac{x\sqrt{f_0 m_j}}{4Cz^2}\right) e^{-z^2} dz.$$

Распределение давления определим, подставив (2.7) в (1.10). В случае, когда в начале трубопровода задан скачок давления или расхода, выражения (2.6), (2.7) представим в виде

$$(2.8) \quad p(x, t)/p_0 = \operatorname{erfc}\{(3n + 1)/4n\}\xi\};$$

$$(2.9) \quad M(x, t)/M_0 = \operatorname{erfc}\{(1/\sigma)\xi\},$$

где

$$\xi = x/2\sqrt{\kappa_1 t}; \quad \zeta = x/2\sqrt{\kappa_2 t}; \quad \kappa_1 = C^2/m_{10}; \quad \kappa_2 = C^2/m_{20}.$$

Полученные выражения (2.6)–(2.9) могут трактоваться двояко. С одной стороны, они описывают распределения давления и расхода в вязкоупругом трубопроводе при больших временах  $Gt \gg \mu$ . С другой стороны, определяют распределение давления и расхода в произвольный момент времени при бесконечно малых значениях времени запаздывания  $\mu/G \rightarrow 0$ , т. е. в упругом трубопроводе.

Следовательно, при больших временах вязкоупругие свойства материала трубы не влияют на процесс движения. На фиг. 3, 4 показаны распределения давления и расхода, вычисленные по формулам (2.8), (2.9), для различных значений параметра нелинейности  $n$  «степенных» сред и различных значений предельного напряжения сдвига  $\tau_0(\beta_0)$  и параметра  $n$  нелинейно-вязкопластичных сред; в частном случае при  $n = 1$  (вязкая жидкость) результаты полностью совпадают с [3, 4].

Поступила 31 V 1976

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саттаров Р. М. О гидравлическом ударе «степенных» и нелинейно-вязкопластичных сред в трубах из вязкоупругого материала.— ПМТФ, 1975, № 3.
2. Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. Минск, «Наука и техника», 1970.
3. Гинзбург И. П. Гидравлический удар в трубах из вязкоупругого материала.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1956, вып. 3, № 13.
4. Чарный И. А. Неустойчившееся движение реальной жидкости в трубах. М., «Недра», 1975.

УДК 536.3:536.25

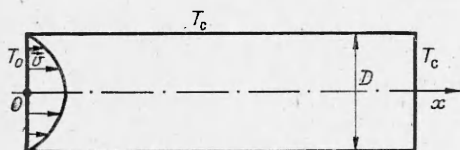
**СЛОЖНЫЙ ТЕПЛОБМЕН  
ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ**

Ю. А. Попов, В. И. Щербинин

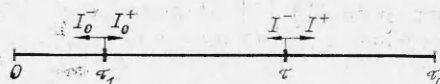
(Свердловск)

Сложный теплообмен при ламинарном движении нерассеивающей среды в цилиндрическом канале рассмотрен в [1, 2]. В [2] канал принят бесконечным, а температура боковой поверхности при  $x = 0$  меняется скачком. В [1] исследован теплообмен в канале конечной длины. Примем предположения работы [1], но среду будем считать поглощающей и рассеивающей.

Считаем, что при  $x = 0$  (фиг. 1) среда с температурой  $T_0$  и параболическим профилем скоростей втекает в цилиндрический канал, стенки которого



Ф и г. 1



Ф и г. 2

го имеют постоянную температуру  $T_c$ . При  $x = L$  канал закрыт черной проницаемой перегородкой с температурой  $T_c$ . Уравнение энергии имеет вид

$$(1) \quad \text{Re } V(\eta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 4 \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) - \frac{D^2}{\lambda T_0} \text{div } \mathbf{q}_r,$$

где  $\text{Re} = \rho c_p \langle v \rangle D / \lambda$  — число Пекле;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость;  $V = v / \langle v \rangle$ ;  $\xi = x / D$ ;  $\eta = 2r / D$ ;  $\Theta = T / T_0$ ;  $D$  — диаметр канала;  $\rho$  — плотность среды;  $c_p$  — ее теплоемкость;  $v$  — локальная скорость;  $T$  — температура;  $r, x$  — радиальная и продольная координаты;  $\lambda$  — коэффициент