УДК 517.9; 536.4

ОБРАЗОВАНИЕ ШАБЛОНА ПРИ НЕРАВНОВЕСНОМ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА — ФИШЕРА

К. Хуанг, Ж. Танг*, Л. Ханг*, К. Оуянг**

Технологический институт г. Яньчэн, 224051 Яньчэн, Китай
* Колледж механического и транспортного машиностроения Университета Хунань, 410082 Чанша, Китай
** Исследовательский институт Государственной корпорации энергетических систем, 410007 Чанша, Китай
E-mails: joweiwong@gmail.com, tangjiashi@hnu.edu.cn, lzhang08@163.com, ouykj@126.com

Рассматривается неравновесный фазовый переход при образовании биологического шаблона, описываемый обобщенным уравнением Бюргерса — Фишера с периодическим граничным условием. С использованием метода возмущений в бесконечномерном пространстве при наличии слабого внешнего воздействия получены приближенные бифуркационные решения вблизи критической точки и построены пространственно-периодические шаблоны. Полученные результаты свидетельствуют о том, что при наличии внешней силы бифуркация происходит позднее.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Бюргерса — Фишера, неравновесный фазовый переход, бифуркационное решение, формирование шаблона.

DOI: 10.15372/PMTF20160304

Введение. Шаблоны — это упорядоченные структуры, которые распределены по определенным правилам в природе. Формирование и эволюция шаблона связаны с бифуркацией и хаосом в бесконечномерных динамических системах. С термодинамической точки зрения некоторые шаблоны, такие как поверхности тел животных и волн на воде, образуются вдали от состояния термодинамического равновесия. В случае если реакция распространяется, в системе с диссипативной структурой наблюдается неравновесный фазовый переход. В случае если происходит обмен энергией и веществом с окружающей средой, состояние системы может быть далеким от термодинамического равновесия и может перейти к новому стационарному состоянию с упорядоченной структурой [1].

Рассмотрим нелинейное уравнение Бюргерса — Фишера [2, 3]

$$u_t = \alpha u_{xx} + \mu u u_x + \lambda(u - u^3),$$

где $u(x,t)$ — переменная поля; $\alpha > 0$ — коэффициент диффузии; λ — параметр бифуркации. Модель является обобщением кубического уравнения Фишера и нелинейного уравнения переноса, которое известно как уравнение Бюргерса и которое также может рассматриваться в качестве особой формы уравнения Бюргерса — Хаксли [4]. В работе [2]

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (гранты № 11172093, 11372102).

изучалось свойство Пенлеве уравнения Бюргерса — Фишера и получены некоторые точные решения. В [3] с использованием метода Ляпунова — Шмидта проанализированы бифуркации решения стационарного уравнения и получены сингулярные решения. В [5] в связанной системе нелинейных параболических уравнений изучались деградация и генерация шаблона. В [6] исследовалось формирование шаблонов в двумерной области для системы реакционно-диффузионных уравнений с нелинейными членами, описывающими диффузию. В работе [7] анализировались некоторые математические и численные методы решения системы реакционно-диффузионных уравнений с кросс-диффузией.

В [8] рассмотрено следующее обобщенное уравнение Бюргерса — Фишера:

$$u_t = \sigma u_{xx} - \alpha u^\delta u_x + \beta u(1 - u^\delta). \tag{1}$$

При варьировании параметров α, β, σ уравнение (1) будет соответствовать различным физическим процессам. При $\alpha = 0$ уравнение (1) становится однородным уравнением Фишера [9], при $\beta = 0$, $\delta = 1$ получается уравнение, называемое уравнением Бюргерса с квадратичной нелинейностью, которое является классическим уравнением в механике жидкости.

Бифуркация, хаос, глобальный аттрактор и гомоклиническая орбита решения обобщенного уравнения Бюргерса — Фишера также достаточно хорошо изучены. В [10] исследовались бифуркации модифицированного уравнения Свифта — Хоенберга с двумя пространственными переменными с периодическими граничными условиями и с помощью метода возмущений получены устойчивые бифуркационные решения. В [11] приведено статистическое описание вынужденной турбулентности Бюргерса при наличии силового поля.

В настоящей работе рассматривается неравновесный фазовый переход под действием слабой внешней силы $\varepsilon g(x)$, описываемый обобщенным уравнением Бюргерса — Фишера, удовлетворяющим периодическим граничным условиям. С помощью априорной оценки в банаховом пространстве определены условия существования и ограниченности стационарных решений вдали от точки бифуркации. Метод возмущений в бесконечномерном пространстве может быть использован для получения разложения некоторых разветвляющихся решений по степеням малого параметра ε, в которых члены высшего порядка ограничены. Затем определяется основной порядок возмущенных уравнений, соответствующих бифуркации, и доказывается обоснованность разложения. Вблизи критической точки имеет место фазовый сдвиг, вследствие которого образуются новые пространственно-периодические структуры. Полученные результаты свидетельствуют о том, что при наличии внешней силы бифуркация происходит позднее.

1. Ограниченность стационарных решений. Исследуем существование и ограниченность стационарных решений в бесконечномерном пространстве. Рассмотрим уравнение Бюргерса — Фишера в слабом внешнем силовом поле

$$u_t = u_{xx} + \mu u u_x + \lambda(u - u^3) + \varepsilon g(x), \qquad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{2}$$

Дополним уравнение (2) периодическим граничным условием

$$u(x + 2\pi) = u(x) \tag{3}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{4}$$

Слагаемое $\varepsilon g(x)$, соответствующее внешнему воздействию, будем считать гладкой, ограниченной нечетной периодической функцией в интервале $[0, 2\pi]$. Также будем полагать, что начальное условие $u(x, 0)$ и решение уравнений (2)–(4) в любой момент времени являются нечетными функциями:

$$u(-x, t) = -u(x, t) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Таким образом, данная начально-краевая задача принадлежит пространству

$$L^2_{per}[0,2\pi] = \{u \in L^2[0,2\pi]\colon \quad u(x+2\pi) = u(x), \quad u(-x,t) = -u(x,t)\},$$

в котором в качестве ортогонального базиса выбираем систему функций $\{\sin x, \sin 2x, \ldots\}$.

Полагая $u_t = 0$, стационарное уравнение (2) запишем в виде

$$u_{xx} + \mu u u_x + \lambda(u - u^3) + \varepsilon g(x) = 0. \tag{5}$$

В отличие от конечномерных систем решениями бесконечномерных систем являются линейные комбинации бесконечного числа собственных векторов. В результате может произойти разрушение решения в периодической области. В этом случае метод возмущений неприменим. Далее выполним априорную оценку стационарного решения и докажем, что $u(x) \in L^2_{per}[0,2\pi]$. Умножая обе части уравнения (5) на u, получаем

$$-\int_0^{2\pi} u_x^2\,dx + \lambda\int_0^{2\pi} u^2\,dx - \lambda\int_0^{2\pi} u^4\,dx + \varepsilon\int_0^{2\pi} g(x)u\,dx = 0. \tag{6}$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^{2\pi} u^2\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} u_x^2\,dx, \quad \Big(\int_0^{2\pi} u^2\,dx\Big)^2 \leqslant 2\pi\Big(\int_0^{2\pi} u^4\,dx\Big), \quad g(x)u \leqslant \frac{g^2(x)+u^2}{2}, \quad |g(x)| \leqslant M,$$

используя которые с учетом уравнения (6) находим

$$\Big(\lambda - 1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\int_0^{2\pi} u^2\,dx - \frac{\lambda}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} u^2\,dx\Big)^2 + \varepsilon\pi M^2 \geqslant 0.$$

Нетрудно получить следующую оценку:

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi} u^2\,dx \leqslant \frac{-(\lambda - 1 + \varepsilon/2) - \sqrt{(\lambda - 1 + \varepsilon/2)^2 + 4\lambda\varepsilon\pi M^2}}{-2\lambda}. \tag{7}$$

Тогда при $\lambda > 0$ правая часть неравенства (7) больше нуля и интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x)\,dx$ ограничен.

2. Бифуркационные решения и новые пространственные структуры. С использованием метода возмущений найдем бифуркационное решение и докажем обоснованность этого разложения. Будем полагать, что при $\lambda > 0$ разложение стационарного решения $u(x)$ принимает вид

$$u = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_1^2 u_2 + \varepsilon_1^3 u_3 + \varepsilon_1^4 u_4 + \ldots, \tag{8}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/3}$. В предположении, что $\lambda = 1 + \varepsilon_1^2 R$, $R = O(1)$, исследуем фазовый переход вблизи $\lambda = 1$. Подставляя уравнение (8) в уравнение (5), получаем

$$O(\varepsilon_1)\colon \qquad u_{1,xx} + u_1 = 0; \tag{9}$$

$$O(\varepsilon_1^2)\colon \qquad u_{2,xx} + u_2 = -\mu u_1 u_{1,x}; \tag{10}$$

$$O(\varepsilon_1^3)\colon \qquad u_{3,xx} + u_3 = -\mu(u_1u_2)_x - Ru_1 + u_1^3 - g(x); \tag{11}$$

$$O(\varepsilon_1^4):\qquad u_{4,xx}+u_4=-\mu(u_1u_3)_x-\frac{1}{2}\,\mu(u_2^2)_x-Ru_2+3u_1^2u_2; \tag{12}$$

$$O(\varepsilon_1^j):\qquad u_{j,xx}+u_j=-\frac{1}{2}\,\mu\sum_{k=1}^{j-1}(u_ku_{j-k})_x-Ru_{j-2}+\sum_{k,l=1}^{j-2}u_ku_lu_{j-k-l}+ \\ +R\sum_{k,l=1}^{j-4}u_ku_lu_{j-2-k-l}\quad (j=5,6,\ldots). \tag{13}$$

Интегрируя уравнения (9) по x в пространстве $L^2_{per}[0,2\pi]$, получаем

$$u_1=A_{1,1}\sin x$$

($A_{1,1}$ — неопределенный коэффициент). Аналогично для уравнения (10) получаем

$$u_2=A_{2,1}\sin x+A_{2,2}\sin 2x,$$

где $A_{2,1}$ — неопределенный коэффициент;

$$A_{2,2}=\frac{\mu}{6}\,A_{1,1}^2. \tag{14}$$

Разлагая $g(x)$ в уравнении (11) в ряд Фурье на интервале $[0,2\pi]$, имеем

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin{(nx)},\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(x)\sin{(nx)}\,dx.$$

Решение уравнения (11) представляет собой функцию

$$u_3=\sum_{n=1}^{\infty}A_{3,n}\sin{(nx)},$$

где $A_{3,1}$ — неопределенный коэффициент; $A_{3,n}$, $n=2,3,\ldots$ соответственно имеет вид

$$A_{3,2}=\frac{\mu A_{1,1}A_{2,1}+a_2}{3},\quad A_{3,3}=\frac{\mu^2A_{1,1}^3/4+A_{1,1}^3/4+a_3}{8},\quad A_{3,n}=\frac{a_n}{n^2-1}\quad (n=4,5,\ldots).$$

Также получаем уравнение

$$RA_{1,1}-\frac{\mu}{2}\,A_{1,1}A_{2,2}-\frac{3}{4}\,A_{1,1}^3+a_1=0. \tag{15}$$

Подставляя $A_{2,2}$ из (14) в (15), находим

$$RA_{1,1}-\Big(\frac{\mu^2}{12}+\frac{3}{4}\Big)A_{1,1}^3+a_1=0. \tag{16}$$

Следует отметить, что кубическое уравнение (16) для $A_{1,1}$ представляет собой бифуркационное уравнение, зависящее от управляющего параметра R. Очевидно, что при

$$R^3>\frac{27}{4}\Big(\frac{\mu^2}{12}+\frac{3}{4}\Big)a_1^2$$

существует бифуркация ненулевого решения уравнения (16)

$$A_{1,1}^{(1)}=2\sqrt[3]{r}\cos\theta. \tag{17}$$

В результате получаем два новых нетривиальных решения

$$A_{1,1}^{(2)} = 2\sqrt[3]{r}\cos\Big(\theta + \frac{2}{3}\,\pi\Big), \qquad A_{1,1}^{(3)} = 2\sqrt[3]{r}\cos\Big(\theta + \frac{4}{3}\,\pi\Big), \tag{18}$$

где

$$r = 8R^{3/2}(\mu^2+1)^{-3/2}, \qquad \theta = \frac{1}{3}\arccos\frac{6a_1}{r(\mu^2+9)}. \tag{19}$$

Решение уравнения (12) запишем в виде

$$u_4 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{4,n}\sin(nx),$$

где $A_{4,1}$ — неопределенный коэффициент,

$$A_{4,2} = \frac{\mu A_{1,1}A_{3,1} - \mu A_{1,1}A_{3,3} + \mu A_{2,1}^2/2 - 3A_{1,1}^2/2}{3},$$

$$A_{4,3} = \frac{3\mu A_{1,1}A_{3,2}/2 - 3\mu A_{1,1}A_{3,4}/2 + 3\mu A_{2,1}A_{2,3}/2 + 3A_{1,1}^2A_{2,1}/4}{3},$$

$$A_{4,4} = \frac{2\mu A_{1,1}A_{33} - 2\mu A_{1,1}A_{3,5} + \mu A_{2,2}^2 + 3A_{1,1}^2A_{2,2}/4}{8},$$

$$A_{4,n} = \frac{(n\mu/2)(A_{1,1}A_{3,4} - A_{1,1}A_{3,6})}{n^2-1} \quad (n = 5, 6, \ldots).$$

Коэффициент $A_{2,1}$ определяется из уравнения

$$RA_{2,1} - \Big(\frac{\mu}{2}\,A_{2,2} + \frac{9}{4}\,A_{1,1}^2\Big)A_{2,1} - \frac{\mu}{2}\,A_{1,1}A_{3,2} = 0,$$

которое также можно представить в виде

$$RA_{2,1} - 3\Big(\frac{\mu^2}{4} + \frac{3}{4}\Big)A_{1,1}^2A_{2,1} - \frac{\mu a_2}{6}\,A_{1,1} = 0. \tag{20}$$

Для исследования разрешимости уравнения (20) относительно $A_{2,1}$ построим вспомогательную функцию $f(x) = Rx - (\mu^2/12 + 3/4)x^3 + a_1$. Согласно (16) кубическое уравнение $f(x) = 0$ имеет три различных действительных корня $A_{1,1}^{(1)}$, $A_{1,1}^{(2)}$, $A_{1,1}^{(3)}$. Таким образом,

$$f'(x)\big|_{x=A_{1,1}} = R - 3\Big(\frac{\mu^2}{12} + \frac{3}{4}\Big)A_{1,1}^2 \ne 0.$$

Решая уравнение (20), получаем

$$A_{2,1} = \frac{(\mu a_2/6)A_{1,1}}{R - 3(\mu^2/12 + 3/4)A_{1,1}^2}.$$

Учитывая j-й порядок уравнения возмущений (13), его решение запишем в виде

$$u_j = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n}\sin(nx),$$

где $A_{j,1}$ — неопределенный коэффициент. Последовательно переходя от низшего приближения к высшему, вычислим $A_{j,1}$. Решение уравнения, соответствующего возмущению порядка $O(\varepsilon_1^{j+1})$, представим в виде

$$u_{j+1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j+1,n}\sin(nx),$$

где $A_{j+1,1}$ — неопределенный коэффициент,

$$A_{j+1,2} = \frac{\mu}{3}\,A_{1,1}A_{j,1} + F_{j+1,2}(A_{1,1}), \qquad A_{j+1,n} = F_{j+1,n}(A_{1,1}), \quad n = 3, 4, \ldots,$$

$F(A_{1,1})$ — многочлен от $A_{1,1}$.

Решение уравнения, соответствующего возмущению порядка $O(\varepsilon_1^{j+2})$, представим в виде

$$u_{j+2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j+2,n}\sin{(nx)}. \tag{21}$$

Подставляя разложение (21) в уравнение возмущений порядка $O(\varepsilon_1^{j+2})$ и собирая коэффициенты $\sin x$, получаем уравнение относительно $A_{j,1}$

$$RA_{j,1} - \Big(\frac{\mu}{2}\,A_{2,2} + \frac{9}{4}\,A_{1,1}^2\Big)A_{j,1} - \frac{\mu}{2}\,A_{1,1}A_{j+1,2} + F_{j+2}(A_{1,1}) = 0,$$

которое также можно записать в виде

$$\Big[R - 3\Big(\frac{\mu^2}{12} + \frac{3}{4}\Big)A_{1,1}^2\Big]A_{j,1} + F_{j+2}(A_{1,1}) = 0. \tag{22}$$

При $R - 3(\mu^2/12 + 3/4)A_{1,1}^2 \neq 0$ из уравнения (22) следует, что $A_{j,1}$ существует.

Продолжая данную процедуру аналогичным образом, получаем разложения стационарных решений уравнения (5). Из (14)–(20) следует, что при

$$R > R_1 = \sqrt[3]{\frac{27}{4}\Big(\frac{\mu^2}{12} + \frac{3}{4}\Big)a_1^2} \tag{23}$$

вблизи ненулевого решения стационарного уравнения (5)

$$u^{(1)}(x) = \varepsilon_1 A_{1,1}^{(1)}\sin x + \varepsilon_1^2\Big(\frac{2\mu a_2 A_{1,1}^{(1)}}{12R - (3\mu^2 + 27)(A_{1,1}^{(1)})^2}\sin x + \frac{\mu(A_{1,1}^{(1)})^2}{6}\sin 2x\Big) + O(\varepsilon_1^3) \tag{24}$$

существуют две новые ветви решения:

$$u^{(2,3)}(x) = \varepsilon_1 A_{1,1}^{(2,3)}\sin x + \varepsilon_1^2\Big(\frac{2\mu a_2 A_{1,1}^{(2,3)}}{12R - (3\mu^2 + 27)(A_{1,1}^{(2,3)})^2}\sin x + \\ + \frac{\mu(A_{1,1}^{(2,3)})^2}{6}\sin 2x\Big) + O(\varepsilon_1^3), \tag{25}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/3}$, $a_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$, $a_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\sin 2x\,dx$, $A_{1,2}^{(1,2,3)}$ определяются из уравнений (17)–(19).

Таким образом, когда параметр бифуркации λ достигает критического значения $1 + \varepsilon^{2/3}R_1$, нетривиальное решение $u^{(1)}$ стационарного уравнения (5) в пространстве $L^2_{per}[0, 2\pi]$ разветвляется на два новых нетривиальных решения $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, где R_1, $u^{(1,2,3)}$ определяются выражениями (23)–(25).

Заключение. В работе исследуется образование шаблонов для уравнения Бюргерса — Фишера с дополнительным членом, соответствующим внешней периодической силе. С использованием метода возмущений в бесконечномерном пространстве аналитически получены некоторые приближенные бифуркационные решения вблизи точки бифуркации и построены новые периодические решения. В отличие от известных результатов, согласно которым при отсутствии внешней силы и $\lambda = 1$ невозмущенное реакционно-диффузионное уравнение имеет точку разветвления [12–14], результаты проведенного исследования показывают, что наличие внешней силы увеличивает значение параметра бифуркации λ, т. е. бифуркация происходит позднее. Таким образом, на формирование шаблона влияет изменение параметра бифуркации или наличие внешней силы. Изменяя внешнюю периодическую нагрузку, можно контролировать формирование шаблона в различных гидравлических и оптических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ma T.** Stability and bifurcation of nonlinear evolution equation / T. Ma, S. H. Wang. Beijing: Sci. Press, 2007.
2. **Chandrasekaran P., Ramasami E. K.** Painleve analysis of a class of nonlinear diffusion equations // J. Appl. Math. Stochast. Anal. 1996. N 9. P. 77–86.
3. **Zhong J., Li X.** On the bifurcation of equilibrium solution to Burgers — Fisher equation // College Math. 2010. V. 26. P. 124–127.
4. **Wang X., Zhu Z., Lu Y.** Solitary wave solutions of the generalized Burgers — Huxley equation // J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 271–297.
5. **Kaloyan M., Wang T. Z., Yang Y. S.** On a vegetation pattern formation model governed by a nonlinear parabolic system // Nonlinear Anal.: Real World Applicat. 2013. V. 14. P. 507–525.
6. **Gambino G., Lombardo M. C., Sammartino M.** Pattern formation driven by cross-diffusion in a 2D domain // Nonlinear Anal.: Real World Applicat. 2013. V. 14. P. 1755–1779.
7. **Ricardo R. B., Tian C. R.** Mathematical analysis and numerical simulation of pattern formation under cross-diffusion // Nonlinear Anal.: Real World Applicat. 2013. V. 14. P. 601–612.
8. **Wang X., Lu Y.** Exact solutions of the extended Burgers — Fisher equation // Chinese Phys. Lett. 1990. V. 7. P. 145–147.
9. **Fisher R.** The wave of advance of an advantageous genes // Annals Eugenics. 1937. V. 7. P. 355–369.
10. **Xiao Q. K., Gao H. J.** Bifurcation analysis of a modified Swift — Hohenberg equation // Nonlinear Anal.: Real World Applicat. 2011. V. 11. P. 4451–4464.
11. **Bertozzi A., Pugh M.** Long-wave instabilities and saturation in thin film equations // Comm. Pure Appl. Anal. 1998. N 5. P. 625–661.
12. **Huang Q. W., Tang J. S.** Dynamic bifurcation of a modified Kuramotoben — Sivashinsky equation with a higher-order nonlinearity // Chinese Phys. B. 2011. V. 20. 094701.
13. **Huang Q. W., Tang J. S.** Bifurcation of a limit cycle in the ac-driven complex Ginzburg — Landau equation // Discrete Continuous Dynam. Systems. Ser. B. 2010. V. 14. P. 129–141.
14. **Huang Q. W., Tang J. S.** Asymptotic bifurcation solutions for perturbed Kuramoto — Sivashinsky equation // Comm. Theor. Phys. 2011. V. 54. P. 685–687.

Поступила в редакцию 5/XI 2013 г.,
в окончательном варианте — 30/IV 2014 г.