

УДК 532.526.4:532.542.4+532.526.72

Традиционные датчики для измерений в пристенных турбулентных дозвуковых течениях в трубопроводах

Е.-С. Занун^{1,2}, Е. Онгюнер³, К. Эгберс³

¹ Американский университет в Каире, Новый Каир, Египет

² Университет Бенха, Бенха, Египет

³ Бранденбургский технический университет Котбус-Зенфтенберг,
Котбус, Германия

E-mail: elsayed.zanoun@bhit.bu.edu.eg

Рассматривается применение двух типов традиционных измерительных датчиков — приемника полного давления и ниточного датчика — для проведения измерений скорости в пристенном слое дозвуковых течений в трубах и каналах. Проведены и проанализированы измерения скорости течений в трубе и канале в диапазоне чисел Рейнольдса $2,8 \cdot 10^5 \leq Re_m \leq 4,5 \cdot 10^5$ и $4 \cdot 10^4 \leq Re_m \leq 2,3 \cdot 10^5$ соответственно. Для проведения измерений использовались приёмники полного давления с внешним диаметром $d_0^+ = d_0 \cdot u_\tau / \nu$, составляющим 20–120 условных единиц (единиц стенки), а также ниточный датчик с длиной нити $l^+ = l u_\tau / \nu$, равной 50–250 условных единиц. При использовании приемника полного давления основной вклад в погрешность измерения скорости дают эффекты близости стенки и градиента скорости. Эти эффекты, однако, практически не вносят погрешности в величины скорости, измеряемые ниточным датчиком в области перекрытия. Сравнение результатов, полученных с использованием приемника полного давления и ниточного датчика, выявляет присутствие горба в нормированных профилях средней скорости, измеренных приемником полного давления в диапазонах расстояний от стенки $y^+ \leq 300$ и $y^+ \leq 150$ соответственно для течений в трубе и в канале. Для корректировки данных, полученных с использованием приемника полного давления, были применены описанные в литературе способы введения поправок. Откорректированные данные оказались близки к результатам, полученным с помощью ниточного датчика, что также было продемонстрировано посредством коррекции этих данных на так называемый логарифмический профиль скорости.

Ключевые слова: ниточный датчик, поправки для измерений приёмником полного давления, течения в трубах и каналах.

Введение

Локальные свойства турбулентности в трубах и каналах важны при ее моделировании, а также для различных приложений в технике. Для проведения локальных измерений в турбулентных течениях широко используются разнообразные традиционные и новые измерительные средства, такие как тепловые датчики (нагретая нить/пленка), датчики давления (трубка Пито и комбинированные насадки) или средства оптических измерений (лазерная доплеровская анемометрия). Все эти методы характеризуются конечной величиной измерительного объема. Некоторые из этих методов дают

информацию об осредненных по объему характеристиках турбулентного потока, и это обстоятельство может влиять на выводы, которые делаются из анализа полученных данных. Более того, можно предвидеть появление погрешностей в данных, измеренных с помощью приемников полного давления и ниточных датчиков; эти погрешности привносятся эффектами вязкости, интерференции и температурного дрейфа. Калибровка ниточного датчика термоанемометра перед его использованием для проведения измерений в турбулентном потоке также представляет собой важную процедуру. Таким образом, малые размеры измерительных объемов в рассматриваемых методах должны выбираться такими, чтобы эффекты касательного напряжения и интерференции были минимальны, в частности, при проведении точных локальных измерений в пристенной области течения. Поэтому при использовании приемников полного давления в результаты измерений должны вводиться поправки на вязкость, сдвиг скорости, эффект близости стенки и эффекты турбулентности. При использовании ниточного датчика также необходима точная калибровочная кривая при постоянной температуре рабочей среды. В настоящей работе обсуждаются измерения локальных средних характеристик полностью развитых турбулентных течений в трубе и в канале, осуществляемых при помощи приемника полного давления и ниточного датчика. Также обсуждаются описанные в литературе методы введения поправок в данные измерений, полученных с использованием датчиков обоих типов. Локальная информация о среднем течении после введения поправок в данные, полученные с применением обоих методов, является важной, например, при оценке сопротивления трения, а также логарифмического закона стенки. Для получения надежной информации такого рода необходима сконструированная должным образом экспериментальная установка, которая бы обеспечивала реализацию развитого течения с необходимыми свойствами. Для проведения таких измерений были сконструированы и построены две экспериментальные установки: установка для изучения течений в трубе и установка для изучения течений в канале. Трубная установка была построена при Отделении аэродинамики и механики сплошной среды Бранденбургского технологического университета (Коттбус-Сенфтенберг). В этой установке обеспечивалась реализация требуемых характеристик полностью развитого течения в трубе [1]. Помимо этого, применялась установка для проведения измерений в течениях в канале, построенная при Институте механики сплошной среды (Эрлангер-Нюрнберг) [2]. В обеих установках в качестве рабочей среды используется воздух. Были выполнены подробные измерения с применением приемников полного давления с внешним диаметром d_0 , равным 0,6 либо 1 мм ($d_0^+ = d_0 \cdot u_\tau / \nu = 20-120$ единиц стенки). Кроме того, с достаточно высоким пространственным разрешением были получены новые данные при исследовании турбулентных течений в трубе и канале в указанных выше установках с использованием ниточного датчика, характеризующегося малым измерительным объемом: диаметр нити d термоанемометрического датчика был равен 3,8 либо 5 мкм, а длина нити l составляла соответственно 760 или 1250 мкм. Выраженная в единицах стенки длина нити датчика $l^+ = l u_\tau / \nu$ изменялась в диапазоне значений от 50 до 250, что соответствует диапазонам чисел Рейнольдса $2,8 \cdot 10^5 \leq Re_m \leq 4,5 \cdot 10^5$ и $4 \cdot 10^4 \leq Re_m \leq 2,3 \cdot 10^5$, реализованным в настоящее время в установках для изучения течений в трубе и канале соответственно. Число Рейнольдса (Re_m) определяется как $Re_m = D \bar{U}_b / \nu$, где \bar{U}_b — средняя скорость по сечению канала, D — внутренний диаметр трубы или полная высота канала (то есть $D \equiv H$), а ν — кинематическая вязкость воздуха.

Экспериментальная установка для изучения течения в трубе и использованные измерительные методы, а также изложенные в литературе и применявшиеся в настоящем исследовании способы введения поправок в данные измерений, выполненные приемником полного давления, на эффекты близости стенки и сдвига скорости, будут описаны ниже. Кроме того, далее будет представлен сравнительный анализ результатов, полученных с помощью ниточного датчика и приемника полного давления.

Экспериментальная установка и методика

Целью настоящей работы являлось получение при помощи двух измерительных методов подробных экспериментальных данных в двух установках с каналами круглого и прямоугольного сечений. Первая установка — это трубная установка CoLaPipe (Cottbus Large Pipe) (рис. 1), построенная при Отделении аэродинамики и механики сплошной среды Бранденбургского технологического университета (Коттбус-Сенфтенберг). Следует отметить, что в настоящее время данная установка задействована в программе «Европейские эффективные инфраструктуры в турбулентности» (“European High-Performance Infrastructures in Turbulence”, EuHIT). Она предназначена для проведения экспериментов в области прикладных и фундаментальных исследований при относительно больших числах Рейнольдса [1] и представляет собой установку замкнутого типа, всасывающий рабочий участок которой изготовлен из полированного акрилового стекла. Внутренний диаметр трубы D равен $190 \pm 0,23$ мм, а полная ее длина L составляет 28 м, так что отношение длины трубы к ее диаметру равно $L/D \approx 148$. Всасывающий рабочий участок имеет входное поджатие (CR), равное 9,9, и относительное расширение (ER) в конце диффузора, составляющее 3,4. Установка имеет возвратную трубную секцию, также изготовленную из полированного акрилового стекла, с внутренним диаметром $342 \pm 0,32$ мм; для этой секции отношение длины к диаметру составляет $L/D \approx 79$.

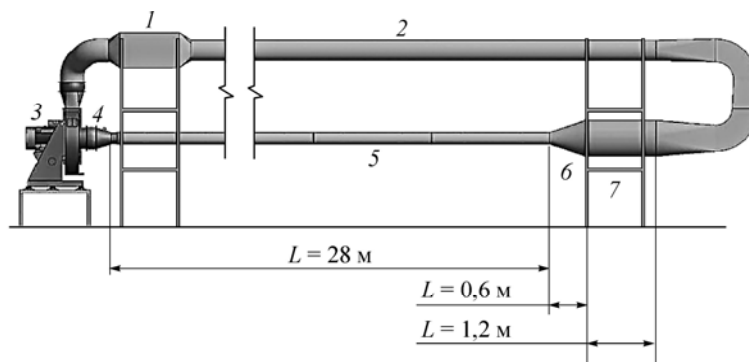


Рис. 1. Установка CoLaPipe Отделения аэродинамики и механики сплошной среды (Коттбус-Сенфтенберг).

- 1 — охладительный модуль: $P = 45$ кВт, 2 — возвратная секция: $D_i = 0,342$ м, $L/D = 79$, $Re_m \leq 5 \cdot 10^5$,
 3 — вентилятор: $P = 45$ кВт, $p = 9,5$ кПа, 4 — диффузор: $D_{in} = 0,19$ м, $D_{exit} = 0,335$ м, $L = 0,335$ м, $ER = 3,4$,
 5 — рабочий участок трубы: $D_i = 0,19$ м, $L/D = 148$, $Re_m \leq 10^6$, $R^+ \leq 18,5 \cdot 10^3$,
 6 — входной конфузор: $D_{in} = 0,6$ м, $D_{exit} = 0,19$ м, $L = D_{in}$, $CR = 9,9$,
 7 — успокоительная камера: $D = 0,6$ м, $L = 1,2$ м.

Установка оборудована водяным охладителем, который поддерживает постоянное значение температуры воздуха в рабочей области трубы, то есть во всасывающей и возвратной магистралях. В проводимых экспериментах температура воздуха измерялась с точностью $\pm 0,05$ °С. Для создания воздушного потока с максимальной скоростью, равной 80 м/с, и уровнем турбулентности менее 0,5 % на выходе конфузора использовался радиальный вентилятор мощностью 45 кВт. Максимальная скорость воздушного потока в установке соответствовала числу Маха, равному $\approx 0,23$ при отсутствии эффектов сжатия (при числе Маха, равном 0,23, максимальное процентное изменение плотности воздуха составляет 0,06 %). Для реализации максимально стабильной работы установки радиальный вентилятор располагался в конце всасывающей магистрали и выдавал поток в возвратную магистраль диаметром 342 мм через теплообменник, как показано на рис. 1. Для перемещения и позиционирования приемника полного давления и ниточного датчика использовалось высокоточное координатное устройство фирмы Isel Germany AG. Для обеспечения перемещений в продольном, поперечном и нормальном направлениях координатное устройство располагалось на снабженной шкалой направляющей. Абсолютная ошибка позиционирования при помощи координатного устройства составляла примерно ± 10 мкм. Для обеспечения точного позиционирования ниточного датчика внутри рабочего участка трубы применялся подход, описанный в работе [3]. Кроме того, начальное положение датчика давления задавалось условием контактирования датчика со стенкой трубы/канала; это условие обеспечивало фиксацию точки отсчета при определении расстояния до стенки. Другие подробности относительно устройства тех или иных компонент установки можно найти в публикациях [1] и [4].

В дополнение к данным, полученным на трубной установке, в настоящей работе будут представлены новые данные для течений в канале, полученные на установке при Институте механики сплошной среды (Эрлангер) (детали устройства канала описаны в работе [2]). Для разных значений числа Рейнольдса были измерены профили средней скорости течения и градиенты среднего пристенного давления вдоль рабочих участков трубы и канала. Все измерения в трубе выполнялись на расстоянии $130D$ ниже по течению от выхода конфузора. В то же время измерения для течений в канале проводились на расстоянии $115H$ ниже входа в канал [2]. Авторы полагали, что выбранные расстояния гарантировали формирование полностью развитых турбулентных течений в трубе и канале к началу области измерений [5].

Измерения профиля скорости проводились с помощью ниточного датчика, диаметр нити которого составлял 3,8 мкм, и термоанемометра фирмы TSI. Кроме того, в нескольких случаях сканирование течения было выполнено с помощью нити диаметром 5 мкм, используемой с термоанемометром постоянной температуры фирмы Dantec (СТА). Для всех нитей выполнялось соотношение $l/d \geq 200$, то есть длина активной части сенсора была не меньше двухсот диаметров нити, такие условия гарантировали двумерность и возможность пренебрежения эффектом токоподводов.

Ниточные датчики калибровались перед каждой серией измерений с использованием калибровочного модуля фирмы Dantec (см. рис. 2). Все калибровки и измерения проводились при 80-процентном перегреве нити. Средняя скорость потока оценивалась с использованием аппроксимации полученных данных полиномом четвертой степени с точностью не ниже ± 1 %. Температура воздуха внутри рабочей части трубы/канала поддерживалась постоянной. В тех случаях, когда имел место неустранимый температурный дрейф, непосредственная коррекция данных при проведении калибровок и измерений использовалась только для температурного дрейфа в пределах ± 1 %. Данные, в которых присутствовал температурный дрейф свыше ± 1 %, исключались из последующего анализа.

Рис. 2. Калибровочный модуль фирмы Dantec для ниточного датчика.



Измерения скорости потока по величине давления были выполнены посредством сканирования потока приемником полного давления с внутренним диаметром $d_i = 0,25$ или $0,6$ мм. Все приемники полного давления были сконструированы в соответствии с рекомендациями работ [6–8] таким образом, что отношение их внутреннего диаметра к внешнему диаметру находилось в диапазоне от $0,5$ до $0,6$. Динамический напор, требуемый для калибровки скорости, был получен вычитанием статического давления, измеренного с использованием отверстия в стенке с внутренним диаметром $0,4$ мм, из полного давления, измеренного датчиком полного напора. Следует отметить, что отверстия для отбора статического давления располагались на том же расстоянии вниз по потоку, что и кончик приемника полного давления. Данные, измеренные приемником полного давления, затем преобразовывались в скорость течения посредством уравнения Бернулли. Каждый профиль скорости был измерен в окрестности 70-ти вертикальных положений, при этом в пределах так называемой области перекрытия процедура определения профиля скорости выполнялась с особой тщательностью.

Результаты и их анализ

Трение на стенке в трубе и канале

Две экспериментальные установки и два способа измерений, кратко описанные в предыдущем разделе, позволили получить надежные данные по распределению средней скорости потока и трению на стенке в полностью развитых турбулентных течениях обеих установок. Скорость трения на стенке u_τ и расстояние от стенки являются важными параметрами, подлежащими аккуратному измерению при тщательном исследовании течений обоих типов. Скорость трения определялась посредством оценки касательного напряжения на стенке, полученной при измерении среднего градиента давления (dP/dx) вдоль трубы и/или вдоль оси канала (см. рис. 3).

Для определения градиента среднего давления среднее статическое давление измерялось достаточно далеко от входа в трубу в четырех сечениях, которые располагались с интервалом 1 м вдоль потока, начиная с $L/D = 100$. В каждом сечении по окружности трубы были предусмотрены три отверстия диаметром 400 мкм для отбора статического давления. После проверки соответствия между величинами, измеренными в трех точках каждого сечения трубы, посредством их усреднения была получена величина среднего статического давления. После этого на базе в 4 метра оценивался градиент среднего давления с точностью лучше, чем $\pm 0,25\%$. Тот же подход использовался для определения среднего градиента давления для течений в канале. Затем была оценена скорость трения на стенке u_τ :

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho},$$

$$\tau_w = -\frac{R}{2} \cdot \frac{dP}{dx} \quad \text{— в трубе,} \quad \tau_w = -\frac{H}{2} \cdot \frac{dP}{dx} \quad \text{— в канале,} \quad (1)$$

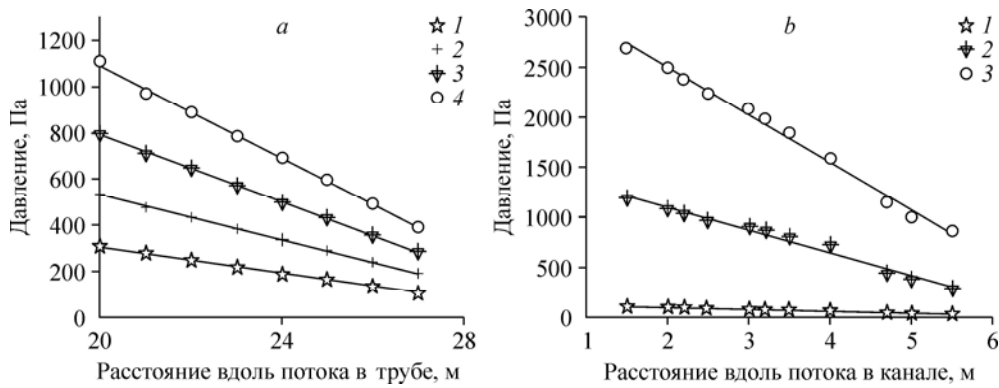


Рис. 3. Примеры результатов измерения средних градиентов давления вдоль стенки трубы (а) и вдоль оси канала (b).

$a - R^+ = 4576 (1), 6021 (2), 7342 (3), 8652 (4), b - R^+ = 1014 (1), 3487 (2), 4780 (3).$

здесь R — радиус трубы, а H — полная высота канала. Далее коэффициент трения в трубе λ и коэффициент поверхностного трения в канале c_f могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{коэффициент трения в трубе} - \lambda &= 8 \left(u_\tau / \bar{U}_b \right)^2, \\ \text{коэффициент поверхностного трения в канале} - c_f &= 2 \left(u_\tau / \bar{U}_b \right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Следует отметить, что величина статического давления в потоке измерялась с использованием отверстий конечного размера в стенке, и поэтому в показания статического давления должна была быть введена зависящая от числа Рейнольдса поправка. Однако с учетом данных работы [9] было обнаружено, что поправка на конечный диаметр d отверстия для отбора статического давления в случае $d^+ < 50$ пренебрежимо мала. В проводимом анализе оказалось возможным пренебречь этой поправкой, поскольку диаметр отверстий для отбора давления в обоих экспериментах, то есть для течения в трубе и течения в канале, составлял всего лишь 400 мкм, то есть в единицах стенки он находился в диапазоне $15 < d^+ < 55$.

При наличии универсального равновесного диапазона энергетического спектра по волновым числам, то есть в условиях справедливости обобщенного закона Колмогорова для турбулентности с показателем $-5/3$ наличие подслоя и реализация надежно установленного соотношения для трения $\lambda = f(Re)$, которое следует из логарифмического соотношения Прандтля–фон Кармана для трения [10], должны рассматриваться как подтверждения того обстоятельства, что в настоящих экспериментах, проведенных в трубной установке, было реализовано течение с высоким числом Рейнольдса. Как этого можно ожидать для полностью развитого турбулентного течения в трубе при достаточно высоких числах Рейнольдса, данные по трению, полученные из измеренной величины градиента давления (см. рис. 3), хорошо согласуются с имеющимися соотношениями для трения [10, 11], а также с экспериментальными данными работ [12, 13] (см. рис. 4).

На рис. 4 наблюдается разумное согласование настоящих данных с логарифмическим соотношением Прандтля–фон Кармана для трения $1/\sqrt{\lambda} = 2 \log \cdot (Re_m \sqrt{\lambda}) - 0,8$, а также с экспериментальными данными работ [12, 13] для течений в трубе с гладкими стенками. Логарифмическое соотношение Прандтля–фон Кармана для трения было

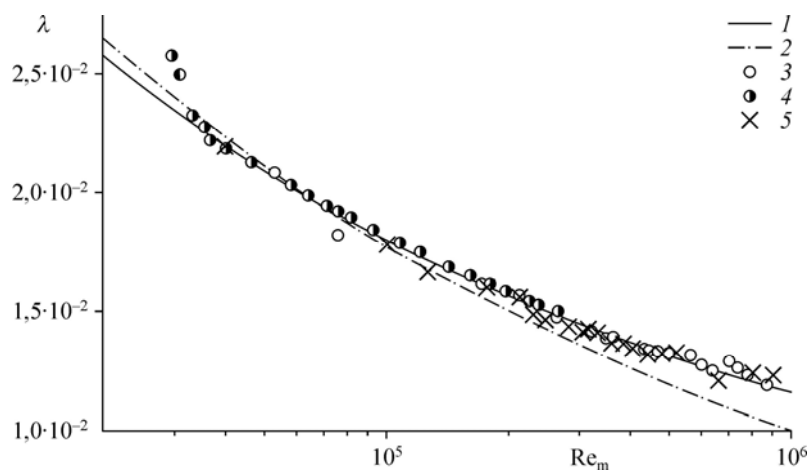


Рис. 4. Сравнение данных по трению в трубе, полученных в настоящей работе, с данными по трению, рассчитанному по формулам, найденным в литературных источниках.
 1 — [10]: $1/\sqrt{\lambda} = 2 \log(\text{Re}_m \sqrt{\lambda}) - 0,8$, 2 — [11], 3 — [12], 4 — [13], 5 — результаты настоящей работы.

выведено на основании данных, полученных для течений в трубах с гладкими стенками [12]. Однако хорошее соответствие результатам работы [11] было получено для диапазона чисел Рейнольдса $\text{Re}_m < 10^5$.

Для получения надежных данных по поверхностному трению на стенке в случае течения в канале требуется выполнение предположения, что среднее течение является статистически двумерным. Двумерность течения тесно связана с относительной шириной канала W/H , т.е. с отношением его ширины W к высоте H . В работе [14] утверждается, что для двумерности течения в канале требуется его относительная ширина не менее 5. С другой стороны, в работе [15] для устранения эффектов, вызванных боковыми стенками канала, были рекомендованы значения W/H не менее 8. Позднее, в работе [16] сообщалось о том, что для минимизации влияния боковых стенок канала на результаты измерения касательного напряжения на стенке вдоль его оси требуется обеспечить относительную ширину канала не менее 10. Набор данных, представленных на рис. 5, был получен для каналов, относительная ширина которых превышала 10, чем обеспечивалось выполнение критерия двумерности течения.

Рисунок 5 иллюстрирует тот факт, что настоящие данные по поверхностному трению на стенке, полученные из измерений градиента среднего давления вдоль оси канала, хорошо согласуются с данными по поверхностному трению на стенке, полученными с применением метода интерферометрии масляной пленки, а также с логарифмическим соотношением для поверхностного трения, предложенным в работе [2]. Немногочисленные экспериментальные данные по поверхностному трению [17–19] для течений в канале также представлены на рис. 5. Данные [17] были получены посредством измерения среднего градиента давления в плоском канале с относительной шириной 11,7:1 для случая сравнительно высоких чисел Рейнольдса ($\text{Re}_m < 2 \cdot 10^5$). Наблюдается хорошее согласование между экспериментальными данными, представленными разными источниками, а также их согласованность с логарифмическим соотношением для поверхностного трения, предложенным в работе [2], в частности, в области $R^+ \geq 2000$, где $R^+ = Hu_\tau/2\nu$, что эквивалентно $\text{Re}_m = 86000$.

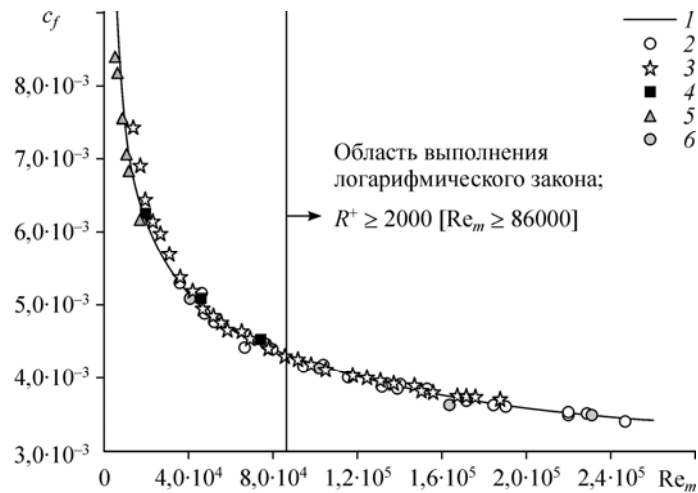


Рис. 5. Сравнение данных по величине поверхностного трения в течении в канале, полученных в настоящей работе, с данными, полученными по логарифмическому соотношению для трения, предложенному в работе [2], а также с ранее опубликованными литературными данными.

1 — расчет [2]: $W/H = 12$, $1/c_f = 1,911 \ln(Re_m \sqrt{c_f}) - 1,282$, 2 — эксперимент [2]: $W/H = 12$; 3 — [17]: $W/H = 11,7$,
4 — [18]: $W/H = 10$, 5 — [19]: $W/H = 18$, 6 — гладкий канал в настоящей работе: $W/H = 12$.

Сравнение профилей скорости, полученных с использованием приемника полного давления и ниточного датчика

В дополнение к экспериментам, проведенным для получения данных по трению на стенке, были выполнены работы по измерению профилей средней скорости течения в поперечных сечениях канала/трубы при разных числах Рейнольдса. Эти измерения выполнялись с помощью приемника полного давления. Известно, однако, что присутствие приемника в пристенном слое градиентных течений искажает их характеристики (см., например, [20]). Искажения обусловлены наличием следующих факторов.

1. Эффекты вязкости. Эти эффекты должны учитываться в области чисел Рейнольдса $Re_p < 200$, где Re_p — число Рейнольдса, вычисленное на основе внешнего диаметра приемника d_0 и средней скорости по сечению канала.

2. Эффекты близости стенки (искажение профиля скорости течения у твердой стенки). Эти эффекты наблюдаются, когда приемник полного давления располагается на расстоянии от стенки, равном двум–трем диаметрам приемника (то есть в области $y < 2-3 d_0$).

3. Эффект градиента скорости/касательного напряжения, или эффект вытеснения. Этот эффект имеет место вследствие следующих факторов:

- отклонение входящих линий тока приемником полного давления под действием градиента скорости течения, когда приемник расположен в области расстояний от стенки $y > 2 d_0$;

- несовпадение среднего давления, измеряемого на торце датчика давления, и давления в геометрическом центре датчика (подробности см. в работе [20]).

В ограниченных стенкой градиентных течениях из всех вышеперечисленных эффектов наиболее существенен эффект градиента скорости/касательного напряжения. Его изучению было посвящено несколько исследований (см., например, работы [8, 20–24]). Согласно рекомендациям работы [20] поправка на эффекты вязкости должна вноситься в диапазоне чисел Рейнольдса $30 < Re_p < 200$. В измерениях, выполненных в настоящей работе, наименьшее реализованное значение числа Рейнольдса превышало верхнюю

границу указанного диапазона — $Re_p = 200$, поэтому никаких поправок на эффекты вязкости в полученные данные не вводилось. С другой стороны, для компенсации эффекта загромождения канала приемником давления должна приниматься во внимание поправка на возмущение профиля скорости, то есть на эффект близости стенки [20–24]. Присутствие приемника полного давления в окрестности стенки вызывает асимметрию входящих линий тока и приводит к завышению измеряемых значений полного давления.

Влияние размера приемника давления на измеренную среднюю скорость течения лучше всего может быть выражено в единицах стенки. Поэтому в качестве характерных масштабов для представления результатов в общей форме, то есть для представления профиля средней скорости течения в виде зависимости $U^+ = f(y^+)$, где $U^+ = U/u_\tau$ и $y^+ = y/l_c$, использовались скорость трения на стенке u_τ и вязкая длина $l_c = \nu/u_\tau$. Несколько примеров профилей средней скорости течения, полученных без введения поправок в измеренные данные, представлены для случаев течения в трубе на рис. 6а и в канале на рис. 6б. Здесь же дано сравнение этих профилей с профилями скорости, измеренными с помощью ниточного датчика для тех же значений числа Рейнольдса. Важно отметить, что влияние теплопроводности стенки на величину скорости, измеренную с помощью ниточного датчика, наблюдается на расстояниях от стенки меньше, чем $y^+ = 5$ из-за дополнительных потерь тепла от нити в стенку (см., например, [3]). Этот эффект был достаточно мал, чтобы заметно исказить данные измерений ниточного датчика, поскольку ближайшая к стенке точка, в которой производились измерения, располагалась на расстоянии от стенки $y^+ > 10$. Отчетливые “горбы” в профиле скорости наблюдаются в области $y^+ < 300$ течения в трубе и в области $y^+ < 150$ течения в канале, приводя к различию данных, полученных при помощи приемника полного давления и ниточного датчика в окрестности стенки. С другой стороны, можно видеть, что профили скорости, измеренные приемником полного давления в области $y^+ > 300$ течения в трубе и в области $y^+ > 150$ течения в канале, хорошо согласуются с данными, полученными

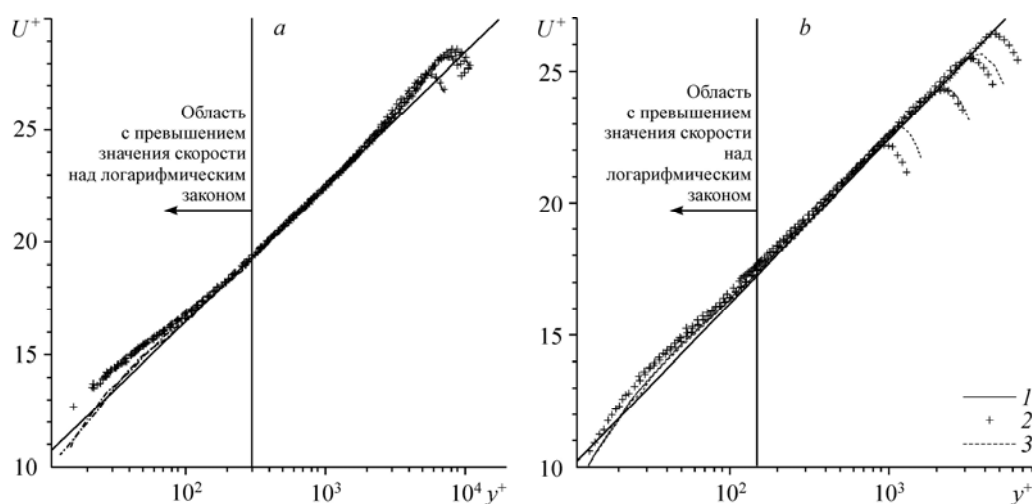


Рис. 6. Сравнение неотректированных данных по профилю средней скорости течения, полученных с помощью датчика давления, с данными, полученными при помощи ниточного датчика, а также с логарифмическими зависимостями для течения в трубе (а) и канале (б).

1 — логарифмический закон: $k = 0,384$, $B = 4,43$ (а), $k = 0,37$, $B = 3,7$ (б);

2 — данные, полученные при помощи приемника полного давления в трубе,

без поправок: $R^+ = 5711-8652$, ($d_0^+ = 45-70$) (а), $R^+ = 1014-4816$ ($d_0^+ = 24-116$) (б);

3 — данные, полученные при помощи ниточного датчика: $R^+ = 5575-8509$ (а); $R^+ = 1167-3900$ (б).

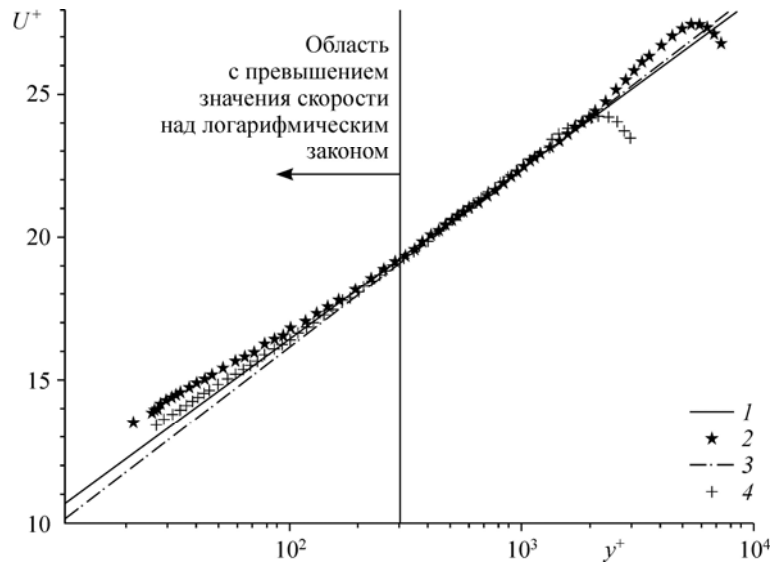


Рис. 7. Неоткорректированные данные по профилю средней скорости течения, полученные с помощью приемника полного давления в течениях в трубе и канале.

1 — логарифмический закон в трубе: $k = 0,384, B = 4,43$; 2 — данные, полученные при помощи приемника полного давления в трубе, без поправок: $R = 5711 (d_0^+ = 61)$; 3 — логарифмический закон в канале: $k = 0,37, B = 3,7$; 4 — данные, полученные при помощи приемника полного давления в канале, без поправок: $R^+ = 2302 (d_0^+ = 55)$.

с помощью ниточного датчика в области перекрытия и в ядре потока, а также со следующей логарифмической зависимостью:

$$U^+ = \ln y^+ / \kappa + B \tag{3}$$

со значениями $\kappa = 0,384$ и $B = 4,43$ для течения в трубе в интервале $y^+ = 300 - 0,15R^+$ [25] и со значениями $\kappa = 0,37$ и $B = 3,7$ для течения в канале в интервале $y^+ = 150 - 0,2R^+$ [2].

Приемник полного давления дает выброс в измеренном профиле средней скорости как в течении в трубе, так и в течении в канале, когда он (приемник) расположен в буферной зоне, то есть в области $5 < y^+ < 300$ (см. рис. 6, 7). Из рисунков видно, что выброс значений скорости для течения в канале менее выражен по сравнению с течением

в трубе, это наблюдение может свидетельствовать о более сложной структуре внутренней области течения в трубе по сравнению с течением в канале.

Для пояснения влияния эффекта стенки на измеренный профиль средней скорости течения на рис. 8 дано изображение поперечного сечения трубного и прямоугольного каналов. Можно ожидать, что в случае канала достаточно большой относительной ширины ($W/H \geq 10$) влияние боковых стенок на структуру течения в ядре потока

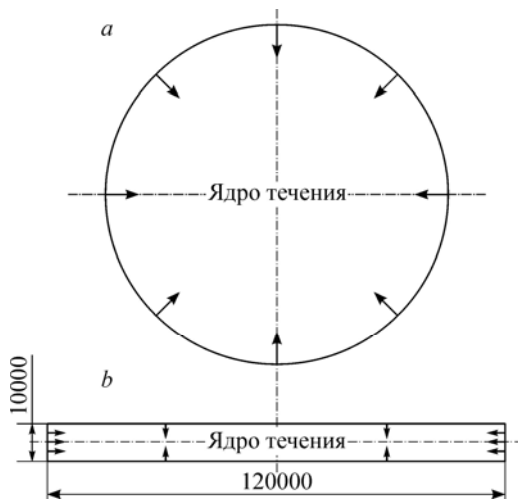


Рис. 8. Поперечные сечения трубы (a) и канала (b).

будет пренебрежимо мало (см. [16]). Можно также предполагать, что в течении в плоском канале будет иметь место взаимодействие вихрей с противоположных стенок, что будет приводить к формированию более простой структуры течения в ядре потока и, следовательно, к меньшему влиянию боковых стенок на структуру течения во внутренней области канала. С другой стороны, в случае течения в трубе со всей ее внутренней поверхности будет происходить обмен противоположно вращающимися вихрями с ядром течения; этот обмен будет оказывать сильное влияние на структуру течения во внутренней области трубы, а также на течение в ядре потока (подробнее см. в [26]).

“Горбы” в профиле скорости течения в трубе, которые видны на рис. 6 и 7, были интерпретированы авторами [27] как участок профиля средней скорости, который может быть представлен степенным законом. С другой стороны, “горбы” в профиле скорости, наблюдавшиеся в канале [28] при помощи лазерной доплеровской интерферометрии, были интерпретированы как следствие малого значения числа Рейнольдса, приводящего к отклонению данных от логарифмического закона скорости. В согласии с более ранними наблюдениями [24], между данными, измеренными при помощи приемника полного давления и данными, измеренными с помощью ниточного датчика, в буферной области, то есть в области $y^+ < 30$, наблюдались несоответствия величиной до 12 %. Степень отклонения данных, измеренных приемником полного давления, от данных, измеренных ниточным датчиком, зависит в основном от величины измерительного объема, а также от степени близости приемника к стенке. Это отклонение, то есть “горб”, в профиле скорости течения, может служить разумным объяснением большей величины наклона (или константы фон Кармана) логарифмического профиля скорости, измеренного датчиком давления, в частности, когда в качестве внутренней границы логарифмического интервала принимается точка $y^+ = 30$ (см. табл. 1 и 2).

Предполагается, что надежные данные измерений, проводимых с помощью приемника полного давления, в частности, в близкой окрестности стенки, могут быть получены после введения соответствующих поправок [20–24]. В литературе описано много способов введения поправок в данные измерений, выполненных приемником полного давления, после чего эти данные становятся очень близкими к данным, полученным датчиками

Таблица 1

Сводка величин констант, вычисленных по логарифмическому закону скорости для течений в трубе для области $R^+ = (Ru_{\tau}/\nu) = 5673\text{--}8652$, а также интервалы логарифмического участка, полученные с использованием результатов измерений, выполненных при помощи датчика давления

Логарифмический участок $y^+ = (y^+_{inner} - y^+_{outer})$	Ниточный датчик		Приемник полного давления					
			Без поправки		Поправка согласно [21]		Поправка согласно [22]	
	κ	B	κ	B	κ	B	κ	B
$y^+ = 30\text{--}0,15 R^+$	–	–	0,434	6,34	–	–	–	–
$y^+ = 150\text{--}0,15 R^+$	0,384	4,43	0,3955	4,78	0,30	4,67	0,388	4,60

Таблица 2

Сводка величин констант, вычисленных по логарифмическому закону скорости для течений в канале для области $R^+ = (Hu_{\tau}/2\nu) = 1014\text{--}4816$, а также интервалы логарифмического участка, полученные с использованием результатов измерений, выполненных при помощи приемника полного давления

Логарифмический участок $y^+ = (y^+_{inner} - y^+_{outer})$	Ниточный датчик		Приемник полного давления					
			Без поправки		Поправка согласно [21]		Поправка согласно [22]	
	κ	B	κ	B	κ	B	κ	B
$y^+ = 30\text{--}0,2 R^+$	–	–	0,414	5,42	–	–	–	–
$y^+ = 150\text{--}0,2 R^+$	0,37	3,7	0,385	4,43	0,373	3,89	0,373	3,85

с малым измерительным объемом, таким как ниточный датчик или лазерная доплеровская анемометрия. Поправки на эффект близости стенки, вытеснение (то есть касательное напряжение), а также вносимую стенкой турбулентность вводились для разных чисел Рейнольдса в интервалах $2,8 \cdot 10^5 \leq Re_m \leq 4,5 \cdot 10^5$ и $4 \cdot 10^4 \leq Re_m \leq 2,3 \cdot 10^5$ для течений в трубе и в канале соответственно. Использовались способы введения поправок на близость стенки и на эффект вытеснения, описанные в работах [21] и [22]. Для учета эффекта градиента касательного напряжения авторы [22] предложили способ введения поправки в данные измерений, выполненных приемником полного давления, заключающийся в смещении вертикальной координаты стенки на расстояние $\Delta = 0,15 d_0$ по направлению к области течения с большей скоростью. Величина Δ называется поправкой на вытеснение. На первый взгляд кажется, что поправка на эффект касательного напряжения для данных, полученных посредством приемника полного давления, может быть осуществлена прибавлением величины $0,15 d_0$ к y -координатам профиля скорости. Между тем поправка на эффект вытеснения зависит не только от внешнего диаметра приемника, но и от величины градиента скорости, а также и от расстояния от стенки. Поэтому для того чтобы избежать добавления постоянного сдвига к измеренным данным, авторы работ [29] и [30] предложили модифицированный способ введения поправки на эффект вытеснения ε , зависящей от внешнего диаметра датчика d_0 , и от местного градиента скорости dU/dy . В этом способе поправка выражается формулой

$$\varepsilon = \Delta/d_0 = 0,15 \operatorname{th}(4\sqrt{\alpha}), \quad (4)$$

и она должна применяться в области $y > 2 od$, где параметр сдвига α , определяемый как

$$\alpha = d_0 \frac{dUdy}{2U}, \quad (5)$$

вычисляется в геометрическом центре датчика давления. Параметр α должен вычисляться с использованием величины градиента средней скорости dU/dy , вычисленной либо с использованием неоткорректированных данных по скорости, либо с использованием итерационной процедуры, предложенной в работе [21]. В обоих случаях может использоваться трехточечный шаблон [31].

В дополнение к рассмотренной выше поправке на эффект вытеснения на расстояниях от стенки менее $2 d_0$ вводилась также дополнительная поправка на эффект близости стенки. В работе [24] механизм действия эффекта близости стенки на показания датчика давления пояснялся с привлечением аналогии с прямым уступом. В случае, когда приемник полного давления приближается к стенке, происходит блокирование (загромождение) течения, в результате линии тока смещаются в область с более высокой скоростью. Для расстояний от стенки $y < 2 d_0$ авторы работы [22] наблюдали влияние эффекта близости стенки, в связи с этим они предложили поправочную кривую $\Delta U/U = f(y/d_0)$, представленную на рис. 8. На основании поправочной кривой, представленной в работе [22], авторы работы [24] предложили так называемую скоростную поправку для учета эффектов близости стенки и турбулентности вида

$$\Delta U/U = 0,015 \exp[-3,5((y/d_0) - 0,5)]. \quad (6)$$

Эту поправку предлагалось использовать для корректировки данных по скорости течения в области $y < 2 d_0$.

Для эффекта касательного напряжения, или эффекта вытеснения, авторы работы [21] предложили альтернативный способ введения поправки на близость стенки для области $y < 3 d_0$. Эта поправка имеет вид:

$$[\Delta/d_0]_{\text{revised}} = 0,15 \operatorname{th}(4\sqrt{\alpha}) - \varepsilon_{\text{new}}. \quad (7)$$

Формула (7) представляет собой пересмотренную версию предыдущей поправки на эффект вытеснения ε (4). Новую поправку следует, однако, применять на расстояниях от стенки $y < 3 d_0$, где

$$\varepsilon_{\text{new}} = \beta_1 (y/d_0 - 3) + \beta_2 (y/d_0 - 3) \left[0,15 \operatorname{th}(4\sqrt{\alpha}) \right]. \quad (8)$$

Здесь $\beta_1 = 0,174$ и $\beta_2 = -1,25$. Следует отметить, что поправка (7) была рекомендована в работе [21] для случая приемников полного давления с внешним диаметром $d_0^+ < 150$. С целью учета эффекта блокирования течения в области $y < 3 d_0$ в проводимых здесь измерениях скорости течения в трубе и канале также применялась формула (7) для модифицированной поправки. Затем проводилось сравнение откорректированных данных с данными, полученными с использованием поправки на пристеночный эффект, предложенный в работах [22] и [24] (формула (4)).

Напомним, что в настоящей работе использовались приемники полного давления с внешним диаметром 0,6 и 1 мм, что эквивалентно величинам $d_0^+ \approx 24-116$ единиц стенки для реализованного рабочего диапазона чисел Рейнольдса. На рис. 9a и 9b видно, что в области $y^+ < 300$ данные, измеренные при помощи приемника полного давления, подвержены влиянию как эффекта близости стенки, так и эффекта касательного напряжения. Обсуждавшиеся выше поправки на эффекты близости стенки и касательного напряжения поэтому вводились в данные, полученные для течений в трубе и канале. Образцы откорректированных данных отображены на рис. 9a и 9b. Для лучшего восприятия величин различных поправок на этих рисунках приведены также и неоткорректированные данные для течений в трубе и канале. Кроме того, показаны данные, полученные с использованием ниточного датчика. Для эффекта вытеснения дано сравнение модифицированной поправки ε на этот эффект, представленной уравнением (4), с поправкой на эффект касательного напряжения, предложенной в работе [22]. Обычно о приемлемости того или иного способа введения поправок судят по тому, достигается ли совпадение откорректированных данных с данными, полученными с использованием ниточного датчика. Авторами настоящей работы было проведено сравнение поправки на близость стенки, предложенной в работе [21], с первоначальной поправкой, предложенной в работе [22]. Данные, полученные после применения обеих поправок, приведены на рис. 9a и 9b. Результат применения поправки, предложенной в [21], хорошо согласуется с результатом применения поправки, представленной в [22]. Из рассмотрения рис. 9a и 9b можно сделать вывод о разумной согласованности откорректированных данных с результатами, полученными с использованием ниточного датчика. Между тем, в связи с рассмотрением нижней границы логарифмического участка профиля скорости важным моментом является учет точек в пределах расстояний $2 d_0$ от стенки (что эквивалентно области $y^+ \leq 300$). При использовании для анализа логарифмического профиля скорости неоткорректированных данных для области $y^+ < 300$ возникает ряд вопросов. Например, если при использовании неоткорректированных данных в качестве внутренней границы логарифмического участка профиля скорости принималась точка $y^+ = 30$ (согласно практике, которая была принята в течение нескольких десятилетий перед 90-ми годами), то для течений в трубе и канале полученные значения констант ($\kappa = 0,434$ и $B = 6,34$ — для течения в трубе и $\kappa = 0,414$ и $B = 5,42$ — для течения в канале) оказывались близкими к ранее принятым в научном сообществе величинам: $\kappa = 0,417$ и $B = 5,84$ или $\kappa = 0,4$ и $B = 5$ [12]. Напротив, на основании недавнего анализа логарифмического закона стенки (см., например, публикации [21, 24, 25]), в котором в качестве нижней границы логарифмического участка для течения в трубе принималась точка $y^+ \approx 300$, для обеих констант были получены новые значения (см. табл. 1 и 2), хорошо согласующиеся со значениями, представленными в работах [16, 21, 25]. Сближение откорректированных

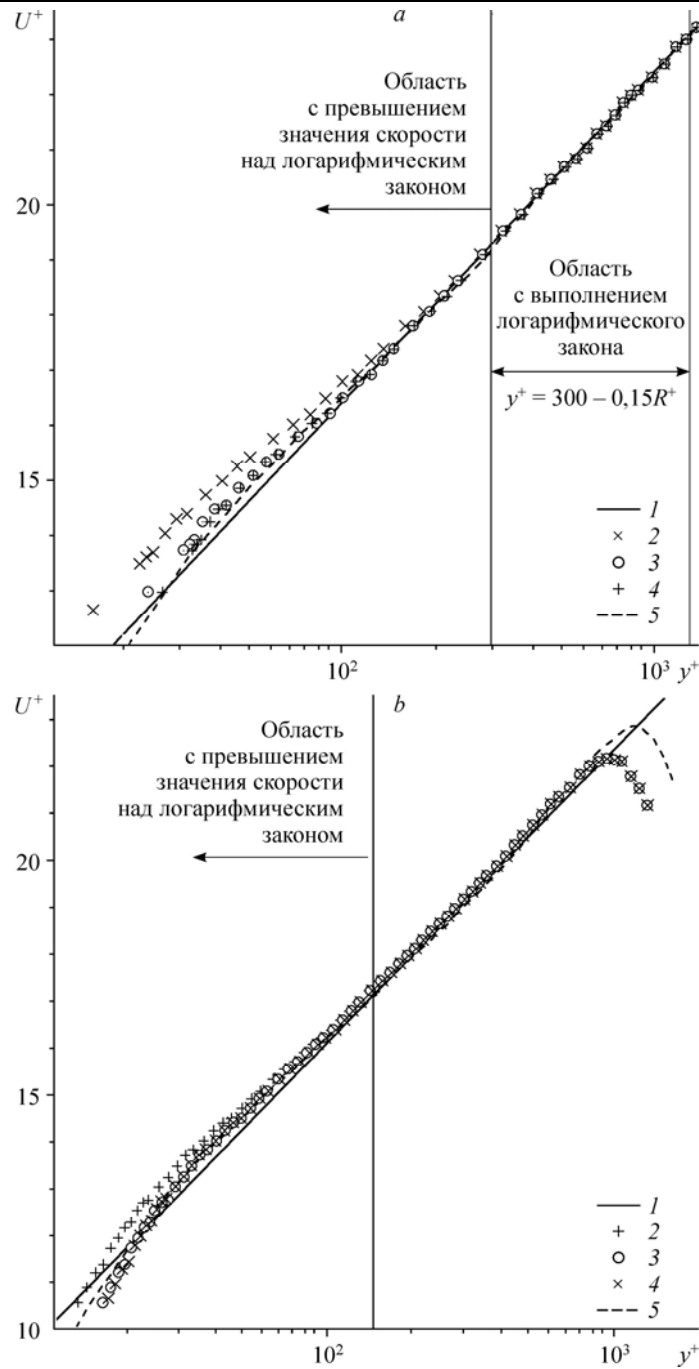


Рис. 9. Сравнение полученных с использованием приемника полного давления откорректированных и неоткорректированных данных по профилю средней скорости течения, а также сравнение с логарифмическим законом скорости и данными, полученными при помощи ниточного датчика для течения в трубе (а) и для течения в канале (б). Поправка 1 вводилась согласно [21], а поправка 2 — согласно [22].
 1 — логарифмический закон: $k = 0,384, B = 4,43$ (а), $k = 0,37, B = 3,7$ (б); 2 — данные, полученные при помощи приемника полного давления, без поправок: $R^+ = 8652$ ($d_0^+ = 70$) (а), $R^+ = 1014$ ($d_0^+ = 24$) (б); 3 — данные, полученные при помощи приемника полного давления, поправка 1: $R^+ = 8652$ ($d_0^+ = 70$) (а), $R^+ = 1014$ ($d_0^+ = 24$) (б); 4 — данные, полученные при помощи приемника полного давления, поправка 2: $R^+ = 8652$ ($d_0^+ = 70$) (а), $R^+ = 1014$ ($d_0^+ = 24$) (б); 5 — данные, полученные при помощи ниточного датчика: $R^+ = 8509$ (а), $R^+ = 1167$ (б).

данных, полученных с использованием датчика давления, и их слияние в одну кривую (см. рис. 9) свидетельствует об адекватности примененных поправок. Более подробный анализ экспериментальных данных, представленных на рис. 6–9, дают результаты, приведенные в табл. 1 и 2. Из этих таблиц видно, что выбор внутренней границы логарифмического участка профиля скорости играет основную роль в оценке значений описывающих его констант.

Выводы и заключительные замечания

На двух разных установках при относительно высоких числах Рейнольдса были выполнены тщательные измерения профиля скорости течения с использованием приемника полного давления и ниточного сенсора. Проведено сравнение результатов измерений, полученных при помощи приемника полного давления в исходном виде и после введения поправок на эффекты близости стенки и касательного напряжения, с результатами измерения скорости, полученными при помощи термоанемометрического датчика. Выводы работы могут быть сформулированы следующим образом.

Поправкой на эффекты вязкости можно пренебречь, поскольку наименьшее реализованное в наших измерениях значение числа Рейнольдса превышало верхний предел диапазона чисел Рейнольдса $Re_p = 200$, внутри которого требуется учитывать эффекты вязкости. Поправка на эффект вязкости обычно вводится в диапазоне чисел Рейнольдса $30 < Re_p < 200$ [20].

Для результатов измерений была введена модифицированная поправка из работы [21] на эффект близости стенки. Получены данные, схожие с теми, которые имеют место после внесения соответствующей поправки из работы [22].

Отдельных поправок на присутствие в потоке турбулентных флуктуаций продольной скорости течения не вводилось, поскольку поправки на эффекты турбулентности включены в поправку на эффект близости стенки в уравнении (6).

Введение поправки на эффекты близости стенки и касательного напряжения показывает, что приемники полного давления могут использоваться для измерения профиля средней скорости течения, обеспечивая результаты, близкие к тем, которые могут быть получены при использовании термоанемометрического датчика. Различие между откорректированными данными и данными, полученными с применением ниточного датчика, лежит в пределах 1,5 %.

Для того, чтобы достичь лучшего понимания влияния введения поправок в результаты измерений приемником полного давления на законы подобия и значения констант в логарифмическом законе скорости, необходимо проведение дальнейших исследований при более высоких значениях числа Рейнольдса. Следует также уделить больше внимания таким измерительным средствам, как лазерная доплеровская анемометрия, которая могла бы помочь лучше разрешить пристенный слой в ограниченных стенкой градиентных течениях и тем самым исправить неудовлетворительную ситуацию с измерениями, выполняемыми при помощи приемников полного давления, даже в случае их малых диаметров.

Автор благодарен за поддержку работы руководству Института механики сплошной среды (Эрланген-Нюрнберг) и руководству Отделения аэродинамики и механики сплошной среды Бранденбургского технологического университета (Коттбус).

Условные обозначения

B — аддитивная константа в логарифмическом законе скорости,
 c_f — коэффициент поверхностного трения в канале,

dP/dx — средний градиент давления, Па/м,
 H — полная высота канала, м,
 l/l_c — длина нити/характерный масштаб течения, м,
 L — длина рабочей области трубы/канала, м,

D — диаметр трубы или канала,	R — радиус трубы, м,
d — диаметр нагретой нити или отверстия для измерения статического давления, м,	R^+ — число Кармана,
d_0 — внешний диаметр датчика давления, м,	Re — число Рейнольдса,
d_i — внутренний диаметр приемника полного давления, м,	\bar{U} — объемная/средняя скорость среды в потоке, м/с,
	u_τ — скорость трения на стенке, м/с,
	W — ширина канала, м,
	y — расстояние от стенки, м.

Греческие символы

τ — касательное напряжение, Н/м ² ,	ρ — плотность среды, кг/м ³ ,
λ — коэффициент трения трубы,	Δ — поправка на отклонение / смещение от средней линии, м,
ν — кинематическая вязкость среды, м ² /с,	δ — толщина поверхностного слоя, м.
κ — константа фон Кармана,	

Индексы

b — объем, c — характеристика, w — стенка, p — датчик, m — среднее значение, + — безразмерность.

Список литературы

1. Zimmer F., Zanoun E.-S., Egbers C. A study on the influence of triggering pipe flow regarding mean and higher order statistics // J. of Physics: Conf. Series. 2011. Vol. 318, No. 3. P. 32039–32044.
2. Zanoun E.-S., Durst F., Nagib H. Refined C_f relation for turbulent channels and consequences for high Re experiments // J. Fluid Dyn. Res. 2009. Vol. 41, No. 2. P. 021405-1–021405-12.
3. Durst F., Zanoun E.-S. Experimental investigation of near-wall effects on hot-wire measurements // Exp. Fluids. 2002. Vol. 33, No. 1. P. 210–218.
4. Zimmer F., Zanoun E.-S., Egbers C. The CoLaPipe — the new Cottbus large pipe test facility at BTU Cottbus // Review of Scientific Inst. 2014. Vol. 85, No. 7. P. 075115-1–075115-9.
5. Zanoun E.-S., Kito M., Egbers C. A study on flow transition and development in circular and rectangular ducts // J. Fluids Eng. 2009. Vol. 131, No. 6. P. 061204-1–061204-10.
6. Bryer D.W., Pankhurst R.C. Pressure-probe methods for determining wind speed and flow direction // Nat. Phys. Lab. London, 1971. 125 p.
7. Sami S. The Pitot tube in turbulent shear flow // Proc. 11th Midwestern Mech. Conf., Dev. in Mechanics, 1967. Vol. 5. P. 11. P. 71.
8. Chue S.H. Pressure probes for fluid measurements // Pro. Aero. Sci. 1975. Vol. 16, No. 2. P. 147–223.
9. McKeon B.J., Smits A.J. Static pressure correction in high Reynolds number fully developed turbulent pipe flow // Meas. Sci. Technol. 2002. Vol. 13, No. 10. P. 1608–1614.
10. Prandtl L. Reibungswiderstand, hydrodynamische probleme des schiffsantriebs, herausgeg. von G. Kempf und E. Förster–Hamburg, 1932. S. 87; Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung, Z. VDI Bd. 77, Nr. 5 S. 105–113; Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, 3 Lief. 1927. S. 1 (English Translation NACA TM 720).
11. Blasius P. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Proc. Third Int. Math. Congr. Heidelberg, 1908. P. 484–491.
12. Nikuradse J. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren // Forsch. Arb. Ing.-Wes. 1932. No. 356. P. 1–36.
13. McKeon B.J., Li J., Jiang W., Morrison J.F., Smits A.J. A new friction factor relationship for fully developed pipe flow // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 538. P. 429–443.
14. Bradshaw P., Hellens G.E. The N.P.L. 59 in \times 9 in boundary layer tunnel // NPL Aero Report. 1964. No. 1119.
15. Dean R.B. Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two dimensional rectangular duct flow // Phys. Fluids. 1978. No. 100. P. 215–223.
16. Marusic I., McKeon B.J., Monkewitz P.A., Nagib H.M., Smits A.J., Sreenivasan K.R. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22, No. 6. P. 065103-1–065103-24.
17. Monty J.P. Developments in smooth wall turbulent duct flows // PhD Thesis. Australia: The University of Melbourne, 2005. 272 p.
18. Christensen K.T. Experimental investigation of acceleration and velocity fields in turbulent channel flow // PhD thesis. Department of Theoretical and Applied Mechanics. USA: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001. 239 p.
19. Durst F., Kikura H., Lekakis I., Jovanovic J., Ye Q.-Y. Wall shear stress determination from near-wall mean velocity data in turbulent pipe and channel flows // Exp. Fluids. 1996. Vol. 20, No. 6. P. 417–428.
20. Grosser W.I. Factors influencing pitot probe centreline displacement in a turbulent supersonic boundary layer // NASA Technical Memorandum 107341. 1997. P. 1–47.

21. **Bailey S.C.C., Hultmark M., Monty J.P., Alfredsson P.H., Chong M.S., Duncan R.D., Fransson J.H.M., Hutchins N., Marusic I., McKeon B.J., Nagib H.M., Orlue R., Segalini A., Smits A.J., Vinuesa R.** Obtaining accurate mean velocity measurements in high Reynolds number turbulent boundary layers using Pitot tubes // *J. Fluid Mech.* 2013. No. 715. P. 642–670.
22. **MacMillan F.A.** Experiments on Pitot-tubes in shear flow // *Aero. Res. Council. R. & M.* 1956. No. 3028.
23. **Tavoularis S.** Techniques for turbulence measurements. Vol. 1. Flow phenomena and measurement // *Encycl. Fluid. Mech.* 1986. P. 1207–1255.
24. **McKeon B.J., Li J., Jiang W., Morrison J.F., Smits A.J.** Pitot probe corrections in fully developed turbulent pipe flow // *Meas. Sci. Technol.* 2003. Vol. 14, No. 8. P. 1449–1458.
25. **Zanoun E.S., Durst F., Saleh O., Al-Salaymeh A.** Wall skin friction and mean velocity profiles of fully developed turbulent pipe flows // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2007. Vol. 32, No. 1. P. 249–261.
26. **Wei T., Willmarth W.W.** Reynolds number effects on the structures of a turbulent channel flow // *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 204. P. 57–95.
27. **Zagarola M.V., Smits A.J.** Mean-flow scaling of turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1998. Vol. 373. P. 33–79.
28. **Fischer M.** Turbulente wandgebundene Strömungen bei kleinen Reynoldszahlen // *Dissertation. Universität Erlangen Nürnberg*, 1999. 154 p.
29. **Hall M.I.** The displacement effect of a sphere in two-dimensional shear flow // *J. Fluid Mech.* 1956. Vol. 1. P. 142–62.
30. **Lighthill M.J.** Contributions to the theory of the Pitot-tube displacement effect // *J. Fluid Mech.* 1957. Vol. 1. P. 493–512.
31. **Grossmann C., Roos H.G.** Numerik der partiellen Differentialgleichungen / B.G. Teubner. Stuttgart, 1994. 477 p.

*Статья поступила в редакцию 5 февраля 2015 г.,
после доработки — 17 марта 2015 г.*